БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

О. А. Велько
М. В. Мартон
Н. А. Моисеева

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СОЦИОЛОГОВ

*Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
по естественно-научному образованию в качестве
учебно-методического пособия для студентов
учреждений высшего образования, обучающихся
по специальностям 1-23 01 05 «Социология»,
1-23 01 15 «Социальные коммуникации»*

МИНСК
БГУ
2020

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73-1
В28

Рецензенты:
кафедра высшей математики Белорусского государственного технологического университета (заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук *О. Н. Пыжкова*);
кафедра высшей математики факультета цифровой экономики Белорусского государственного экономического университета (заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук *В. В. Косьянчук*);
доктор педагогических наук *В. В. Казаченок*;
кандидат физико-математических наук *И. К. Асмыкович*

Велько, О. А.
В28 Основы высшей математики для социологов : учеб.-метод. пособие / О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева. – Минск : БГУ, 2020. – 303 с.
ISBN 978-985-566-983-9.

Представлены математические модели природных и социальных явлений. Каждая тема содержит исторические сведения, теоретический материал, примеры решения, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. Многие математические понятия иллюстрируются примерами из социологии и экономики.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73-1

ISBN 978-985-566-983-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Связь социологии и математики в последние годы становится все более тесной и многоплановой. Потребность в развитии как теории социологии, так и ее экспериментальных и прикладных направлений требует использования математических методов для описания и анализа тех явлений, которые она изучает. Это выражается в стремлении формулировать законы социологии в математической форме. Проникновение математических методов в социологию, связанное прежде всего с развитием экспериментальных и прикладных исследований, оказывает сильное влияние на ее развитие.

Изучение математики будущими социологами, а также применение ими современных математических методов анализа социальной реальности способствует успешному формированию у студентов профессиональной компетентности, умения задействовать межпредметные связи, осуществлению преемственности в изучении математических понятий, развитию критического и прогностического мышления. В основе решения многих прикладных задач лежат методы математического моделирования. Умения корректно сформулировать вопрос на языке узких специалистов (например, математиков или программистов), адекватно интерпретировать полученные результаты с точки зрения социальных наук, уточнить и скорректировать выстроенную математическую модель являются важнейшими в методологическом арсенале будущего социолога.

В настоящее время невозможно представить специалиста, не знающего математических методов исследования основных экономических процессов и закономерностей на производстве и в обществе. Поэтому математические дисциплины занимают одно из ведущих мест в общем ряду дисциплин для студентов-социологов. Курс «Основы высшей математики» является основой для изучения следующих учебных дисциплин: «Основы информационных технологий», «Статистический анализ социологической информации», «Социальная и экономическая статистика», «Экономическая социология», «Экономическая теория». Кроме того, практические навыки, полученные при изучении дисциплины, будут полезны студентам при написании курсовых и дипломной работ, проведении исследовательских проектов, а также в самообразовании.

Данное учебно-методическое пособие написано на основе опыта преподавания дисциплины «Основы высшей математики» в течение ряда лет на факультете философии и социальных наук БГУ. В книге большое внимание уделено решению типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал, причем многие изучаемые математические понятия иллюстрируются приложениями из социологии. Основной материал в учебно-методическом пособии дополняется элементами математического моделирования процессов и явлений, изучаемых студентами-социологами. Некоторые задачи, рассмотренные в книге и предложенные для самостоятельного решения, подобраны так, чтобы показать возможность применения математических знаний в сфере будущей профессиональной деятельности студентов. Еще одна особенность издания в том, что авторы к каждой главе дали справку, где кратко сообщается история развития изучаемых понятий, их значимость в науке. Это важно и актуально, поскольку дает студенту представление о математике как области культуры человечества, знакомит с именами и историческими событиями, которые сопутствовали становлению математики. Отметим, что в разделе III более мелким шрифтом изложен теоретический материал, предназначенный для самостоятельного изучения и полезный тем студентам, которые желают подробнее изучить, разобрать учебный материал.

В соответствии с программой дисциплины данное учебно-методическое пособие содержит разделы, охватывающие основные направления применения математических методов в социологии. При выборе тем одним из важнейших выступал принцип профессиональной направленности, который подразумевает тесную связь содержания учебной дисциплины с профессиональной сферой деятельности будущих специалистов-социологов. Поэтому для занятий целесообразно использовать задачи, составленные на основе реальных статистических данных, которые отражают те или иные социально-экономические закономерности или явления.

Авторы выражают благодарность за конструктивную помощь и критические замечания, которые способствовали существенному улучшению содержания учебно-методического пособия, профессору БГУ доктору педагогических наук В. В. Казаченку и заведующему кафедрой высшей математики БГЭУ, кандидату физико-математических наук, доценту В. В. Косьянчуку, кандидату физико-математических наук, доценту кафедры высшей математики БГТУ И. К. Асмыковичу. Авторы признательны заведующему кафедрой общей математики и информатики БГУ профессору С. А. Самалю и профессору Н. С. Коваленко за помощь, оказанную в процессе создания книги.

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня мы не можем отрицать наличие междисциплинарных связей между социологией и математикой. В последние годы эта связь становится все более тесной и многоплановой. Изучение математики будущими социологами, а также применение ими современных математических методов анализа социальной реальности способствует более успешному формированию у студентов профессиональной компетентности, умения задействовать межпредметные связи, осуществлению преемственности в изучении математических понятий, развитию критического и прогностического мышления.

Главная **цель** изучения дисциплины «Основы высшей математики» – усвоить роль и место математики в современном мире и социологических исследованиях; использовать основные математические методы для решения задач в профессиональной деятельности социолога.

Задачи изучения дисциплины «Основы высшей математики»:

- овладеть основными математическими понятиями и методами;
- использовать математический язык, анализировать данные посредством количественных методов;
- исследовать природу математических абстракций и возможности их использования в социально-гуманитарной и экономической сферах;
- освоить математические методы решения задач, используемых в профессиональной деятельности;
- развить познавательный интерес к вопросам применения математических и статистических методов в социологии;
- изучить методы построения и решения математических моделей с применением различных принципов идеализации.

В результате изучения дисциплины студенты должны ***знать***:

- роль и место математики в современном мире и социологических исследованиях;
- основные математические методы решения задач, используемых в профессиональной деятельности социолога;
- элементы теории множеств и их применение к социальным объектам;
- матричное исчисление и его использование в социологии;

- элементы комбинаторики и их применение к анализу социологических явлений;
- основные сведения о функциях, элементах дифференциального и интегрального исчисления и их использовании в социально-экономической сфере;
- основы теории вероятностей и ее использования в обработке социологических данных;
- основы математического моделирования социальных процессов;

уметь:

- использовать математический язык и аппарат при описании явлений и закономерностей окружающего мира;
- применять теорию множеств к социальным группам и к анализу ответов на вопросы социологических анкет;
- выполнять основные матричные операции, использовать матричное исчисление в экономических задачах, применять матричный аппарат к моделированию социальных процессов;
- использовать дифференциальное и интегральное исчисление в социально-экономической сфере;
- применять комбинаторику к обработке и анализу социологических данных;
- приводить примеры случайных величин в социологических исследованиях;
- использовать основы теории вероятностей в обработке социологических данных;
- делать социологические выводы на основе анализа математических моделей;

владеть:

- терминологией дисциплины «Основы высшей математики»;
- математическими методами решения задач, используемых в профессиональной деятельности социолога;
- основными приемами математического анализа;
- навыками применения теории множеств к социальным группам и к анализу ответов на вопросы социологических анкет;
- навыками использования матричного исчисления;
- навыками вычисления вероятности событий при решении прикладных задач;
- навыками делать социологические выводы на основе анализа математических моделей.

Дисциплина «Основы высшей математики» изучается студентами I курса специальности 1-23 01 05 «Социология» очной и заочной форм получения образования. В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины отводится всего 184 часа, из них аудиторных часов – 68, в том числе лекции – 34 часа, практические занятия – 24 часа, УСР – 10 часов. Форма текущей аттестации – экзамен.

Одной из инновационных технологий является оргдеятельностная, основанная на организации эвристической (обучение через открытия), диалоговой, продуктивной деятельности каждого обучающегося. Подобная деятельность приводит к созданию ее участником собственных образовательных продуктов, как внешних (самостоятельное составление примеров и задач по выбранной теме, составление кроссвордов, подготовка наглядных пособий, мультимедийных презентаций по изучаемым темам курса), так и внутренних, включая развитие коммуникативных, эвристических качеств личности, обеспечивает самореализацию, а потому мотивацию к учебной деятельности.

Эвристический метод применяется для активизации творческой деятельности обучающихся через систему творческих заданий. Этот метод способствует лучшему пониманию и закреплению в памяти тех материалов, с которыми обучающийся ознакомился в процессе выполнения задания.

Авторы разработали комплект эвристических заданий открытого типа на очно-дистанционной программе повышения квалификации «Технологии эвристического обучения в высшей школе «Методика обучения через открытие: Как обучать всех по-разному, но одинаково» БГУ. Автор и ведущий программы повышения квалификации: А. Д. Король, ректор БГУ, доктор педагогических наук, профессор. Некоторые из эвристических заданий открытого типа приводятся в данном учебно-методическом пособии.

Изложим содержание тем учебного материала по курсу «Основы высшей математики» для студентов-социологов.

Содержание учебного материала

Раздел 1. Элементы теории множеств и их применение к социальным объектам

Тема 1.1. Роль и место математики в гуманитарных науках и социологических исследованиях

Введение в дисциплину «Основы высшей математики». Предмет высшей математики. Основные этапы использования математики в социальных исследованиях.

Тема 1.2. Основные понятия теории множеств. Операции над множествами

Понятие множества. Конечные и бесконечные множества. Способы задания множеств. Примеры множеств в социологии. Операции над множествами и их свойства. Диаграммы Эйлера – Венна. Применение теории множеств к анкетным опросам и социальным группам.

Тема 1.3. Бинарные отношения

Понятие бинарного отношения. Примеры бинарных отношений в социологических исследованиях. Моделирование социальных процессов с помощью бинарных отношений.

Раздел 2. Элементы линейной алгебры и их применение в социально-экономической сфере

Тема 2.1. Матрицы, определители

Матрица как наглядный способ описания многомерных социологических объектов. Определение и основные типы матриц. Основные операции над матрицами и их свойства. Определители и их свойства. Использование матриц при решении задач с экономическим и социологическим содержанием.

Тема 2.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Основные понятия и методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Математические модели в экономике и социологии в виде систем линейных алгебраических уравнений.

Раздел 3. Основы математического анализа и их применение в социально-экономической сфере

Тема 3.1. Основы дифференциального исчисления

Задачи, приводящие к понятию производной. Понятие производной функции одной вещественной переменной, ее интерпретация как показателя динамики различных социально-экономических явлений и процессов. Основные правила дифференциального исчисления. Примеры использования производной в социологии. Основные идеи математического анализа.

Тема 3.2. Основы интегрального исчисления

Понятие неопределенного и определенного интегралов. Интегрирование простейших функций. Применение интегрального исчисления в социологии.

Раздел 4. Элементы теории вероятностей в социологических исследованиях

Тема 4.1. Основы комбинаторики

Предмет комбинаторики. Комбинаторные принципы сложения и умножения. Выбор без повторений. Выбор с повторениями. Использование комбинаторных методов для обработки и анализа социологических данных.

Тема 4.2. Вероятность случайного события

Предмет теории вероятностей и ее роль в социологии. Понятие случайности в социальных исследованиях. Случайные события и их классификация. Классическое определение вероятности.

Тема 4.3. Основные теоремы теории вероятностей

Теоремы сложения вероятностей. Независимые события, условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Формула Пуассона. Использование вероятностных методов в социологии.

Тема 4.4. Дискретные и непрерывные случайные величины

Дискретные и непрерывные случайные величины. Примеры случайных величин в социологии. Закон распределения дискретной случайной величины. Числовые характеристики случайных величин. Функция распределения и ее свойства. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства. Примеры использования различных случайных величин и законов их распределения в социологии, их роль в социологических исследованиях.

Раздел 5. Основы математического моделирования в социологии

Тема 5.1. Математическое моделирование социальных процессов

Типы математических моделей. Математические модели в социологии.

На *самостоятельную внеаудиторную работу* студентов рекомендуется следующее распределение часов, отведенных учебным планом (116 часов).

Раздел 1. Элементы теории множеств и их применение к социальным объектам (16 часов).

Раздел 2. Элементы линейной алгебры и их применение в социально-экономической сфере (16 часов).

Раздел 3. Основы математического анализа и их применение в социально-экономической сфере (34 часа).

Раздел 4. Элементы теории вероятностей в социологических исследованиях (30 часов).

Раздел 5. Основы математического моделирования в социологии (20 часов).

