УДК 517.956

Н. И. ЮРЧУК, В. И. ЯШКИН

О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

1. В цилиндре $Ц = G\times(0,\ T)$, $G=\{x\in R^3: |x|<R\}$, рассмотрим центрально-симметрическую по пространственным переменным смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t)-\Delta u(x,\ t)+\sum_{i=1}^{3} b_i(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,\ t)+$$

$$+c(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)+q(x,\ t)\,u(x,\ t)=0,\ (x,\ t)\in Ц, \tag{1}$$

$$u(x,\ 0)=\varphi(r),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=\psi(r),\ 0\leqslant r\leqslant R, \tag{2}$$

$$u(x,\ t)|_\Gamma=0,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$

где $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $r=|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_9^2}$, $\Gamma=\{(x,\ t)\in\overline{Ц}: r= = R\}$ — боковая поверхность цилиндра.

Природа центральной симметрии проявляется в коэффициентах уравнения (1) следующим образом:

$$b_i(x,t)=b(r,t)x_i,\ c(x,t)=c(r,t),\ q(x,t)=q(r,t).$$

Будем предполагать, что функции b, c, q непрерывны в Ц, их производные $\frac{\partial b}{\partial r}$, $\frac{\partial c}{\partial r}$, $\frac{\partial q}{\partial t}$ ограничены в $\overline{Ц}$, а b удовлетворяет условию согласования.

В работе С. Н. Барановской [1] впервые установлено существование классического решения в замкнутом прямоугольнике $[0,\ l]\times[0,\ T]$ первой смешанной задачи для уравнений с одномерным волновым оператором (т. е. задачи вида (1)—(3) в случае одной пространственной переменной) при условиях на начальные функции φ и ψ, совпадающих с необходимыми:

$$\omega\in C^2[0,\ l],\ \varphi(0)=\varphi(l)=0,\ \varphi''(0)=\varphi''(l)=0, \tag{5}$$

$$\psi\in C^1[0,\ l],\ \psi(0)=\psi(l)=0. \tag{6}$$

Еще ранее этот факт был установлен В. А. Чернятиным в работах [2—4] с помощью метода Фурье для телеграфного уравнения с независящим от t коэффициентом q в свободном члене.

Цель нашей работы — получить аналогичный результат для задачи (1)—(3) с тремя пространственными переменными.

Замечание 1. Анализ формулы

$$u(r,\ t)=\frac{(r+t)\,\varphi(r+t)+(r-t)\,\varphi(r-t)}{2r}+\frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t}\xi\,\psi(\xi)\,d\xi, \tag{7}$$

дающей решение задачи Коши вида (1), (2) при $b\equiv c\equiv q\equiv 0$, показывает, что особенность в точке $r=0$ вынуждает наложить требования $\varphi\in \in C^3$, $\psi\in C^2$, чтобы обеспечить принадлежность функции u классу C^2 (см. напр., [5. С. 326, 327]). Следовательно, для достижения поставленной цели необходимо модифицировать понятие классического решения рассматриваемой смешанной задачи (1)—(3).

Замечание 2. Выводу формулы (7) и многим другим исследованиям волновых уравнений с центральной симметрией предшествует сведение таких уравнений к одномерным волновым уравнениям с оператором Бесселя. Это сведение, как известно, производится путем перехода к сферическим координатам (см,, напр., [6. С. 200; 7. С. 115]). При $r=0$ такая замена переменных является вырожденной, и поэтому одномерное волновое уравнение с оператором Бесселя будет эквивалентным трехмерному волновому уравнению во всех точках его задания кроме оси $r=0$. В связи с этим представляется естественным требовать, чтобы решение удовлетворяло трехмерному волновому уравнению лишь в рассматриваемой области с выколотой осью $r=0$.

