Математика и механика

УДК 517.977

Р. ГАБАСОВ, Ф. М. КИРИЛЛОВА

УСТОЙЧИВОСТЬ, СТАБИЛИЗАЦИЯ, ОПТИМАЛЬНОСТЬ

1. Устойчивость решений [1] — одна из центральных проблем теории дифференциальных уравнений, поставленных многочисленными прикладными задачами. Результаты, полученные в этой области, давно и широко используются в теории управления для стабилизации собственно неустойчивых динамических систем [2]. В классическую эпоху теории автоматического регулирования часто довольствовались достижением для систем общего свойства устойчивости. С развитием техники повышались требования к стабилизации. Устойчивые переходные процессы стали оценивать по различным критериям качества. Новый этап теории стабилизации наступил после создания теории оптимального управления [3]. Первым крупным и практически важным приложением теории оптимальных процессов к задачам стабилизации явился метод Летова — Калмана аналитического конструирования оптимальных регуляторов [4, 5]. Наиболее эффективно он используется для стабилизации линейных систем с квадратичной оценкой качества переходных процессов без учета каких-либо ограничений на управление и траекторию. Использование других результатов математической теории оптимальных процессов для решения усложненных проблем стабилизации сдерживается отсутствием эффективных алгоритмов синтеза оптимальных систем.

В последнее время в рамках Минского семинара по конструктивным проблемам оптимального управления на базе методов решения экстремальных задач [6, 7] разработаны алгоритмы синтеза оптимальных систем управления. Цель данной работы — показать, каким образом эти результаты могут применяться для создания оптимальных стабилизаторов с ограниченными управляющими воздействиями. Предлагаемые алгоритмы рассчитаны на реализацию с помощью средств современной вычислительной техники.

2. Рассмотрим n-мерный дискретный процесс $x(t)$, $t \in 0, h, \ldots$, описываемый уравнением

$$x(t+h) = A(h)x(t). \tag{1}$$

Дискретные системы встречаются во многих приложениях и поэтому их исследование представляет самостоятельный интерес. В данной работе они играют вспомогательную роль при стабилизации непрерывных систем

$$\dot{x} = Ax. \tag{2}$$

В связи с тем, что предлагаемые далее стабилизаторы рассчитаны на реализацию с помощью микропроцессорных устройств, работающих с тактом $h > 0$, то целесообразно от системы (2) перейти к (1), положив

$A(h)=\exp Ah$. В этом случае траектории двух систем (1), (2), выходящие из одного начального состояния, будут совпадать и в моменты $t_k=kh$, $k=1, 2, \ldots$. Следовательно, стабилизация дискретной системы (1) ведет к стабилизации и непрерывной системы (2).

Предположим, что система (1) неустойчива относительно состояния покоя $x=0$, т. е. существует такое (неустойчивое) начальное состояние $x_0\neq 0$, что процесс $x(t)$, $t\geqslant 0$, начавшийся в момент $t=0$ из состояния x_0, обладает свойством $\|x(t)\|\to\infty$, если $t\to\infty$.

Пусть для стабилизации системы (1) доступны скалярные управляющие воздействия $u(t)$, $t\geqslant 0$, стесненные ограничением:

$$|u(t)|\leqslant 1,\quad t\geqslant 0. \tag{3}$$

Будем считать, что взаимодействие управления (3) с объектом стабилизации (1) описывается уравнением

$$x(t+h)=A(h)x(t)+b(h)u(t). \tag{4}$$

Обозначим

$$X_\alpha=\{x\in R^n: |x_j|\leqslant\alpha,\ j=\overline{1,\ n}\},\ (0<\alpha<\infty). \tag{5}$$

Определение 1. Состояние $x(0)\in X_\alpha$ назовем $\alpha\theta$-стабилизируемым, если существует такое управление $u(t)$, $t\in T_{\theta-h}=\{0, h, \ldots, \theta-h\}$, которое удовлетворяет ограничению (3) и порождает траекторию $x(t)$, $t\in T_\theta$, вдоль которой выполняется условие

$$x(\theta)\in X_\alpha. \tag{6}$$

Систему (1) будем называть $\alpha\theta$-стабилизируемой, если все ее состояния $x(0)\in X_\alpha$ $\alpha\theta$ — стабилизируемы.

Если в дополнение к (6) выполняется соотношение $x(t)\in X_{p\alpha}$, $t\in T_\theta$, $(p\geqslant 1)$, то будем говорить о равномерной $\alpha\theta$-стабилизируемости.

Определение 2. Состояние $x(0)\in X_\alpha$ назовем $\alpha q\theta$ — асимптотически стабилизируемым $0<q<1$, если существует такое управление $u(t)$, $t\in T_{\theta-h}$, которое удовлетворяет ограничению (3) и порождает траекторию $x(t)$, $t\in T_\theta$, вдоль которой выполняется условие $x(\theta)\in X_{q\alpha}$. Систему (1) будем называть $\alpha q\theta$-асимптотически стабилизируемой, если все ее состояния $x(0)\in X_\alpha$ $\alpha q\theta$-асимптотически стабилизируемы.

3. На языке теории оптимального управления в п. 2 рассмотрены задачи о существовании стабилизирующих управлений. Для построения последних можно было бы в духе линейного программирования ввести первую фазу метода. Однако перейдем сразу к оптимальной стабилизации.