Роль и место математики в гуманитарных науках и социологических исследованиях

Математические методы уже давно и успешно применяются в социологии. Процесс математизации науки необратим, в наше время он захватывает такие области знаний, в которых совсем недавно исключалась возможность использования математических методов исследования и измерений. Сегодня развитие теории и успешность практических приложений любой науки в значительной степени предопределяются мерой математизации данной области знаний. Хорошо известны мысли ученых о важности математики во многих науках. Математические методы позволяют также систематизировать и классифицировать результаты исследований, определять сходство и различие между процессами взаимодействия в различных природных условиях, вероятностную зависимость между явлениями, выделять ведущие факторы, действующие на развитие процесса, создавать математические модели процессов или явлений в социологии.

На вопрос «для чего изучают математику?» замечательно ответил еще в XIII в. английский философ и естествоиспытатель Роджер Бэкон: «Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества». Выделим еще несколько причин, которые указывают на необходимость изучения высшей математики студентами гуманитарных специальностей и, в частности, студентами-социологами.

1. Математика – часть общечеловеческой культуры и универсальный язык науки. На протяжении нескольких тысячелетий развития человечества шло накопление математических фактов. Каждый культурный человек должен иметь представление об основных математических понятиях: число, функция, множество, непрерывность, вероятность и др.

2. «Математику уж затем учить следует, что она ум в порядок приводит» (М. В. Ломоносов). Математика влияет на упорядочение ума благодаря таким особенностям, как общность и абстрактность конструкций. Логические рассуждения представляют собой метод математики, поэтому ее изучение развивает логическое мышление, позволяет правильно устанавливать причинно-следственные связи, что должен уметь каждый специалист. Математика развивает абстрактное мышление, умение работать с абстрактными, неосязаемыми объектами, воспитывает такой склад ума, который требует критической проверки и логического обоснования тех или иных положений и точек зрения. Изучение математики приучает к полноценной аргументации и предостерегает от необоснованных обобщений.

3. Математика предлагает общие и четкие логические модели для изучения окружающей действительности. Математической моделью изучаемого объекта называется логическая конструкция, отражающая геометрические формы этого объекта и количественные соотношения между его числовыми параметрами. Исследование модели дает новую информацию о самом объекте.

Традиционно считают, что использование математики в социальных науках выражается в получении только количественных характеристик. Такое понимание крайне упрощено, поскольку количественные определенности всегда связаны с качественными. Конкретные социологические исследования могут успешно развиваться и будут иметь практическое и теоретическое значение только в том случае, если они используют математические методы при анализе различных механизмов социальных процессов, а также при сборе и обработке первичной социальной информации.

Конкретные социологические исследования проводятся на самых различных уровнях: общей теории, специальных социологических теорий и т. д., поэтому важнейшей задачей является изучение и выработка специфических математических теорий, средств и методов для каждого уровня в отдельности. Рассмотрим основные направления применения математических методов в современной социологии. Во всех областях социологического исследования математические методы играют огромную роль. Их арсенал весьма обширен и многообразен. В данном учебно-методическом пособии рассмотрены несколько важнейших разделов, которые охватывают основные направления применения математических методов в социологии: «Элементы теории множеств и их применение к социальным объектам», «Элементы линейной алгебры и их применение в социально-экономической сфере», «Основы математического анализа и их применение в социально-экономической сфере», «Элементы теории вероятностей в социологических исследованиях», «Основы математического моделирования в социологии».

Так, например, при изучении раздела «Элементы теории множеств и их применение к социальным объектам» рассмотрены конкретные задачи на применение теории множеств к анкетным опросам и социальным группам. Анализируя одну из главных задач социолога – поиск сочетаний значений рассматриваемых признаков, детерминирующих то или иное поведение человека, приходим к языку математической логики и теории множеств. На конкретных примерах показано, как мощность симметрической разности может служить количественной мерой различия между множествами анкет социологических опросов. Бинарные отношения, т. е. отношения между двумя элементами какого-либо множества, являются основным инструментом моделирования и исследования социальных отношений. Рассматриваются такие бинарные отношения, как «быть одноклассником», «быть родственником», «быть старше». Студенты учатся самостоятельно моделировать социальные процессы с их помощью.

Элементы линейной алгебры, а именно матрицы, также находят широкое применение в задачах, изучающих зависимости между различными социально-экономическими показателями. Матричная форма записи используется для компактности записи большого числа элементов, помогает структурировать социологическую информацию. Весьма удобным и полезным математическим аппаратом является матричный метод в социологических исследованиях. В теме «Матричное исчисление» студенты учатся строить матрицу приростов доходов. В теме «Решение систем линейных уравнений» можно рассмотреть один из важных вопросов анализа социально-экономической деятельности – равновесие спроса и предложения.

В разделе «Основы математического анализа и их применение в социально-экономической сфере» показывается, как спрогнозировать социально-экономические показатели и предельные показатели в микроэкономике. Возможно сопровождение изучаемого математического материала примерами из специальных дисциплин, образцами его применения в будущей профессиональной деятельности.

Элементы теории вероятностей. В основе решения многих прикладных социологических задач лежат методы математического моделирования. Умения корректно сформулировать вопрос на языке узких специалистов, адекватно интерпретировать полученные результаты с точки зрения социальных наук, уточнить и скорректировать выстроенную математическую модель являются важнейшими в методологическом арсенале будущего социолога. Поэтому социологам рекомендуется освоить тему «Основы математического моделирования в социологии». Студенты изучают различные математические модели социальных процессов и явлений, строят математические модели в экономике и социологии в виде систем линейных уравнений. Рассматривается задача моделирования человеческого поведения, которая в ее представлении отражает в себе основные проблемные моменты, сложившиеся в философии, психологии, социологии, кибернетике и прочих науках. Очевидно, что вопросы, поднятые в ней, имеют фундаментальное значение для познания человеком как окружающего мира, так и самого себя.

Очевидно, что математика играет немаловажную роль в дальнейшем образовании студентов и в будущей профессиональной деятельности. Она позволяет количественно сравнивать явления, обоснованно прогнозировать будущие события, проверяет правильность словесных утверждений. Математическая статистика лежит в основе социологического эксперимента, а стремление к корректности проведения исследования приводит к изучению соответствующих разделов высшей математики. Знание высшей математики необходимо также и при построении моделей социальных процессов.

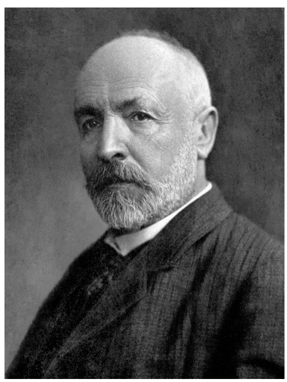
РАЗДЕЛ I

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К СОЦИАЛЬНЫМ ОБЪЕКТАМ

1.1. ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА. ПРИМЕРЫ МНОЖЕСТВ В СОЦИОЛОГИИ

Любая теория начинается с введения основных начальных понятий, т. е. минимального списка *неопределяемых* терминов, которые называются так потому, что любая попытка определить их через другие понятия приводит к появлению новых, которые также нуждаются в определении. Примерами неопределяемых понятий являются *точка* – то, что не имеет частей в интерпретации древнегреческих философов, или *линия* – длина без ширины и т. д. Центральным местом в иерархии математических сущностей являются математический объект и понятие **множество**. Понятие множества в математике первично, не сводимо к более простым понятиям.

Теория множеств является основой современной математики и возникла в конце XIX в. в связи с необходимостью обоснования ряда ее разделов (например, теория вероятностей, теория чисел). Основоположник теории множеств немецкий математик и философ **Георг Кантор** под множеством понимал «любое собрание определенных и различимых между собой объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое как единое целое». Георг Кантор впервые в математической науке изучил свойства абстрактных множеств и осуществил их классификацию, отвлекаясь от конкретной природы элементов множеств.



Георг Кантор

В математике под множеством понимается *совокупность некоторых объектов*, *объединяемых* *по общим характеристическим свойствам и мыслимых в качестве единого.* Канторовское определение множества потребовало введения следующих трех символов.

Первый символ должен представлять само множество как «единое». Для обозначения множеств используются прописные буквы латинского алфавита (A, B, C, ..., X, Y, Z) или какого-либо другого по соглашению.

Второй символ должен представлять «многое», т. е. рассматриваться как «элемент множества». **Элементами множества** называются объекты, составляющие множество. Например, если множество представляет собой совокупность студентов-социологов конкретной группы, то его элементами будут фамилии студентов. Для обозначения элементов используются строчные буквы того же алфавита, например a, b, c, ..., x, y, z.

Третий символ должен соотносить элемент со множеством. Тот факт, что «x является элементом множества M», записывается в виде $x \in M$. Это высказывание можно также прочесть следующим образом: «x принадлежит множеству M» или «x содержится в множестве M». Символ $\in$ называется ***символом принадлежности***. Он происходит от первой буквы греческого слова εστι – «быть». Если «x не является элементом множества M», то пишут $x \notin M$ и читают как «x не принадлежит множеству M», «x не содержится в множестве M».

Введение понятия множества в математику оказалось очень полезным и плодотворным. Элементами множеств могут быть объекты различной природы, поэтому одни и те же утверждения о множествах могут быть отнесены как к утверждениям о числах, так и к утверждениям о социальных объектах.

Множество считается ***заданным***, если о каждом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или нет. Например, совокупность студентов-социологов на потоке является множеством, так как про каждого студента можно сказать, числится он на данном потоке или нет.

Упражнение. Определить, какие из следующих совокупностей задают множества, а какие нет:

1) совокупность лиц, работающих в БГУ, имеющих высшее образование,
2) совокупность произведений искусства;
3) совокупность красивых девушек в аудитории;
4) совокупность студентов-социологов в университете;
5) совокупность зрителей в кинотеатрах Минска.

Возможны различные способы задания множества. Один из них состоит в том, что дается полный список элементов, входящих во множество.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется ***конечным множеством***. Конечное множество можно задать, перечисляя его элементы. Элементы, принадлежащие конечному множеству, записывают между двумя фигурными скобками и разделяют запятыми.

Например, множество букв алфавита белорусского языка – {а, б, в, ..., я}; множество студентов данной учебной группы определяется их списком в экзаменационной ведомости – {Баранкина О. В., Иванов А. П., ..., Петрова И. Н.}; множество всех стран на земном шаре — их списком в последнем издании географического атласа; множество арабских цифр десятичной системы счисления — $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; половой диморфизм $П = \{м, ж\}$, где м и ж — мужчины и женщины соответственно.

Но этот способ задания множества, т. е. способ перечисления его элементов, применим лишь к конечным множествам, да и то не ко всем. Например, множество рыб в океане конечно, однако задать их списком, перечислить трудно.

Замечание. *В дальнейшем для удобства будем давать словесное описание множества в кавычках, например множество А — «множество студентов-социологов».*

Если число элементов бесконечно, то множество называется ***бесконечным***. В пример можно привести множество натуральных чисел, множество точек на отрезке. К бесконечным множествам способ перечисления элементов вовсе не применим.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется ***пустым множеством*** и обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество единственно и конечно. Например, множество динозавров в зоопарке Минска является пустым, так как не содержит ни одного элемента, как и множества электронных баз данных в XIX в. и действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Замечание. *Символ для пустого множества только один, потому что пустое множество единственно.*

Отметим, что введение понятия пустого множества можно объяснять тем, что при задании множества характеристическим свойством (т. е. с помощью описания свойств его элементов) не всегда известно, существует ли элемент с таким свойством. Например, мы говорим о множестве решений какого-либо уравнения, которое может и не иметь решения, т. е. это множество является пустым.

В большинстве случаев множество задается с помощью указания *характеристических свойств* его элементов, при этом используются фигурные скобки, а внутри них приводятся характеристические свойства, описывающие элементы множества (появляется строгое математическое описание). Так, запись

$$\{x\colon x \text{ обладает свойством } P\}$$

задает множество, содержащее только те объекты, которые имеют свойство P. Двоеточие в этой записи можно читать как «*такой, что*».

Таким образом, множество задают либо перечислением его элементов, либо описанием характеристического свойства, которое четко определяет совокупность его элементов.

Пример. Множество $A = \{2, 4, 6, \ldots\} = \{x\colon x$ — четное натуральное число$\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ или множество $B = \{x\colon x$ — натуральное число, такое, что $x < 6\}$.

Замечание. *Множество, состоящее из одного элемента* $\{x\}$, *не следует путать с самим этим элементом* x.

Например, множества $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$ являются различными, так как $\varnothing$ – это пустое множество, не содержащее ни одного элемента, а множество $\{\varnothing\}$ не пусто, его единственным элементом является само пустое множество, т. е. $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

Множество, состоящее из одного элемента a, обозначается $\{a\}$ и называется ***одноточечным*** множеством; его следует отличать от элемента.

Например, множество корней уравнения $x - 7 = 0$ является одноточечным. Так, в социальных науках выделяется понятие «семья, состоящая из одного человека» – тоже одноточечное множество.

Мощностью конечного множества S называется число элементов в нем. Она обозначается как $n(S)$.