Определение. Ослабленным на оси $r=0$ классическим решением задачи (1)—(3) будем называть функцию

$$u \in C^1(\overline{Ц}) \cap C^2(Ц \setminus \{0\} \times [0, T]),$$

обращающую уравнение (1) в тождество в $\overline{Ц} \setminus \{0\} \times [0, T]$ — цилиндре с выколотой осью, удовлетворяющую условиям (2), (3) в обычном смысле и

$$\lim_{|x| \to 0} |x| \Delta u(x, t) = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{|x| \to 0} \sum_{i=0}^{3} x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, dt} = 0. \tag{9}$$

Отметим, что условия (8), (9) являются (ослабленной) заменой требования принадлежности $C^2(Ц)$ обычного классического решения.

Если функция u является (ослабленным или обычным) классическим решением задачи (1)—(3), то из уравнения (1) в силу условия (3) предельным переходом устанавливается, что

$$\Delta u(x, t)|_{\Gamma} = 0. \tag{10}$$

Покажем, что для существования ослабленного классического решения задачи (1)—(3) необходимо и достаточно, чтобы начальные функции φ и ψ удовлетворяли условиям

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(r) \in C^1[0, R] \cap (0, R], \ \varphi(R) = \Delta\varphi(R) = 0, \\ \lim\limits_{r \to 0} r\Delta\varphi(r) = 0, \ \left(\Delta\varphi = \dfrac{d^2\varphi}{dr^2} + \dfrac{2}{r} \dfrac{d\varphi}{dr}\right), \end{array}\right\} \tag{11}$$

$$\psi(r) \in C[0, R] \cap C^1(0, R], \ \lim_{r \to 0} r \frac{d\psi}{dr} = 0, \ \psi(R) = 0. \tag{12}$$

2. В задаче (1)—(3) перейдем к сферическим координатам. Так как рассматривается центрально-симметрическая задача, то решение зависит только от расстояния r, т. е. $u(x, t) = u(r, t)$. Для функции $u(r, t)$ получим одномерную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(r, t) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, t) + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}(r, t)\right) + rb(r, t) \frac{\partial u}{\partial r}(r, t) +$$

$$+ c(r, t) \frac{\partial u}{\partial t}(r, t) + q(r, t) u(r, t) = 0, \ 0 < r < R, \ 0 < t < T, \tag{13}$$

$$u(r, 0) = \varphi(r), \ \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = \psi(r), \ 0 \leqslant r \leqslant R, \tag{14}$$

$$u(R, t) = 0, \ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{15}$$

В соответствии с нашим определением решение задачи (13)—(15) ищется в классе функций

$$u \in C^1([0, R] \times [0, T]) \cap C^2((0, R] \times [0, T]),$$

удовлетворяющих условиям:

$$\lim_{r \to 0} r\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0, \tag{16}$$

$$\lim_{r \to 0} r \frac{\partial^2 u}{\partial r \, \partial t} = 0. \tag{17}$$

Свойство (10), которому всегда удовлетворяет решение задачи, в переменных (r, t) запишется в виде:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\Big|_{r=R} = 0. \tag{18}$$

Теорема. Необходимыми и достаточными условиями существования ослабленного на оси $r=0$ классического решения $u(x, t)$ смешанной задачи (1)—(3) являются условия (11), (12) на начальные функции φ и ψ.

Замечание 3. Единственность ослабленного на оси $r=0$ классического решения вытекает из единственности сильно обобщенного решения этой задачи.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть существует ослабленное на оси $r=0$ классическое решение $u(x, t)$ смешанной задачи (1)—(3). Тогда функция $u(r, t)\in C^1([0, R]\times[0, T])\cap C^2((0, R]\times[0, T])$ и удовлетворяет уравнению (13), условиям (14)—(18). Тогда начальные функции φ и ψ из условий (15)—(18) удовлетворяют условиям (11), (12).

Достаточность. Пусть функции φ и ψ удовлетворяют условиям (11), (12). Покажем, что существует ослабленное на оси $r=0$ классическое решение задачи (1)—(3).