Определение 3. Для заданного начального состояния $x(0)\in X_\alpha$ $\alpha q\theta$-асимптотически стабилизирующее управление назовем оптимальным, если на нем минимально значение параметра q, т. е., если оно является решением задачи:

$$\begin{gathered} q\to\min,\ x(t+h)=A(h)x(t)+b(h)u(t),\\ x(0)=x_0,\ |x_j(\theta)|\leqslant q\alpha,\ \ j=\overline{1,\ n},\\ |u(t)|\leqslant 1,\ t\in T_{\theta-h}\ . \end{gathered} \tag{7}$$

Оптимальное равномерно $q\alpha\theta$-асимптотически стабилизирующее управление является решением задачи:

$$\begin{gathered} q\to\min,\ x(t+h)=A(h)x(t)+b(h)u(t),\\ x(0)=x_0,\ x(t)\in X_{p\alpha},\ t\in T_\theta\ ;\\ |x_j(\theta)|\leqslant q\alpha,\ \ j=\overline{1,\ n},\ |u(t)|\leqslant t\in T. \end{gathered} \tag{8}$$

4. Оптимальные управления, введенные в п. 3, принято называть программными. Они пригодны лишь для разомкнутых систем управления.

На практике чаще используются замкнутые системы (системы управления с обратной связью), более приспособленные для парирования неучтенных возмущений. Подобные возмущения типичны для процессов, которые требуется стабилизировать.

Опишем схему синтеза стабилизирующего воздействия, которое вырабатывается в режиме реального времени.

Предположим, что система управления (4), (3) проработала в дискретные моменты времени $0, h, \ldots, \tau$. К моменту τ она под действием управлений $u(0), \ldots, u(\tau-h)$ и внешних возмущений $w(0), \ldots, w(\tau-h)$ находится в состоянии $x(\tau)$. В следующий момент $\tau+h$ она из-за возникшего возмущения $w(\tau)$ окажется не в состоянии $\check{x}(\tau+h)=A(h)x(\tau)+$ $+b(h)u(\tau)$, а в состоянии $x(\tau+h)=\check{x}(\tau+h)+w(\tau)$.

Устройство, которое для каждого $\tau\geqslant 0$ за время, не превосходящее h, при любом $x(\tau+h)$ решает экстремальную задачу вида:

$$q\to\min,\ x(t+h)=A(h)x(t)+b(h)u(t),$$

$$|x_j(\tau+\theta+h)|\leqslant q\alpha,\ \ j=\overline{1,\ n};\ x(\tau+h)=\check{x}(\tau+h)+w(\tau), \tag{9}$$

$$|u(t)|\leqslant 1,\ t\in\{\tau+h,\ \ldots,\ \tau+\theta\},$$

назовем оптимальным стабилизатором.

Понятие равномерного оптимального стабилизатора может быть введено аналогично.

Очевидно, что непосредственное решение задачи (8) в каждый момент τ слишком трудоемко и не может быть осуществлено за реально приемлемое время h. Поэтому оптимальное управление $u^0(\cdot|\tau+h,$ $x(\tau+h))$ задачи (8) построим с помощью коррекции управления $u^0(\cdot|\tau,\ x(\tau))$, полученного стабилизатором в предыдущий момент времени. В качестве базового для начального момента $\tau=0$ можно выбрать оптимальную программу $u^0(\cdot)$ для (6).

Согласно [7], решением задачи вида (8), построенной для момента τ, является совокупность $\{u^0(\cdot|\tau,\ x(\tau)),\ S_{оп}(\tau)\}$, где $S_{оп}(\tau)=$ $=\{J_{оп}(\tau),\ T_{оп}(\tau)\}$, $J_{оп}(\tau)\subset J=\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, $T_{оп}(\tau)=\{\tau_1,\ \ldots,\ \tau_l\}$, $\tau\leqslant\tau_1(\tau)<\tau_2(\tau)<\ldots<\tau_l(\tau)\leqslant\tau+\theta$.

При этом выполняются соотношения:
$|J_{оп}(\tau)|=|T_{оп}(\tau)|=l,\ 0\leqslant l\leqslant n,\ \det P(\tau)\neq 0,\ P(\tau)$ — $l\times l$ — матрица, построенная по элементам системы (4).

Коррекция решения $\{u^0(\cdot|\tau,\ x(\tau)),\ S_{оп}(\tau)\}$ состоит в вычислении чисел $\tau_1(\tau+h),\ \tau_2(\tau+h), \ldots, \tau_l(\tau+h)$. Эти числа в общем случае мало отличаются от соответствующих чисел $\tau_1(\tau),\ \tau_2(\tau), \ldots, \tau_l(\tau)$, известных стабилизатору в момент времени τ. Алгоритм коррекции сводится к конечной совокупности арифметических операций. Из-за большого объема необходимых вспомогательных сведений описание алгоритма здесь не приводится. Оно будет опубликовано отдельно. Отметим лишь, что в основе алгоритма лежат идеи двойственности.

Список литературы

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
2. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969. С. 384.
4. Калман Р. Е. // Тр. I Междунар. конгр. ИФАК. М., 1961. Т. 2. С. 521.
5. Летов А. М. // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. № 4, 5, 6.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Мн., 1977—1980. Ч. 1—3.
7. Габасов Р., Кириллова Ф. М. и др. Конструктивные методы оптимизации. Мн., 1984—1987. Ч. 1—4.

Поступила в редакцию 12.11.90.