Принято считать, что математика возникла в глубокой древности из практических потребностей людей. По поводу ее древности никто не спорит, а вот насчет того, что побудило людей ею заниматься, существует и другое мнение. Согласно ему математика, как и искусство, была вызвана к жизни духовными потребностями человека, его стремлением к познанию и красоте. Одних вдохновляет прикладной аспект математики, других – ее внутренняя красота и гармония! Все это накладывает определенные ограничения как на язык математики, так и на ее логическую аргументацию, когда из верных исходных положений получаются верные результаты.

1.2. ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА – ВЕННА

Определение подмножества. Множество A называется ***подмножеством*** множества B, обозначается $A \subset B$ (или $B \supset A$), если каждый элемент множества A является элементом множества B.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

В этой символической записи использованы логические обозначения: символ $\forall$ – ***квантор всеобщности*** («для всех», «для любого»), знак $\Rightarrow$ – ***импликация*** (т. е. $X \Rightarrow Y$ означает «если X, то Y», «в случае X выполняется Y»), логическая связка $\Leftrightarrow$ – ***эквивалентность*** («если и только если», ритуальное выражение «тогда и только тогда, когда»), называемая иногда двойной импликацией.

Например, множество A – «множество студентов-социологов БГУ» является подмножеством множества B – «множество студентов ФФСН БГУ», т. е. $A \subset B$, и если рассмотреть множество C – «множество студентов БГУ», то $A \subset B \subset C$.

Замечание. *В число «подмножеств» непустого множества A удобно включить само A и пустое множество* $\varnothing$, *т. е.*

$$A \subset A \text{ и } \varnothing \subset A.$$

Таким образом, всякое множество есть подмножество самого себя. Второе включение можно мотивировать исходя из следующего рассуждения. Если бы пустое множество $\varnothing$ не было подмножеством множества A, то содержало бы элемент, принадлежащий $\varnothing$, но не принадлежащий A, а поскольку пустое множество не содержит элементов, то это невозможно.

Эти два подмножества, т. е. $\varnothing$ и A, называются ***несобственными подмножествами*** множества A. Остальные, если таковые есть, называются ***собственными подмножествами*** множества A. Например, множество гласных букв является собственным подмножеством множества букв русского алфавита.

Пример. Выпишем все подмножества заданных конечных множеств:

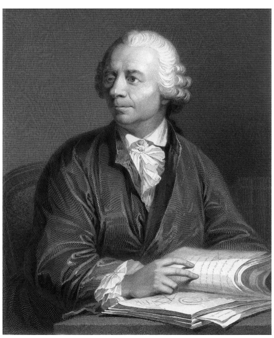
а) у двухэлементного множества $\{1, 2\}$ четыре подмножества: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$;

б) у трехэлементного множества $\{0, 1, 3\}$ восемь подмножеств: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{0, 1, 3\}$.

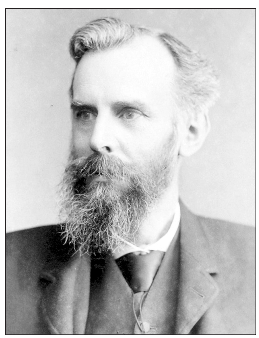
У конечного множества, состоящего из n элементов, будет ровно 2^n *подмножеств, включая пустое и его самого.*

Обычно все множества, с которыми имеют дело в математическом рассуждении, являются подмножествами некоторого фиксированного множества. Поэтому будем предполагать, что множества, рассматриваемые в рамках какой-либо теории, являются подмножествами одного, называемого ***универсальным множеством***. Будем обозначать его через $\boldsymbol{U}$.

Существует очень удобный прием наглядного изображения взаимоотношений между множествами, позволяющий иллюстрировать операции над ними, – так называемые ***диаграммы Эйлера – Венна***. Это графический способ изображения множеств в виде кругов, которым активно пользовались Леонард Эйлер, а затем и Джон Венн. Множества в этих диаграммах чаще всего изображаются кругами, точнее их внутренностью и получаемыми из них фигурами, а прямоугольник изображает универсальное множество $\boldsymbol{U}$. В диаграммах Эйлера – Венна не имеет значения относительный размер кругов, важно только их взаимное расположение.



Леонард Эйлер



Джон Венн

На рис. 1.1 два множества A и B изображены кругами, причем видно, что A включено в B, т. е. $A \subset B$, и A – собственное подмножество множества B, которое не совпадает с ним. На рис. 1.2 также изображено включение $A \subset B$, но при этом A и B совпадают.

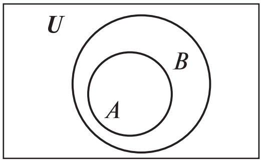


Рис. 1.1

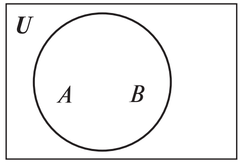


Рис. 1.2

Определение равенства множеств. Множества A и B ***равны*** (обозначается $A = B$), если все элементы множества A принадлежат также множеству B, а все элементы множества B принадлежат также множеству A:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A.$$

Согласно этому определению $A = B$, если каждое из двух множеств есть подмножество другого, поэтому можно говорить, что множества A и B «состоят из одних и тех же элементов» (см. рис. 1.2).

Пример. Пусть множество $X = \{2, 3\}$, а множество $Y = \{y\colon y^2 - 5y + 6 = 0\}$, тогда $X = Y$.

Определение неравенства множеств. Множества A и B ***неравны*** (обозначается $A \neq B$), если в одном из этих множеств есть хотя бы один элемент, которого нет в другом.

Пример. Если $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{1, 2, 4\}$, то множества A и B неравны, т. е. $A \neq B$.

Замечание. *Для неравных множеств не выполняется хотя бы одно из этих включений*: $A \subset B$, $B \subset A$.

Пример. Если $A = \{1, 2\}$ и $B = \{1, 2, 4\}$, то $A \neq B$, так как множество B не является подмножеством множества A, т. е. $B \not\subset A$.

В заключение этого раздела сформулируем **задачу о трех языках**, для решения которой потребуется не только понятие множества, но и знание операций над множествами. В студенческие группы направлен проверяющий, чтобы оценить уровень знаний иностранных языков. Был представлен следующий итоговый отчет.

Отчет проверяющего. В группах 100 студентов, каждый из которых изучает по крайней мере один из трех языков: английский, немецкий или французский. Причем все три языка изучают 5 человек, английский и французский – 8, немецкий и французский – 10, английский и немецкий – 20, немецкий – 23, французский – 30, английский – 50 человек.

Проверяющий, представивший этот отчет, был уволен. ***Почему?***

1.3. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Над множествами можно производить различные операции, результатом которых будут являться новые множества. Задать операцию над множествами означает указать способ по двум заданным множествам A и B построить третье.

Определение пересечения множеств. ***Пересечением*** двух множеств A и B (обозначается $A \cap B$) называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B:

$$A \cap B \overset{def}{=} \{x\colon x \in A \textbf{ и } x \in B\}.$$

Символ равенства с *def*, т. е. запись $\overset{def}{=}$, в этой формуле означает «равенство по определению», т. е. то, что стоит слева от этого символа, определяется через то, что стоит справа, а *def* – это сокращение от лат. *definito* – определение.

Примеры

1. Пусть A – «множество студентов I курса отделения “Социология”», а B – «множество девушек-социологов ФФСН», тогда $A \cap B$ – «множество девушек-социологов I курса ФФСН».

2. Пусть A – «множество нечетных чисел», а B – «множество двузначных чисел», тогда $A \cap B$ – «множество нечетных двузначных чисел».

3. Пусть A – «множество всех левшей», а B – «множество всех людей, носящих очки», тогда $A \cap B$ – «множество всех левшей, носящих очки».

4. Пусть A – «множество всех студентов, сдавших сессию на баллы не ниже 7, т. е. на 7, 8, 9, 10», а B – «множество всех студентов, сдавших сессию на баллы не выше 8, т. е. на 4, 5, 6, 7, 8», тогда $A \cap B$ – «множество всех студентов, сдавших сессию на баллы 7 и 8».

5. Пусть $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 9\}$, $C = \{4, 6\}$, тогда $A \cap B = \{3\}$; $A \cap C = \varnothing$.

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечение пусто, пишем $A \cap B = \varnothing$, и в таком случае говорят, что множества A и B ***не пересекаются***. На рис. 1.3, 1.4 приведены диаграммы Эйлера – Венна для двух множеств A и B в случаях, когда соответственно $A \cap B \neq \varnothing$ и $A \subset B$. Множеству $A \cap B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

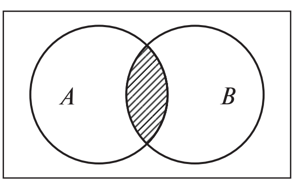


Рис. 1.3

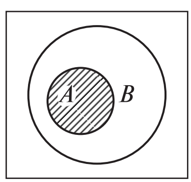


Рис. 1.4

Обратим внимание на то, что в описании пересечения множеств использована связка «и» вместе с символами принадлежности элемента $\in$.

Операция пересечения множеств обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции умножения чисел. Однако некоторые свойства пересечения множеств отличаются от соответствующих свойств умножения.

Если A – подмножество множества B, т. е. $A \subset B$, то $A \cap B = A$ (см. рис. 1.4), поскольку общими для множеств A и B будут все элементы множества A и только они.

Замечание. *Отметим свойства пересечения множеств, справедливые для любых множеств A, B и C:*

$$A \cap B \subset A \text{ и } A \cap B \subset B.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следует включение $A \cap C \subset B \cap C$. В частности, для любого множества A имеют место равенства

$$A \cap \varnothing = \varnothing \text{ и } A \cap \boldsymbol{U} = A.$$

Также верно равенство $A \cap A = A$.

Замечание. *Для любых двух множеств A и B выполняется* ***свойство коммутативности*** *операции пересечения:*

$$A \cap B = B \cap A.$$

Коммутативный закон показывает, что можно как угодно менять порядок множеств в указанных операциях.

Замечание. *Для любых трех множеств A, B и C выполняется* ***свойство ассоциативности*** *для операции пересечения:*

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово СОЦИОЛОГИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем пересечение этих множеств $A \cap B$.

Множество A состоит из 7 различных букв:

$$A = \{\text{С, О, Ц, И, Л, Г, Я}\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 6 букв:

$$B = \{\text{Ф, И, Л, О, Г, Я}\}.$$

Пересечением этих множеств является следующий набор из 5 букв:

$$A \cap B = \{\text{И, Л, О, Г, Я}\},$$

который содержится как во множестве A, так и во множестве B.

Определение объединения множеств. ***Объединением*** двух множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B:

$$A \cup B \overset{def}{=} \{x\colon x \in A \textbf{ или } x \in B\}.$$

Примеры

1. Пусть A – «множество всех государственных предприятий Минска», а B – «множество всех негосударственных предприятий Минска», тогда $A \cup B$ – «множество всех как государственных, так и негосударственных предприятий Минска».

2. Пусть A – «множество всех нечетных натуральных чисел», а B – «множество всех четных натуральных чисел», тогда $A \cup B$ – «множество всех натуральных чисел».

3. Пусть A – «множество всех девушек, которые учатся на ФФСН», а B – «множество всех юношей, которые учатся на ФФСН», тогда $A \cup B$ – «множество всех студентов, которые учатся на ФФСН».

4. Пусть $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 9\}$, $C = \{4, 6\}$, тогда $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $A \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

На рис. 1.5 приведена диаграмма Эйлера – Венна для двух множеств A и B в случае, когда $A \cap B \neq \varnothing$. На рис. 1.6 и рис. 1.7 приведены диаграммы Эйлера – Венна для двух множеств A и B в случаях, когда $A \subset B$ и $A \cap B = \varnothing$. Множеству $A \cup B$ на рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

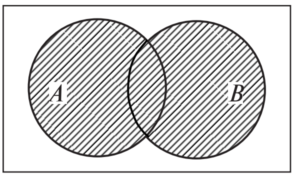


Рис. 1.5

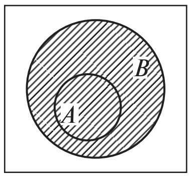


Рис. 1.6

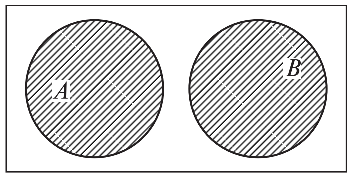


Рис. 1.7

Операция объединения множеств обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции сложения чисел. Однако некоторые свойства объединения множеств отличаются от соответствующих свойств сложения чисел.

Если A – подмножество множества B, т. е. $A \subset B$, то $A \cup B = B$ (см. рис. 1.6), так как элементы из множества A принадлежат множеству B и второй раз включать их в объединение не надо.

Замечание. *Отметим, что свойства объединения выполняются для любых множеств A, B и C:*

$$A \subset A \cup B \text{ и } B \subset A \cup B.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следует включение $A \cup C \subset B \cup C$. В частности, для любого множества A выполняются равенства

$$A \cup \varnothing = A \text{ и } A \cup U = U.$$

Выполняется также равенство $A \cup A = A$.