Произведем в задаче (13)—(15) замену искомой функции по формуле $v(r^1 t)=ru(r, t)$. Тогда для нахождения функции $v(r, t)$ получим задачу:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(r, t) - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, t) + rb(r, t)\frac{\partial v}{\partial r}(r, t) + c(r, t)\frac{\partial v}{\partial t}(r, t) +$$

$$+ (q(r, t) - b(r, t))\, v(r, t) = 0, \quad 0<r<R, \quad 0<t<T \tag{19}$$

$$v(r_0\ 0) = \Phi(r), \frac{\partial v}{\partial t}(r, 0) = \Psi(r), \quad 0\leqslant r\leqslant R, \tag{20}$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(R, t) = 0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{21}$$

где начальные функции $\Phi(r)=r\varphi(r)$ и $\Psi(r)=r\psi(r)$ удовлетворяют условиям:

$$\Phi\in C^2[0, R], \quad \Phi(0)=\Phi(R)=0, \quad \Phi''(0)=\Phi''(R)=0, \tag{22}$$

$$\Psi\in C^1[0, R], \quad \Psi(0)=\Psi(R)=0, \tag{23}$$

(см. условия (5), (6)). Так как коэффициенты уравнения (19) по предположению непрерывны в замкнутом прямоугольнике $[0, R]\times[0, T]=\bar{Q}$, имеют в $\bar{Q}$ ограниченные производные и выполняется условие (4), то, как установлено в [1], задача (19)—(21) имеет классическое решение $v\in C^2(\bar{Q})$, и для него справедливо равенство:

$$v(r, t) = \frac{\tilde{\Phi}(r+t) + \tilde{\Phi}(r-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} \tilde{\Psi}(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{r-(t-\tau)}^{r+(t-\tau)} \tilde{F}(\xi, \tau)\,d\xi. \tag{24}$$

Здесь $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Psi}$ — продолжения функций Φ и Ψ с отрезка $[0, R]$ на всю ось $\mathbf{R}^1$: сначала они продолжаются на отрезок $[-R, 0]$ нечетным образом, а затем $2R$-периодически на ось $\mathbf{R}^1$. Функции $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Psi}$ являются нечетными, а из условий (22) и (23) следует, что $\tilde{\Phi}\in C^2(\mathbf{R}^1)$, $\tilde{\Psi}\in C^1(\mathbf{R}^1)$. Символом $\tilde{F}$ обозначено выражение

$$\tilde{F} = -\tilde{r}\,\hat{b}\,\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} - \hat{c}\,\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t} - (\hat{q} - \hat{b})\,\tilde{v},$$

где $\tilde{r}$ и $\tilde{v}$ — нечетные $2R$-периодические продолжения функций r и v с $[0, R]$ и $\bar{Q}$ на $\mathbf{R}^1$ и $\mathbf{R}^1\times[0, T]$ соответственно; $\hat{b}$, $\hat{c}$ и $\hat{q}$ — продолжения функций b, c и q с $\bar{Q}$ на полосу $\mathbf{R}^1\times[0, T]$ сначала четным образом на $[-R, 0]\times[0, T]$, а затем $2R$-периодически. Отметим, что $\tilde{F}$ является ничем иным, как аналогичным нечетным $2R$-периодическим продолжением с $\bar{Q}$ на полосу $\mathbb{R}^1\times[0, T]$ функции

$$F=-rb\frac{\partial v}{\partial r}-c\frac{\partial v}{\partial t}-(q-b)v.$$

Покажем теперь, что функция

$$u(r, t)=\frac{v(r, t)}{r}=\frac{\tilde{\Phi}(r+t)+\tilde{\Phi}(r-t)}{2r}+\frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t}\tilde{\Psi}(\xi)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2r}\int_0^t dt\int_{r-(t-\tau)}^{r+(t-\tau)}\tilde{F}(\xi, \tau)\,d\xi \tag{25}$$