Соотношение $A \cup B = \varnothing$ равносильно двум соотношениям $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$.

Замечание. *Для любых двух множеств A и B выполняется* ***свойство коммутативности*** *операции объединения*:

$$A \cup B = B \cup A.$$

Замечание. *Для любых трех множеств* A, B *и* C *выполняется* ***свойство ассоциативности*** *для операции объединения*:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Замечание. *При чередовании операций объединения и пересечения для любых трех множеств* A, B *и* C *выполняются* ***свойства дистрибутивности*** *одной операции относительно другой*:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово СОЦИОЛОГИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем объединение этих множеств $A \cup B$.

Множество A состоит из 7 различных букв:

$$A = \{\text{С, О, Ц, И, Л, Г, Я}\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 6 букв:

$$B = \{\text{Ф, И, Л, О, Г, Я}\}.$$

Объединением этих множеств является следующий набор из 8 букв:

$$A \cup B = \{\text{С, Ц, Ф, И, Л, О, Я, Г}\}.$$

Поскольку буквы И, Л, О, Г, Я, принадлежащие пересечению множеств A и B, вошли в объединение этих множеств лишь один раз, то мы получили только 8 букв, а не $7 + 6 = 13$ букв, так как $(7 + 6) - 5 = 8$.

Определение разности множеств. ***Разностью*** двух множеств A и B (обозначается $A \setminus B$ (или $A - B$)) называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B:

$$A \setminus B \stackrel{def}{=} \{x\colon x \in A \textbf{ и } x \notin B\}.$$

В определении разности множеств не предполагается, что B является подмножеством множества A.

Примеры

1. Пусть A и B – «множества студентов отделения “Социология”, изучающих английский и немецкий языки соответственно», тогда $A \setminus B$ – «множество студентов отделения “Социология”, которые изучают английский язык, но не изучают немецкий язык».
2. Пусть $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 9\}$, $C = \{4, 6\}$, тогда $A \setminus B = \{5, 7\}$, $A \setminus C = A$.
3. Пусть $A = \{x\colon |x| \le 5\}$ и множество $B = \{x\colon x < 2\}$, тогда разность $A \setminus B = \{x\colon 2 \le x \le 5\}$.
4. Пусть A – «множество всех студентов ФФСН», B – «множество всех людей, которые имеют автомобиль», тогда $A \setminus B$ – «множество всех студентов ФФСН, которые не имеют автомобиля», а $B \setminus A$ – «множество людей, которые имеют автомобиль, но не являются студентами ФФСН», т. е. $A \setminus B \ne B \setminus A$.

Заметим, что если A – подмножество множества B, т. е. $A \subset B$, то их разность $A \setminus B = \varnothing$. На рис. 1.8–1.10 приведены диаграммы Эйлера – Венна для двух множеств A и B в случаях, когда соответственно $A \cap B \neq \varnothing$, $B \subset A$ и $A \cap B = \varnothing$. Множеству $A \setminus B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграммы.

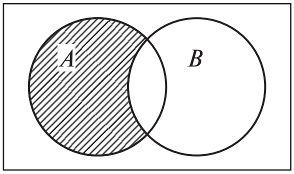


Рис. 1.8

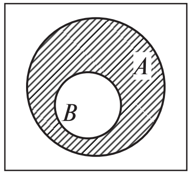


Рис. 1.9

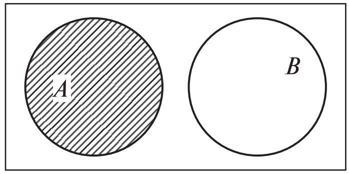


Рис. 1.10

Операция разности множеств обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции вычитания или разности чисел. Но следует обратить внимание на то, что *разность множеств не является операцией, обратной объединению множеств*.

Замечание. *Отметим свойство разности, справедливое для любых множеств A, B и C:*

$$A \setminus B \subset A.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следуют включения

$$(A \setminus C) \subset (B \setminus C) \text{ и } (C \setminus B) \subset (C \setminus A).$$

В частности, для любого множества A имеют место равенства

$$A \setminus A = \varnothing,\ A \setminus \varnothing = A \text{ и } \varnothing \setminus A = \varnothing.$$

Замечание. *Операция разности множеств «несимметрична» относительно множеств A и B в том смысле, что $A \setminus B \neq B \setminus A$. Более того,*

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing.$$

Замечание. *«Вычитание» из множества A множества B сводится к удалению из множества A общей части A и B, т. е. множества $A \cap B$:*

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово СОЦИОЛОГИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем разность этих множеств $A \setminus B$.

Множество A состоит из 7 различных букв:

$$A = \{\text{С, О, Ц, И, Л, Г, Я}\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 6 букв:

$$B = \{\text{Ф, И, Л, О, Г, Я}\}.$$

Разностью $A \setminus B$ этих множеств является набор из двух букв: $A \setminus B$ = {С, Ц}, которые принадлежат множеству A, но не содержатся в множестве $\boldsymbol{B}$.

Определение дополнения множеств. Если $\boldsymbol{U}$ – универсальное множество, содержащее множество A, то разность $\boldsymbol{U} \setminus A$ называется ***дополнением*** множества A и обозначается $\overline{A}$:

$$\overline{A} \overset{def}{=} \{x: x \in \boldsymbol{U} \text{ и } x \notin A\} = \boldsymbol{U} \setminus A.$$

Заметим, что дополнение $\overline{A}$ множества A – это множество элементов фиксированного универсального множества $\boldsymbol{U}$, не входящих в множество A.

Например, если $\boldsymbol{U}$ – множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, то дополнением множества всех рациональных чисел будет множество всех иррациональных чисел.

Универсальное множество $\boldsymbol{U}$ представляется обычно прямоугольником на плоскости, а множество A – круг, лежащий внутри него (рис. 1.11). На рис. 1.12 дополнению множества A, т. е. множеству $\overline{A}$, соответствует заштрихованная часть этого прямоугольника.

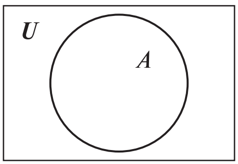


Рис. 1.11

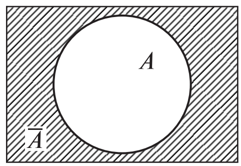


Рис. 1.12

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово СОЦИОЛОГИЯ». Найдем дополнение A, т. е. множество $\overline{A}$.

Множество A состоит из 7 различных букв: A = {С, О, Ц, И, Л, Г, Я}.

Поскольку в русском алфавите 33 буквы, то дополнением $\overline{A}$ является следующее множество, состоящее из 26 букв, среди которых нет букв, составляющих множество A:

$\overline{A}$ = {А, Б, В, Д, Е, Ё, Ж, ..., Ш, Щ, Ъ, Ь, Ы, Э, Ю}.

Замечание. *Отметим следующие свойства дополнения, справедливые для любого множества A и содержащего его универсального множества* $\boldsymbol{U}$:

$$A \cup \overline{A} = \boldsymbol{U} \text{ и } A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

$$\overline{\overline{A}} = A \text{ – закон двойного дополнения, } \overline{\varnothing} = \boldsymbol{U},\ \overline{\boldsymbol{U}} = \varnothing.$$

Замечание. *Выделим также свойство дополнения для включения множеств, т. е. если* $A \subset B$, *то* $\overline{B} \subset \overline{A}$ *или* $\boldsymbol{U} \setminus B \subset \boldsymbol{U} \setminus A$.

Замечание. *Разность множеств A и B можно выразить через пересечение множеств A и* $\overline{B}$, *а именно* $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, *т. е. разность множеств* $A \setminus B$ *есть пересечение множества A и дополнения множества B.*

Определение симметрической разности. ***Симметрической разностью*** множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \Delta B$ и состоящее из элементов, которые принадлежат лишь одному из двух множеств, т. е. либо только A, либо только B:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Например, A – «множество всех социологов, проводящих анкетирование традиционно на бумажных бланках», B – «множество всех социологов, проводящих анкетирование при помощи компьютера», тогда $A \Delta B$ – «множество всех социологов, которые проводят анкетирование на бланке, но не проводят анкетирование на компьютере или множество всех социологов, которые проводят анкетирование на компьютере, но не проводят анкетирование на бланках».

Рассмотрим диаграммы Эйлера – Венна для симметрической разности двух множеств A и B в случаях, когда соответственно $A \cap B \neq \varnothing$, $A \subset B$ и $A \cap B = \varnothing$ (рис. 1.13–1.15). Множеству $A \Delta B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграммы.

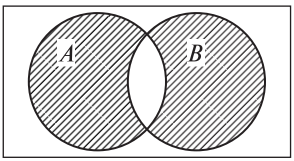


Рис. 1.13

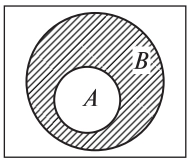


Рис. 1.14

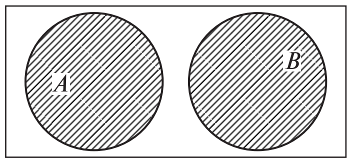


Рис. 1.15

Замечание. *Если множества A и B не пересекаются, т. е.* $A \cap B = \varnothing$, *тогда*

$$A \Delta B = A \cup B.$$

Замечание. *Симметрическую разность можно вычислять, в частности, следующим образом:*

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Замечание. *Отметим следующие свойства симметрической разности:*

$$A \Delta A = \varnothing,\ A \Delta \varnothing = A,\ \varnothing \Delta A = A.$$

Замечание. *Для любых двух множеств A и B выполняется* ***свойство коммутативности*** *операции симметрической разности:*

$$A \Delta B = B \Delta A.$$

Замечание. *Для любых трех множеств A, B и C выполняется* ***свойство ассоциативности*** *для операции симметрической разности:*

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C.$$

Замечание. *При чередовании операций пересечения и симметрической разности для любых трех множеств A, B и C выполняется* ***свойство дистрибутивности*** *одной операции относительно другой:*

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

Напомним, что в числовых примерах есть аналог дистрибутивности умножения относительно сложения, но нет дистрибутивности сложения относительно умножения.

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово СОЦИОЛОГИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем симметрическую разность этих множеств $A \Delta B$.

Множество A состоит из 7 различных букв:

$$A = \{\text{С, О, Ц, И, Л, Г, Я}\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 6 букв:

$$B = \{\text{Ф, И, Л, О, Г, Я}\}.$$

Симметрическая разность множеств A и B состоит из 3 букв: $A \Delta B = \{$С, Ц, Ф$\}$, которые принадлежат разностям $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

Симметрическая разность множеств A и B состоит их тех элементов, которые принадлежат в точности одному из этих множеств. В определении симметрической разности, по существу, используется связка ***исключающее или***.

В заключение рассмотрим в следующем примере все вышеописанные операции над множествами: пересечение, объединение, разность и симметрическая разность.

Пример. Пусть A – «множество студентов отделения “Социология” ФФСН», а B – «множество студентов, обучающихся на ФФСН». Опишем множества: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{A}$.

Получим следующие множества:

$A \cap B$ – «множество студентов отделения “Социология” ФФСН»;

$A \cup B = B$ – «множество студентов, обучающихся на ФФСН»;

$A \setminus B = \varnothing$;

$B \setminus A$ – «множество студентов ФФСН отделений “Психология”, “Философия”, “Социальная работа” и “Социальные коммуникации”»;

$A \Delta B = B \setminus A$ – «множество студентов ФФСН отделений “Психология”, “Философия”, “Социальная работа” и “Социальные коммуникации”»;

$\overline{A}$ – «множество студентов ФФСН отделений “Психология”, “Философия”, “Социальная работа” и “Социальные коммуникации”». В качестве универсального множества рассмотрели множество B, т. е. $\boldsymbol{U} = B$.

Пример. Множество всех студентов отделения «Социология» является объединением следующих трех множеств: A – «множество всех успевающих студентов», B – «множество всех девушек», C – «множество всех неуспевающих юношей». Опишем множества, входящие в равенства законов дистрибутивности:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Ясно, что каждый студент отделения «Социология» принадлежит хотя бы одному из указанных множеств. Заметим, что множества A и B имеют общие элементы: успевающие девушки входят и в первое, и во второе множество.

Поскольку $B \cap C = \varnothing$, то $A \cup (B \cap C) = A \cup \varnothing = A$. С другой стороны, $A \cup B$ – «множество всех успевающих студентов и всех девушек», $A \cup C$ – «множество всех успевающих студентов и всех неуспевающих юношей», следовательно, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ – «множество всех успевающих студентов», т. е. это множество A. В этом примере для множеств A, B и C справедливы равенства

$$A \cup (B \cap C) = A = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Поскольку $B \cup C$ – «множество всех девушек и всех неуспевающих юношей», то $A \cap (B \cup C)$ – «множество всех успевающих девушек», с другой стороны, так как $A \cap C = \varnothing$, то $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap B$ – «множество всех успевающих девушек». В этом примере для множеств A, B и C справедливы равенства

$$A \cap (B \cup C) = A \cap B = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Посчитаем число элементов $n(A \cup B)$ объединения множеств A и B в случае, когда их пересечение не пусто, т. е. если $A \cap B \neq \varnothing$.

Утверждение. Для произвольных конечных множеств A и B число элементов объединения этих множеств

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Эта формула следует из того факта, что когда число элементов множества A суммируется с числом элементов множества B, то элементы, принадлежащие множеству $A \cap B$, учитываются дважды. Чтобы повторяющие элементы не учитывались, их необходимо удалить.

Пример. В группе 25 человек изучают английский язык, 10 человек – немецкий, а 5 человек – одновременно английский и немецкий языки. Сколько студентов изучают английский или немецкий язык?

Решение. Пусть A – «множество студентов, изучающих английский язык», B – «множество студентов, изучающих немецкий язык». Тогда, в силу предыдущего утверждения, количество студентов, изучающих английский или немецкий языки,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 25 + 10 - 5 = 30.$$

Пример. Социолог опросил 100 граждан. По данным этого социологического опроса, 75 граждан посещают государственные медицинские учреждения, 60 – коммерческие, а 45 граждан – одновременно и государственные, и коммерческие медицинские учреждения, в зависимости от вида лечения. Сколько граждан посещают государственные или коммерческие медицинские учреждения?

Решение. Пусть A – «множество граждан, посещающих государственные медицинские учреждения», B – «множество граждан, посещающих коммерческие медицинские учреждения», $A \cup B$ – «множество граждан, посещающих государственные или коммерческие медицинские учреждения». Тогда, в силу предыдущего утверждения, найдем

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 75 + 60 - 45 = 90.$$

Замечание (*Законы де Моргана* (*законы двойственности*)). *Обратим внимание на свойство дополнения от объединения множеств, т. е. справедливость равенства вида*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ *или* } \boldsymbol{U} \setminus (A \cup B) = (\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B),$$

а также на свойство дополнения от пересечения множеств, т. е. справедливость равенства вида

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ *или* } \boldsymbol{U} \setminus (A \cap B) = (\boldsymbol{U} \setminus A) \cup (\boldsymbol{U} \setminus B).$$

Пример. В группе из 40 студентов 25 человек изучают английский язык, 10 – немецкий, а 5 человек – одновременно английский и немецкий языки. Сколько студентов не изучают ни английский, ни немецкий язык?

Решение. Пусть A – «множество студентов, изучающих английский язык», B – «множество студентов, изучающих немецкий язык», а универсальное множество $\boldsymbol{U}$ – это группа из 40 студентов. Тогда множество студентов, не изучающих ни английский, ни немецкий язык, равно пересечению дополнений $\overline{A} \cap \overline{B}$ или $(\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B)$. В силу свойства дополнения для объединения множеств имеем

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \text{ или } (\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B) = \boldsymbol{U} \setminus (A \cup B).$$

Напомним, что, по решению предыдущего примера, число студентов группы, изучающих английский или немецкий язык, равно $n(A \cup B) = 30$. Поэтому так как

$$n((\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B)) = n(\boldsymbol{U} \setminus (A \cup B)) = 40 - 30 = 10$$

или

$$n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = 40 - 30 = 10,$$

то всего 10 студентов группы не изучают эти иностранные языки.

Рассмотрим, как в случае пересечения конечных множеств A, B и C посчитать число элементов множества $A \cup B \cup C$. Если просуммировать количество элементов в каждом множестве A, B и C, то количество элементов некоторых подмножеств будет учтено дважды. Если вычесть число элементов множеств $A \cap B$, $A \cap C$ и $B \cap C$, т. е. $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$ и $n(B \cap C)$ соответственно, из числа элементов $n(A \cup B \cup C)$, то элементы множества $A \cap B \cap C$ совсем не будут учтены.

Поэтому если к указанной разности добавить $n(A \cap B \cap C)$, то каждый элемент множества $A \cup B \cup C$ будет учтен ровно один раз. Таким образом, получаем следующую формулу:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) -$$
$$- n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

В частности, пользуясь этой формулой, можно решить задачу о трех языках, сформулированную в конце раздела 1.2.

Начнем, как всегда, с обозначений. Пусть A – «множество учащихся, изучающих английский язык», B – «множество учащихся, изучающих немецкий язык», C – «множество учащихся, изучающих французский язык» и $\boldsymbol{U}$ – «множество всех учащихся лицея». По условию задачи $n(\boldsymbol{U}) = 100$, $n(A) = 50$, $n(B) = 23$, $n(C) = 30$, $n(A \cap B) = 20$, $n(A \cap C) = 8$, $n(B \cap C) = 10$, $n(A \cap B \cap C) = 5$. По предыдущей формуле для числа элементов $n(A \cup B \cup C)$ имеем

$$n(A \cup B \cup C) = 50 + 23 + 30 - 20 - 8 - 10 + 5 = 70.$$

Напомним, что в отчете инспектора сказано, что каждый из 100 учащихся изучает хотя бы один из трех языков. Получили противоречие $100 \neq 70$. Аналогичным образом посчитаем, *сколько учащихся*, *согласно инспектору*, *изучают только один немецкий язык*:

$$\begin{gathered} n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = \\ = 23 - 20 - 10 + 5 = -2. \end{gathered}$$

Опять нелепость! Можно сделать вывод о том, что проверка была проведена плохо или совсем не проводилась, а инспектор неудачно взял произвольные числа.

Исторические сведения
(наивная теория множеств)

Первый набросок теории множеств принадлежит Бернарду Больцано – «Парадоксы бесконечного», 1850. В 1870 г. немецкий математик Георг Кантор разработал свою программу стандартизации математики, в рамках которой любой математический объект должен был оказываться тем или иным «множеством». Этот подход изложен в двух его статьях, опубликованных в 1879–1897 гг. в известном немецком журнале Mathematische Annalen. Например, натуральное число, по Кантору, следовало рассматривать как множество, состоящее из единственного элемента другого множества, называемого «натуральным рядом», который, в свою очередь, сам представляет собой множество, удовлетворяющее так называемым аксиомам Пеано. При этом общему понятию «множества», рассматриваемому им в качестве центрального для математики, Кантор давал мало что определяющие формулировки вроде «множество есть многое, мыслимое как единое» и т. д. Это вполне соответствовало умонастроению самого Кантора, подчеркнуто называвшего свою программу не теорией множеств (этот термин появился позднее), а учением о множествах.

Программа Кантора вызвала резкие протесты со стороны многих современных ему крупных математиков. Особенно выделялся своим непримиримым отношением к ней Леопольд Кронекер, полагавший, что математическими объектами могут считаться лишь натуральные числа и то, что к ним непосредственно сводится (известна его фраза о том, что «бог создал натуральные числа, а все прочее – дело рук человеческих»). Полностью отвергли теорию множеств и такие авторитетные математики, как Герман Шварц и Анри Пуанкаре. Тем не менее другие крупные математики – в частности, Готлоб Фреге, Рихард Дедекинд и Давид Гильберт – поддержали Кантора в его намерении перевести всю математику на теоретико-множественный язык. В частности, теория множеств стала фундаментом теории меры и интеграла, топологии и функционального анализа.

1.4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ В АНКЕТИРОВАНИИ И ПРИ ИЗУЧЕНИИ СОЦИАЛЬНЫХ ГРУПП

1. На множестве может существовать либо не существовать отношение порядка типа «больше – меньше», «лучше – хуже», «более высокого уровня – более низкого уровня». Соответственно, выделяются упорядоченные и неупорядоченные множества. Например, порядок элементов отсутствует во множестве полового диморфизма (поэтому если 0 означает женский пол, а 1 – мужской пол, то это не значит, что женский хуже, чем мужской, хотя $1 > 0$), а вот множество «очень плохой, плохой, хороший, очень хороший» упорядочено по возрастанию значения элементов.

Пусть x, y – пара элементов множества X. Если $x \leq y$ либо $y \leq x$, будем говорить, что эти элементы сравнимы, иначе они несравнимы.

Отношение порядка будем называть также *упорядочением* или *ранжировкой*. Очевидно, что на одном и том же множестве могут быть заданы различные отношения порядка. Это важно по той причине, что данные, значениями которых являются ранжировки, в социологии часто встречаются, например, когда респонденту предлагается упорядочить по важности какие-либо ценности.

Пример. Определим, можно ли установить отношение порядка на множестве или на его подмножестве.

На какой срок Вы строите жизненные планы?

1. На длительную перспективу (более 5 лет).
2. На период от 3 до 5 лет.
3. На период в 2–3 года.
4. На период до 1 года.
5. Не планирую, живу сегодняшним днем.
6. Затрудняюсь ответить.

Здесь $1 < 2 < 3 < 4 < 5$ по отношению «беспечность» и $1 > 2 > 3 > 4 > 5$ по отношению «предусмотрительность»; по любому из этих отношений 6 несравнимо ни с одной из других позиций.

Пример. Как связано содержание Вашей работы с уровнем Вашего образования и квалификации? Мое образование и квалификация:

1. Выше, чем того требует выполняемая мной работа.
2. Примерно соответствует выполняемой мной работе.
3. Ниже, чем того требует выполняемая мной работа.
4. Не связано с выполняемой мной работой.
5. Затрудняюсь ответить.

По отношению «уровень образования и квалификации по отношению к выполняемой работе» $1 > 2 > 3$; 4 и 5 несравнимы между собой и с 1, 2, 3.

2. Число элементов симметрической разности, т. е. $n(A \Delta B)$, может служить количественной мерой различия между множествами.

Пример. Пусть в трех последовательно проведенных анкетных опросах задавался следующий вопрос с соответствующими вариантами ответов.

Опрос 1	Опрос 2	Опрос 3
Какие из перечисленных качеств наиболее важны для современного специалиста?		
Ответственность	Ответственность	Компетентность
Коммуникабельность	Компетентность	Коммуникабельность
Мобильность	Коммуникабельность	Трудолюбие
Самостоятельность	Мобильность	Мобильность
	Исполнительность	Самостоятельность

Между какими двумя последовательными опросами различия в вариантах ответов больше?

Решение. Рассмотрим опрос 1 и обозначим множество ответов на него через A, множество ответов на опрос 2 – через B, а множество ответов на опрос 3 – через C, получаем $A \Delta B$ = {самостоятельность, исполнительность, компетентность}, тогда $n(A \Delta B) = 3$; $A \Delta C$ = {ответственность, трудолюбие, компетентность}, тогда $n(A \Delta C) = 3$. Наконец $B \Delta C$ = {самостоятельность, исполнительность, ответственность, трудолюбие}, тогда $n(B \Delta C) = 4$. Таким образом, между вторым и третьим последовательными опросами различия в вариантах ответов больше, а в обеих парах A, B и A, C множества отличаются друг от друга на 3 элемента.

1.5. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

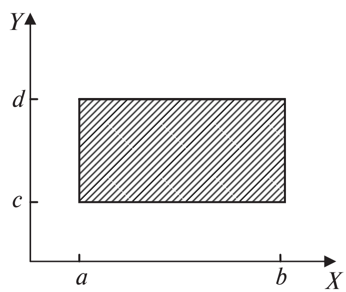
Пусть даны два множества A и B, которые могут как совпадать, так и нет.

Декартовым произведением двух множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар элементов, первый из которых принадлежит множеству A, а второй – множеству B. Обозначается декартово произведение $A \times B$.

Например, пусть $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$, тогда $A \times B = \{(a, a); (a, c); (b, a); (b, c)\}$.

Упражнение. Обладает ли декартово произведение свойством коммутативности, т. е. выполняется ли равенство $A \times B = B \times A$?

Например, если множества A и B – числовые интервалы, то декартово произведение $A \times B$ представляет собой прямоугольник, сторонами которого являются множества A и B. Изобразим декартово произведение $[a, b] \times [c, d]$.



Если $A = B$, то допустимо писать $A \times A$, и в этом случае результатом произведения будет квадрат. Если R – множество действительных чисел, то $R \times R$ – множество точек плоскости.

Аналогично определяется декартово произведение большего числа множеств: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Отметим, что элементами нового множества являются всевозможные упорядоченные наборы элементов, содержащие ровно по одному представителю каждого из перемножаемых множеств. Такие наборы в общем случае принято называть ***кортежами*** и обозначать $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Примером, когда социолог встречается с подобным множеством, может служить анкетный опрос. Так, если анкета содержит n закрытых вопросов и A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – множество предлагаемых ответов на поставленный вопрос, то декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ представляет собой множество вариантов заполнения анкеты. Число возможных вариантов заполнения анкеты находится так: пусть $n(A_1) = m_1$, $n(A_2) = m_2$, ..., $n(A_n) = m_n$, тогда $n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ (эту формулу примем без доказательства).