является ослабленным на оси $r=0$ классическим решением задачи (1)—(3) или, что одно и то же, функция $u\in C^1(\bar{Q})\cap C^2((0, R]\times[0, T]$ является решением задачи (13)—(15) и удовлетворяет условиям (16)—(18). Так как $v\in C^2(\bar{Q})$, то функция $\frac{v}{r}$ при $r\neq0$ тоже принадлежит классу C^2, и, следовательно, $u\in C^2((0, R]\times[0, T])$. Непосредственным вычислением устанавливается, что функция u удовлетворяет уравнению (13) в Q и условиям (14) и (15). Выполнимость условия (18) устанавливается путем предельного перехода при $r\to R$ в уравнении (13) в силу граничного условия (15). Осталось показать, что $u\in C^1(\bar{Q})$ и для этой функции выполняются условия (16) и (17). Используя правило Лопиталя, получим, что

$$\lim_{r\to0}u(r, t)=\tilde{\Phi}'(t)+\tilde{\Psi}(t)+\int_0^t\tilde{F}(t-\tau, \tau)\,d\tau.$$

Следовательно, $u\in C(\bar{Q})$. Далее, вычислив в формуле (25) производные $\frac{\partial u}{\partial r}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ и перейдя в полученных выражениях к пределу при $r\to0$, с помощью правила Лопиталя и разложений значений функций $\tilde{\Phi}(r+t)$, $\tilde{\Phi}'(r+t)$, $\tilde{\Phi}(r-t)$, $\tilde{\Phi}'(r-t)$ по степеням r установим, что

$$\lim_{r\to0}\frac{\partial u(r, t)}{\partial r}=0,\quad \lim_{r\to0}\frac{\partial u(r, t)}{\partial t}=\tilde{\Psi}''(t)+\tilde{\Psi}'(t)+\int_0^t\frac{\partial\tilde{F}(t-\tau, \tau)}{\partial(t-\tau)}\,d\tau.$$

Тем самым показано, что $u\in C^1(Q)$. Так как

$$r\left(\frac{\partial^2u}{\partial r^2}(r, t)+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(r, t)\right)=\frac{1}{2}\left\{\tilde{\Phi}''(r+t)+\tilde{\Phi}''(r-t)+\tilde{\Psi}'(r+t)-\right.$$
$$\left.-\tilde{\Psi}'(r-t)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial r}[\tilde{F}(r+(t-\tau), \tau)-\tilde{F}(r-(t-\tau), \tau)]\,d\tau\right\}$$

и функции $\tilde{\Phi}''$ — нечетная, $\tilde{\Psi}'$ — четная, $\frac{\partial\tilde{F}}{\partial r}$ — четная, то, перейдя в последнем равенстве к пределу при $r\to0$, установим, что функция u удовлетворяет условию (16). Наконец, разлагая по степеням r значения функций, входящих в правую часть равенства

$$r\frac{\partial^2u}{\partial r\partial t}=\frac{1}{2}\left\{\tilde{\Phi}''(r+t)-\tilde{\Phi}''(r-t)-\frac{\tilde{\Phi}'(r+t)-\tilde{\Phi}'(r-t)}{r}+\right.$$
$$+\tilde{\Psi}'(r+t)+\tilde{\Psi}'(r-t)-\frac{\tilde{\Psi}(r+t)+\tilde{\Psi}(r-t)}{r}+$$
$$+\int_0^t\left[\frac{\partial\tilde{F}(r+(t-\tau), \tau)}{\partial r}+\frac{\partial\tilde{F}(r-(t-\tau), \tau)}{\partial r}\right]d\tau-$$

$$- \frac{1}{r} \int_0^t [\tilde{F}(r+(t-\tau),\ \tau) - \tilde{F}(r-(t-\tau),\ \tau)]\, d\tau \Big\},$$

и переходя в этом равенстве к пределу при $r \to 0$, установим, что функция u удовлетворяет условию (17). Теорема доказана.

Список литературы

1. Барановская С. Н. // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 9. С. 787.
2. Чернятин В. А. // Современные проблемы математического моделирования. М., 1984. С. 29.
3. Чернятин В. А. // ДУ. 1985. Т. 21. № 9. С. 1569.
4. Чернятин В. А. // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 5. С. 1080.
5. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., 1954. С. 326, 327.
6. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. С. 200.
7. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., 1962. С. 115.

Поступила в редакцию 16.04.91.