В математике для обозначения какой-либо связи между переменными или понятиями часто пользуются термином «отношение». Бинарные отношения, т. е. отношения между двумя элементами какого-либо множества, являются основным инструментом моделирования и исследования социальных отношений.

Бинарным отношением на множестве A назовем некоторое подмножество R множества $A \times A$.

При этом будем говорить, что элемент a находится в бинарном отношении R с элементом b, если a и b принадлежат A и $(a, b) \in R$, и обозначается aRb.

Содержательный смысл этого формального определения состоит в том, что для задания бинарного отношения достаточно задать или знать список пар элементов, находящихся в данном отношении. На практике же социолог работает с качественным определением отношения, и никто ему готового списка не даст. Множество, формально определяющее бинарное отношение, надо еще построить. Для решения этой задачи необходимо сначала записать его на языке математики.

Пример. Пусть имеется некоторое подмножество натуральных чисел $A = \{1, 2, 4\}$ и пусть на нем задано отношение «быть делителем». Число x является делителем числа y, если число y делится на x без остатка. Это качественное определение. Известно, что число x будет являться делителем числа y, если последнее представимо в виде $y = nx$, где n – натуральное число. Это уже формализованное определение, которое позволяет построить множество, задающее отношение «быть делителем»: $R = \{(x, y): y = nx\} = \{(1, 1); (1, 2); (1, 4); (2, 2); (2, 4); (4, 4)\}$.

Для формализации социальных отношений, где элементами являются отдельные индивиды, надо иметь еще некоторую дополнительную информацию или анкету об этих индивидах, которую можно записать в виде кортежа $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим несколько примеров бинарных отношений.

1. Отношение «быть младше». Индивид x младше индивида y, если он родился позже. Это качественное определение. Для того чтобы определить, кто младше, достаточно знать дату рождения каждого – dx и dy соответственно. Отметим, что у младшего дата рождения должна быть больше, тогда формализованное определение «быть младше» имеет следующий вид: $R = \{(x, y): dx > dy\}$.

2. Отношение «быть родственником». Родственные отношения – это связь между людьми, основанная на происхождении от общего предка. Однако такое определение оказывается слишком широким. Поэтому приходится вводить понятие степени родства. В этом случае для каждого индивида x и y кортеж представляет собой множество всех прародителей до k-го колена включительно, т. е. $P_k(x)$, $P_k(y)$. Два индивида будут родственниками k-й степени, если их соответствующие множества прародителей содержат хотя бы одного общего предка, т. е. $P_k(x) \cap P_k(y) \neq 0$.

Упражнение. Дайте формальное определение бинарного отношения «быть однокурсником».

Открытое задание
«РАЗНЫЕ ВЗГЛЯДЫ НА ОТНОШЕНИЯ...»

Бинарным отношением назовем некоторое подмножество R множества $A \times A$. При этом будем говорить, что элемент a находится в бинарном отношении R с элементом b, если a и b принадлежат A и (a, b) принадлежит R.

1. Проанализируйте, являются ли бинарными следующие отношения: «быть одноклассником», «быть старше».

2. Приведите от трех до пяти примеров бинарных отношений, с которыми вы встречались в повседневной жизни. Каждый пример должен отражать определенную сферу вашей жизни: семья, друзья, учеба и т. д.

3. Состоите ли вы в каких-нибудь бинарных отношениях? В каких бинарных отношениях вы бы хотели состоять?

Свойства бинарных отношений. Отношение эквивалентности. Анализировать бинарные отношения можно через выявление тех свойств, которыми обладают или не обладают рассматриваемые отношения. Рассмотрим наиболее важные свойства.

1. Бинарное отношение R на множестве A будем называть ***рефлексивным***, если для всех элементов из этого множества имеет место xRx. Из рассмотренных примеров отношения «быть родственником», «быть делителем» являются рефлексивными. Отношение «быть старше» этим свойством не обладает.

2. Бинарное отношение R на множестве A будем называть ***симметричным***, если из xRy следует yRx.

Из рассмотренных примеров отношение «быть родственником» является симметричным. Отношения «быть делителем» и «быть старше» этим свойством не обладают.

3. Бинарное отношение R на множестве A будем называть ***транзитивным***, если из выполнения условий xRy и yRz следует, что xRz.

Транзитивными являются отношения «быть делителем» и «быть старше». Родственные отношения свойством транзитивности не обладают. Если отец и сын и, соответственно, сын и мать (жена отца) находятся в близких родственных отношениях, то отсюда не следует, что муж и жена – близкие родственники.

Упражнение. Какими из вышеперечисленных свойств обладает бинарное отношение «быть одноклассником»?

Выявление свойств отношений, выполняющихся для любых множеств, позволяет классифицировать эти отношения и выделять целые классы отношений, обладающих общими свойствами. Такие классы образуют классы *эквивалентности*. Понятие эквивалентности в том или ином виде присутствует во всех без исключений научных дисциплинах и используется для выявления элементов, близких по своим характеристикам.

Бинарное отношение R на множестве A будем называть отношением ***эквивалентности*** (эквивалентностью), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Для произвольного $y \in A$ множество всех x, эквивалентных y, называется ***классом эквивалентности***. Любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают, т. е. любая эквивалентность определяет разбиение множества A на непересекающиеся классы.

Если в качестве множества A возьмем множество респондентов, заполнивших анкету с закрытыми вопросами, то одинаковые ответы на некоторые из вопросов определят эквивалентность. Можно привести в пример такие отношения эквивалентности, как «состоять в одной партии», «иметь одинаковый пол» и т. п.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Раньше, когда обработка анкет производилась вручную, часто приходилось их сортировать, складывая в отдельные пачки анкеты с одинаковыми ответами на некоторые из вопросов. Эта операция приводила к разбиению множества заполненных анкет на классы эквивалентности.

2. Пусть группа студентов из 30 человек сдала экзамен со следующими результатами:

«отлично» – 7;

«хорошо» – 12;

«удовлетворительно» – 6;

«неудовлетворительно» – 5.

Если ввести отношение «получить одинаковую оценку», то данное отношение будет эквивалентностью и группа студентов окажется разбитой на четыре класса: «отличники», «хорошисты», «троечники» и «двоечники».

Если возьмем отношение «родиться в одном году», то множество жителей города будет разбито на классы ровесников.

Открытое задание на обобщение темы занятия «ФОРМУЛА ЛЮБВИ»

Изучив понятия «бинарное отношение на множестве» и «эквивалентность на множестве», выполните следующие задания и ответьте на вопросы.

1. Между членами семьи существуют отношения родства, которые можно выразить словами: «быть мужем», «быть братом» и т. д. Множество M – множество членов вашей семьи. Укажите всевозможные отношения на множестве M.

2. Бинарные отношения могут задаваться формулой. Формула

$$x + y = \text{любовь}$$

задает бинарное отношение на множестве людей. Этому отношению принадлежит любая пара людей, между которыми существует любовь. Придумайте свою формулу, задающую бинарное отношение.

3. В какой еще форме, на ваш взгляд, можно представить бинарное отношение? Какая форма представления бинарных отношений вам понравилась больше и почему?

Примеры решения задач

1. Задайте множество способом перечисления его элементов:

а) множество A – «множество дней недели»;

б) множество B – «множество основных арифметических действий».

Решение. а) Множество A = {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье};

б) множество B = {сложение, вычитание, умножение, деление}.

2. Задайте множества из задачи **1**, указывая только характеристические свойства их элементов.

Решение. Указанные множества A и B можно задать следующим образом:

а) $A = \{a$: a – день недели$\}$;

б) $B = \{b$: b – арифметические действия$\}$.

3. Перечислите элементы множеств, заданных с помощью характеристического свойства:

а) множество корней квадратного уравнения $X = \{x: x^2 - 2x - 15 = 0\}$;

б) множество $X = \{x$ – натуральное число: $-4 < x \le 3\}$.

Решение. а) Множество $X = \{-3, 5\}$;

б) множество $X = \{1, 2, 3\}$.

4. Перечислите элементы множества $A = \{a$ – натуральное число: $-5 < a \le 5\}$, заданного с помощью характеристического свойства.

Решение. Имеем множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5. Выпишем все подмножества заданных конечных множеств:

а) подмножествами двухэлементного множества $\{1, 3\}$ являются четыре множества: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$;

б) подмножествами трехэлементного множества $\{0, 1, 4\}$ являются восемь множеств: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{4\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 4\}$, $\{1, 4\}$, $\{0, 1, 4\}$;

в) подмножествами двухэлементного множества $\{\{0\}, 1\}$ являются четыре множества: $\varnothing$, $\{\{0\}\}$, $\{1\}$, $\{\{0\}, 1\}$.

6. Верны ли следующие включения и вложения:

а) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$;

б) $\{2, 5\} \subset \{1, 2, 5, 7\}$?

Решение. а) Нет, не верно, так как в множестве $A = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$ нет элемента $\{1, 2\}$. Множество A содержит четыре элемента: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3\}$, 1 и 2;

б) да, верно, так как множество $\{2, 5\}$ – это подмножество множества $\{1, 2, 5, 7\}$.

7. Совпадают ли следующие множества: множество $A = \{\{0, 1\}, 2\}$ и множество $B = \{0, 1, 2\}$?

Решение. Нет, не совпадают, так как множество A состоит из двух элементов: $\{0, 1\}$ и 2, а множество B – из трех: 0, 1, 2.

8. Для каждых двух из следующих множеств укажите, является ли одно из них подмножеством другого:

$A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, $D = \{\{1\}, 2, 3\}$, $E = \{3, 2, 1\}$, $F = \{\{1, 2\}, 3\}$.

Решение. $A \subset B$, $A \subset C$, $A \subset E$; $B \subset C$, $B \subset E$; $C \subset E$.

9. Пусть заданы два множества A и B, где $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

Решение. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \setminus B = \{5\}$, $B \setminus A = \{1, 2\}$, $A \Delta B = \{5, 1, 2\}$.

10. По заданным промежуткам A и B на числовой прямой определите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, где $A = (0; 2]$, $B = (2; 9)$.

Решение. $A \cup B = (0; 9)$; $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = (0; 2]$, $B \setminus A = (2; 9)$.

11. Пусть A – множество людей с гуманитарным образованием, B – множество людей с математическим образованием. Найдите $A \Delta B$.

Решение. Воспользуемся формулой $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Сначала найдем $A \setminus B$ – множество людей, имеющих только гуманитарное образование и не имеющих математического образования, затем $B \setminus A$ – множество людей, имеющих только математическое образование и не имеющих гуманитарного образования. Тогда $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – множество людей, имеющих только гуманитарное образование или только математическое образование.

12. Дано множество $A = \{1, 2, 3, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Укажите, какие из следующих выражений являются элементами заданного множества A, а какие – его подмножествами: 2, $\{2\}$, $\{1, 2\}$,$\{1, 3\}$, $\{1, \{1\}\}$, $\{\{1\}\}$, $\{1, \{2\}\}$, $\{1, 2, \{1, 2\}\}$.

Решение. 2 – это элемент; $\{2\}$ – подмножество; $\{1, 2\}$ – и элемент, и подмножество; $\{1, 3\}$ – подмножество; $\{1, \{1\}\}$ – подмножество; $\{\{1\}\}$ – тоже подмножество; $\{1, \{2\}\}$ – ни элемент, ни подмножество; $\{1, 2, \{1, 2\}\}$ – подмножество.

13. Доказать, что $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

Решение. Множество $\{\varnothing\}$ имеет один элемент, а именно $\varnothing$. Множество $\varnothing$ не имеет элементов, следовательно, эти множества не равны, т. е. $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

14. Опишите следующие множества: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, где A – «множество студентов-социологов – «отличников» группы», B – «множество студентов-социологов – «хорошистов» группы».

Решение. $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B$ – «множество «отличников» и «хорошистов» группы», $A \setminus B$ – «множество студентов-социологов «отличников» группы», $B \setminus A$ – «множество студентов-социологов «хорошистов» группы».

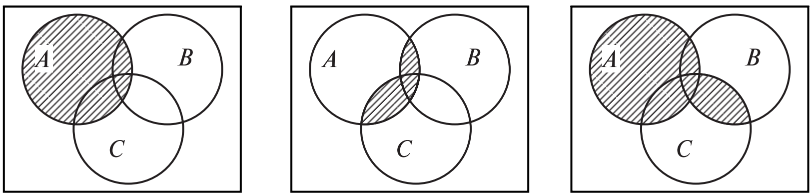
15. Заштрихуйте на кругах Эйлера – Венна ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству:

а) $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$;

б) $A \cap (B \cup C)$;

в) $A \cup (B \cap C)$.

Решение.



а *б* *в*

16. Докажите равенство множеств $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

Доказательство. По определению равенства множеств $A \cup B$ и $A \cup (B \setminus A)$ надо доказать справедливость двух включений

$$A \cup B \subset A \cup (B \setminus A) \text{ и } A \cup (B \setminus A) \subset A \cup B.$$

а) Докажем первое включение $A \cup B \subset A \cup (B \setminus A)$. Пусть $x \in A \cup B$, тогда по определению объединения множеств $x \in A$ или $x \in B$.

Если $x \in A$, то по свойству объединения $x \in A \cup (B \setminus A)$.

Если $x \in B$, то возможны два случая: $x \in A$ или $x \notin A$. Первый случай, т. е. $x \in A$, рассмотрен выше. Второй случай, т. е. $x \notin A$, по определению разности множеств означает, что $x \in B \setminus A$. Тогда по свойству объединения получим $x \in (B \setminus A) \cup A$, а по закону коммутативности операции объединения последнее соотношение означает, что $x \in A \cup (B \setminus A)$.

Таким образом, первое включение доказано.

б) Докажем второе включение $A \cup (B \setminus A) \subset A \cup B$. Пусть $x \in A \cup (B \setminus A)$, тогда по определению объединения множеств $x \in A$ или $x \in B \setminus A$.

Если $x \in A$, то по свойству объединения $x \in A \cup B$.

Если $x \in B \setminus A$, то по свойству разности $x \in B$ и по свойству объединения получим $x \in B \cup A$. Тогда по закону коммутативности операции объединения последнее соотношение означает, что $x \in A \cup B$.

Таким образом, второе включение тоже доказано, что означает справедливость равенства $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

17. Докажите равенство множеств $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

Доказательство. По определению равенства множеств $A \setminus B$ и $A \setminus (A \cap B)$ надо доказать справедливость двух включений

$$A \setminus B \subset A \setminus (A \cap B) \text{ и } A \setminus (A \cap B) \subset A \setminus B.$$

а) Докажем первое включение $A \setminus B \subset A \setminus (A \cap B)$. Пусть $x \in A \setminus B$, тогда по определению разности множеств $x \in A$ и $x \notin B$.

Заметим, что по свойству пересечения множеств так как $A \cap B \subset B$, то по свойству дополнения для включения множеств из включения $A \cap B \subset B$ следует включение $\overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ или $\boldsymbol{U} \setminus B \subset \boldsymbol{U} \setminus (A \cap B)$, т. е. если $x \notin B$, то $x \notin A \cap B$.

Поэтому из того, что $x \in A$ и $x \notin B$, следует, что $x \in A$ и, в силу замеченного, $x \notin A \cap B$. Следовательно, $x \in A \setminus (A \cap B)$.

Таким образом, первое включение доказано.

б) Докажем второе включение $A \setminus (A \cap B) \subset A \setminus B$. Пусть $x \in A \setminus (A \cap B)$, тогда по определению разности множеств $x \in A$ и $x \notin A \cap B$.

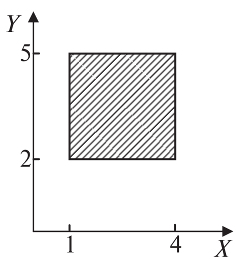
Заметим, что по свойству дополнения от пересечения множеств $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ или $\boldsymbol{U} \setminus (A \cap B) = (\boldsymbol{U} \setminus A) \cup (\boldsymbol{U} \setminus B)$, т. е. если $x \notin A \cap B$, то $x \notin A$ или $x \notin B$.

Поэтому из того, что $x \in A$ и $x \notin A \cap B$, следует, что $x \in A$ и, в силу сделанного замечания, $x \notin A$ или $x \notin B$. Тогда отсюда вытекает, во-первых, $x \in A$ и $x \notin A$, что влечет за собой $x \in A$ и $x \in \overline{A}$, а так как по свойству дополнения $A \cap \overline{A} = \varnothing$, то $x \in \varnothing$ и, во-вторых, $x \in A$ и $x \notin B$, что по определению разности множеств можно записать как $x \in A \setminus B$.

Таким образом, второе включение тоже доказано, что означает справедливость равенства $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

18. Пусть заданы два множества $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Найдите декартовы произведения $A \times B$, $A \times A$, $B \times A$.

Решение. $A \times B = \{(1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 3); (2, 4); (2, 5)\}$, $A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2)\}$, $B \times A = \{(3, 1); (3, 2); (4, 1); (4, 2); (5, 1); (5, 2)\}$.



19. Найдите $A \times B$, если $A = [1; 4]$, $B = [2; 5]$.

Решение. $A \times B = \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$. Это множество точек плоскости, которые лежат в прямоугольнике $ABCD$, где $A(1; 2)$; $B(1; 5)$; $C(4; 5)$; $D(4; 2)$.

20. Социолог исследует способности у 300 студентов. Оказалось, что 120 студентов преуспевают в математике, 90 – в музыке, 80 – в спорте. Кроме того, было обнаружено, что 40 студентов преуспевают как в математике, так и в музыке, 30 – как в музыке, так и в спорте, 40 – как в математике, так и в спорте. И только 10 студентов преуспели сразу в трех областях. Найдите количество студентов, которые преуспевают только в одной из областей. Сколько студентов вообще не преуспевают ни в одной области?

Решение. Введем следующие обозначения: A – «множество учащихся, преуспевающих в математике», B – «множество учащихся, преуспевающих в музыке», C – «множество учащихся, преуспевающих в спорте» и $\boldsymbol{U}$ – «множество всех студентов». По условию задачи $n(\boldsymbol{U}) = 300$, $n(A) = 120$, $n(B) = 90$, $n(C) = 80$, $n(A \cap B) = 40$, $n(A \cap C) = 40$, $n(B \cap C) = 30$, $n(A \cap B \cap C) = 10$. По предыдущей формуле для числа элементов найдем количество студентов, преуспевающих хотя бы в одной из описанных областей $n(A \cup B \cup C)$:

$$n(A \cup B \cup C) = 120 + 90 + 80 - 40 - 40 - 30 + 10 = 190.$$

Таким образом, количество студентов, которые вообще не преуспевают ни в одной области, равно: $n(\boldsymbol{U} \setminus (A \cup B \cup C)) = 300 - 190 = 110$.

Посчитаем количество студентов, преуспевающих только в математике:

$$n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 120 - 40 - 40 + 10 = 50.$$

Посчитаем количество студентов, преуспевающих только в музыке:

$$n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 90 - 40 - 30 + 10 = 30.$$

Посчитаем количество студентов, преуспевающих только в спорте:

$$n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 80 - 40 - 30 + 10 = 20.$$

Таким образом, количество студентов, которые преуспевают только в одной из областей, $50 + 30 + 20 = 100$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Задайте множество X – «множество корней квадратного уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$» способом перечисления его элементов.

2. Задайте множество X – «множество корней квадратного уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$» с помощью указания характеристических свойств его элементов.

3. Составьте список элементов множества, заданного с помощью характеристического свойства элементов:

а) множество $X = \{x$ – натуральное число: $x < 7\}$;

б) множество $X = \{x$ – натуральное число: $|x| < 4\}$.

4. Проверьте, совпадают ли множества $A = \{\{1, 3\}, 2\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$.

5. Выясните, справедливо ли включение: $\{1, 2\} \subset \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$.

6. Пусть A – «множество студентов ФФСН, прогуливающих занятия по высшей математике», а B – «множество студентов ФФСН, надеющихся сдать экзамен по высшей математике». Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

7. Даны множества $A = \{1, 2, 4, 8, 10\}$, $B = \{2, 3, 8, 12\}$. Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

8. Даны множества $A = \{0, 3, 4, 5, 15\}$; $B = \{1, 3, 8, 10\}$; $C = \{1, 2, 4, 8, 10, 15\}$. Найдите максимальный элемент множества $(A \setminus B) \cup (B \cap C)$.

9. По заданным промежуткам $A = (-2; 2]$ и $B = [0; 5)$ на числовой прямой определите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

10. Существуют ли такие множества A, B, C, что $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

11. Опишите множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$:

а) A – «множество студентов-социологов – отличников группы» и B – «множество студентов ФФСН»;

б) A – «множество успевающих студентов-социологов» и B – «множество юношей-социологов»;

в) A – «множество отличников – заочников-социологов» и B – «множество девушек – заочниц-социологов».

12. Даны следующие числовые множества: $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{2, 5, 6, 11, 12\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 9, 12\}$. Найдите множества, которые будут получены в результате выполнения следующих операций:

а) $(C \setminus B) \cap A$;

б) $B \setminus (A \cap C)$;

в) $(C \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

13. Докажите равенство $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

14. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера – Венна множества $A \cap \overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup B$.

15. Если $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, то могут ли выполняться следующие равенства: $A \cup B = \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$?

16. Выпишите все подмножества множества $A = \{1, \{2, \{3\}\}\}$.

17. Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая соответствует множеству $C \setminus (B \setminus A)$, где A, B и C – три произвольных пересекающихся множества.

18. На курсах иностранных языков учатся 600 человек, из них французский изучают 220 человек, английский – 270 человек, причем те, кто изучает английский, не изучают немецкий язык; только французский изучают 100 человек, только немецкий – 180 человек. Сколько человек изучают по два иностранных языка? Сколько человек изучают один иностранный язык?

19. Среди студентов первого курса проводилось анкетирование по любимым телесериалам. Самыми популярными оказались три сериала: «Звездный путь», «Игра престолов», «Друзья». Всего в группе 38 человек. «Звездный путь» выбрал 21 студент, среди которых 3 назвали еще «Игру престолов», 6 – «Друзья», а 1 написал все три сериала. Сериал «Игра престолов» назвали 13 студентов, среди которых 5 выбрали сразу два сериала. Сколько человек выбрали сериал «Друзья»?

20. Многие студенты любят футбол, баскетбол и волейбол. А некоторые – даже два или три из этих видов спорта. Была опрошена группа студентов. Известно, что 6 студентов играют только в волейбол, 2 – только в футбол, 5 – только в баскетбол. Только в волейбол и футбол умеют играть 3 студента, в футбол и баскетбол – 4, в волейбол и баскетбол – 2. Один студент умеет играть во все игры, 7 не умеют играть ни в одну. Найдите:

а) сколько всего было опрошено студентов;

б) сколько человек умеют играть в футбол;

в) сколько человек умеют играть в волейбол.

21. Каждый из 35 шестиклассников является читателем по крайней мере одной из двух библиотек: школьной и районной. Из них 25 человек берут книги в школьной библиотеке, 20 – в районной. Сколько шестиклассников:

а) являются читателями обеих библиотек;
б) не являются читателями районной библиотеки;
в) не являются читателями школьной библиотеки;
г) являются читателями только районной библиотеки;
д) являются читателями только школьной библиотеки?

22. В группе 30 человек. 20 из них каждый день пользуются метро, 15 – автобусом, 23 – троллейбусом, 10 – и метро, и троллейбусом, 12 – и метро, и автобусом, 9 – и троллейбусом, и автобусом. Сколько человек ежедневно пользуются всеми тремя видами транспорта?

23. В НИИ работает 67 человек. Из них 20 человек знают французский язык, 47 – английский, 35 – немецкий, 23 – немецкий и английский, 12 – английский и французский, 11 – немецкий и французский, а все три языка знают 5 человек. Сколько человек не знают ни английского, ни немецкого, ни французского?

24. Из 100 студентов изучают только немецкий 18 человек, немецкий и французский – 8, немецкий – 26, французский – 48, французский и испанский – 8, все три языка – 5, никакого языка не изучают 24 человека. Сколько студентов изучают:

а) только испанский язык;
б) немецкий и испанский, но не французский;
в) французский, только в том случае, если они не изучают испанский;
г) испанский язык?

25. Определите, можно ли установить отношение порядка на множестве ответов на вопросы социологической анкеты: *Когда Вы или члены Вашей семьи нуждаетесь в лечении*, *то куда Вы обычно обращаетесь?*

1. Только в государственные медицинские учреждения.
2. Только в частные медицинские учреждения.
3. И в государственные, и в частные, в зависимости от того, какое лечение требуется.
4. Не обращаюсь в медицинские учреждения.
5. Затрудняюсь ответить.

26. Пусть в трех последовательно проведенных анкетных опросах задавался следующий вопрос с соответствующими вариантами ответов.

Опрос 1	Опрос 2	Опрос 3
Кого из перечисленных ниже телеведущих Вы знаете?		
Андрей Малахов	Андрей Малахов	Гарик Мартиросян
Дана Борисова	Гарик Мартиросян	Дана Борисова
Ксения Собчак	Дана Борисова	Максим Галкин
Иван Ургант	Ксения Собчак	Ксения Собчак
	А. В. Масляков-старший	Иван Ургант

Между какими двумя последовательными опросами различия в вариантах ответов больше?

27. Пусть заданы два множества $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 9\}$. Найдите декартовы произведения $A \times B$, $A \times A$, $B \times A$.

28. Найдите $A \times B$, если $A = [-2; 3]$, $B = [1; 4]$.

29. Докажите, что отношение «быть ровесником» является отношением эквивалентности.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое множество? Приведите примеры множеств. Назовите способы задания множества.
2. Какие множества называются конечными, бесконечными? Приведите соответствующие примеры.
3. Как определяется пустое множество? Является ли пустое множество конечным?
4. Какое множество называется одноточечным? Чем одноточечное множество отличается от элемента множества?
5. Дайте определение подмножества множества A. Какие два множества называются равными?
6. Назовите известные вам числовые множества.
7. Что такое объединение двух множеств? Приведите пример. Изобразите объединение двух множеств на диаграммах Эйлера – Венна. Перечислите свойства операции объединения.
8. Что такое пересечение двух множеств? Приведите пример. Изобразите пересечение двух множеств на диаграммах Эйлера – Венна. Перечислите свойства операции пересечения.
9. Что такое разность двух множеств? Приведите пример. Изобразите разность двух множеств на диаграммах Эйлера – Венна. Перечислите свойства операции разности.
10. Что такое симметрическая разность двух множеств? Запишите две формулы для нахождения симметрической разности. Как используется симметрическая разность в социологических исследованиях?
11. Что такое декартово произведение двух множеств? Дайте определение кортежа. Приведите примеры использования социологами кортежей.
12. Какие отношения называются бинарными? Приведите примеры бинарных отношений.
13. Перечислите свойства бинарных отношений.
14. Дайте определение отношения эквивалентности. Приведите примеры использования отношения эквивалентности в социологических исследованиях.

РАЗДЕЛ II

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ

2.1. МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1.1. Понятие матрицы. Виды матриц

Матрицы находят широкое применение в задачах, изучающих зависимости между различными социально-экономическими показателями. Матричная форма записи используется для компактности записи большого числа элементов, помогает структурировать социологическую информацию. Весьма удобным и полезным математическим аппаратом является матричный метод в социологических исследованиях. Особенно важны матрицы при разработке и использовании баз данных, в которых вся информация хранится и обрабатывается в матричной форме.

Определение матрицы. ***Матрицей*** A называется система $m \times n$ элементов, расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов.

Заметим, что элементами матрицы могут быть числа, алгебраические или символьные выражения.

Обозначения матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца (числа i и j называют индексами элемента).

Джеймс Джозеф Сильвестр

Матрицу, имеющую m строк и n столбцов, называют матрицей размера $m \times n$ (читается «эм на эн»).

Употребляется и более короткое обозначение матрицы размера $m \times n$:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ или } A = [a_{ij}]_{mn}.$$

Например, запишем матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$. Это матрица размера 2×3, а элемент a_{22} равен (-4).

Матрица A, состоящая лишь из одной строки, называется ***строчной матрицей*** или ***матрицей-строкой***:

$$A = (a_{11} \;\; a_{12} \;\; \ldots \;\; a_{1n}).$$

Матрица A имеющая лишь один столбец, называется ***столбцевой матрицей*** или ***матрицей-столбцом***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой матрицей*** и обозначается буквой O, тогда по определению

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратной матрицей называется та, у которой число строк равно числу столбцов $m = n$, т. е. матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Порядком квадратной матрицы называется число ее строк (или столбцов).

Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ее ***главную диагональ***, а элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}$ – ***побочную диагональ***.

Квадратная матрица первого порядка отождествляется со своим единственным элементом. Выпишем квадратные матрицы первого, второго и третьего порядков:

$$(a_{11}), \;\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \;\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется ***симметрической***, если равны ее элементы, симметричные относительно главной диагонали. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Упражнение. Приведите пример симметрической матрицы третьего порядка.

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю, т. е. матрица

$$diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Она обозначается буквой E. Так, единичные матрицы второго и третьего порядков имеют вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Треугольной матрицей называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Различают соответственно верхнюю и нижнюю треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2.1.2. Операции над матрицами и их свойства

Две матрицы A и B называются ***равными*** $A = B$, если они одинаковых размеров и их соответствующие элементы равны, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, ..., m;$ $j = 1, 2, ..., n)$.

Линейными операциями над матрицами называются сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число. Сложение и вычитание определяются только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m \times n}$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц слагаемых, т. е.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \, (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n).$$

Сумма двух матриц обозначается $C = A + B$.

Пример. Найдите $C = A + B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$.

Решение. Находим по определению

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-2) & 6+4 \\ 2+3 & -4+7 \\ -3+8 & 9+(-11) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Разностью двух матриц $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{m\times n}$ называется матрица $D = (d_{ij})_{m\times n}$, элементы которой равны разности соответствующих элементов этих матриц, т. е.

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}\,(i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n).$$

Разность двух матриц имеет обозначение $D = A - B$.

Пример. Найдите $D = A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$.

Решение. По определению

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-2) & 6-4 \\ 2-3 & -4-7 \\ -3-8 & 9-(-11) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ***на число*** α называется матрица $\alpha A = (\alpha \cdot a_{ij})_{m\times n}$, т. е. матрица, полученная из данной матрицы умножением всех ее элементов на число α.

Пример. Найдите матрицу $(-2A)$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение. $(-2A) = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 & -2\cdot 6 \\ -2\cdot 2 & -2\cdot(-4) \\ -2\cdot(-3) & -2\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ -4 & 8 \\ 6 & -18 \end{pmatrix}$.

Матрицу $(-1)A$ называют матрицей, ***противоположной*** матрице A, и обозначают $-A$.

Замечание. *Разность двух матриц $A - B$ можно определить так*: $A - B = A + (-B)$.

Линейные операции над матрицами обладают следующими ***свойствами***.

Пусть A, B и C – матрицы одинакового размера $m \times n$, O – нулевая матрица, $(-A)$ – матрица, противоположная A, а α и β – любые действительные числа. Тогда справедливы следующие свойства:

- $A + B = B + A$ (*коммутативность сложения матриц*);
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*ассоциативность сложения матриц*);
- $A + O = A$;
- $A + (-A) = O$;
- $1A = A$;
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Таким образом, многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами.

Докажем, например, что $A + B = B + A$. Известно, что $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$, а $B + A = (b_{ij} + a_{ij})_{m\times n}$ ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$), а так как $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, то $A + B = B + A$.

Пусть даны две матрицы A и B. Произведение матриц определено только для согласованных матриц. Матрица A называется ***согласованной*** с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Произведением матрицы A размера $m \times n$ ***на матрицу*** B размера $n \times k$ называется такая матрица C размера $m \times k$, у которой элементы c_{ij} определяются формулой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj},$$

где $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., k$, т. е. элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B. Матрица C имеет m строк (как и матрица A) и k столбцов (как матрица B). Произведение матрицы A на матрицу B имеет обозначение AB.

Замечание. *Из того, что A можно умножать на B, не следует, что B можно умножать на A.*

Если для матриц A и B определены произведения AB и BA, то в общем случае $AB \neq BA$.

Так, умножение матрицы A размера 3×3 на матрицу B размера 3×2 дает

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{pmatrix},$$

тогда как произведение BA не определено.

В случае, если $AB = BA$, матрицы A и B называются ***перестановочными***.

Упражнение. Приведите пример перестановочных матриц.

Пример. Найдите, если это возможно, произведения AB и BA, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Произведение AB имеет смысл, поскольку число столбцов матрицы A равно трем и равно числу строк матрицы B. Размер матрицы A равен 2×3, размер матрицы B равен 3×2, тогда размер матрицы AB равен 2×2 и $AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.

Найдем элементы искомой матрицы

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 4(-1) + (-5)(-2) + 8 \cdot 3 = -4 + 10 + 24 = 30,$$
$$c_{12} = a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 4 \cdot 5 + (-5)(-3) + 8 \cdot 4 = 20 + 15 + 32 = 67,$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 1(-1) + 3(-2) + (-1) \cdot 3 = -1 - 6 - 3 = -10,$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 1 \cdot 5 + 3(-3) + (-1) \cdot 4 = 5 - 9 - 4 = -8.$$

Таким образом, $AB = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$.

Проверим, можно ли получить произведение BA. Поскольку число столбцов матрицы B равно двум и равно числу строк матрицы A, произведение BA имеет смысл. Вычислим его:

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матриц

Если имеют смысл соответствующие произведения матриц, то справедливы следующие ***свойства умножения матриц***:

- $(AB)C = A(BC)$;
- $(A + B)C = AC + BC$;

- $C(A+B)=CA+CB$;
- $\alpha(AB)=(\alpha A)B$;
- $AE=EA=A$;
- $AO=OA=O$.

Целой положительной степенью A^k ($k>1$) квадратной матрицы A называется произведение k матриц, каждая из которых равна A, т. е.

$$A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k\ раз}.$$

Матрица A^k имеет тот же порядок, что и матрица A.

Упражнение. Верно ли утверждение «произведение двух ненулевых матриц может быть нулевой матрицей»?

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется ***транспонированной*** относительно данной. Матрица, транспонированная относительно матрицы A, обозначается через A^T. Пусть дана исходная матрица A:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно определению, матрица, транспонированная относительно матрицы A, имеет вид

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что если A – матрица размера $m\times n$, то матрица A^T имеет размеры $n\times m$.

Операция нахождения матрицы, транспонированной к данной, называется ***транспонированием матрицы***. Для операции транспонирования матрицы справедливы следующие свойства:

- $(A^T)^T=A$;
- $(\alpha A)^T=\alpha A^T$;
- $(A+B)^T=A^T+B^T$;
- $(AB)^T=B^TA^T$.

Пример. Если $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Замечание. *Матрица называется* ***симметрической****, если* $A^T=A$.

2.1.3. Определители и их свойства

Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Понятие определителя матрицы вводится только для квадратных матриц.

Определение определителя матрицы. Каждой квадратной матрице ставится в соответствие по определенному правилу действительное число, которое называется ***определителем*** (детерминантом) матрицы и обозначается $|A|$, $\det A$, Δ.

Если порядок матрицы равен единице, то эта матрица состоит из одного элемента a_{11}, т. е. $A = (a_{11})$, тогда ***определителем первого порядка***, соответствующим такой матрице, назовем величину этого элемента

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

Определителем квадратной матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называют число, равное $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$, т. е.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Здесь и всюду в дальнейшем будем говорить об элементах, строках и столбцах определителя $|A|$, имея в виду элементы, строки и столбцы соответствующей ему матрицы A.

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называют ***элементами определителя*** матрицы второго порядка. Правило составления определителя второго порядка по элементам соответствующей матрицы A: ***определителем второго порядка*** называют число, равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

Пример. Вычислите определители следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 7\cdot 8 - 6\cdot 1 = 50,\ \ \det B = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 5\cdot 10 - 1(-4) = 50 + 4 = 54.$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка

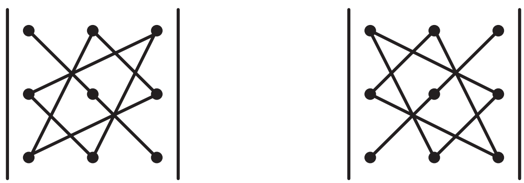
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Заметим, что каждое слагаемое алгебраической суммы в правой части представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца с соответствующим знаком. Чтобы легче было запомнить, какие произведения берутся со знаком плюс, а какие – со знаком минус, можно воспользоваться правилом, представленным схематически ниже.



«+» «–»

Правило треугольников: три положительных члена определителя представляют собой произведения элементов главной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали; три отрицательных члена определителя представляют собой произведения элементов побочной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны второй диагонали.

Определитель третьего порядка состоит из 6 = 3! (3! = 1 · 2 · 3, читается «три факториал») слагаемых, каждое из которых есть произведение трех элементов определителя. Элементы произведения каждого слагаемого берутся по одному из каждой строки и каждого столбца.

Пример. Вычислите определитель следующей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&-4\\2&6&-1\\3&5&-8\end{vmatrix}=1\cdot6\cdot(-8)+2\cdot(-1)\cdot3+(-4)\cdot2\cdot5-((-4)\cdot6\cdot3+$$

$$+2\cdot2\cdot(-8)+1\cdot5\cdot(-1))=-48-6-40-(-72-5-32)=-94+109=15.$$

Определители матриц второго и третьего порядка будем называть ***определителями второго и третьего порядка***.

Вычисление определителей более высоких порядков довольно трудоемко. При практическом вычислении определителей используется свойство понижения порядка, позволяющее вычислить определитель n-го порядка через определитель $(n-1)$-го порядка. В свою очередь, определитель $(n-1)$-го порядка вычисляется через определитель $(n-2)$-го порядка и т. д.

Минором элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель порядка $n-1$, соответствующий той матрице, которая получается из данной матрицы вычеркиванием i-й строки и j-го столбца (той строки и того столбца, на пересечении которых стоит данный элемент). Минор элемента a_{ij} обозначим через M_{ij}.

Пример. Рассмотрим определитель $\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$. Минором элемента a_{12} является $M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$, а минором элемента a_{23} является $M_{23}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется число $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Таким образом, алгебраическое дополнение и минор одного и того же элемента либо совпадают, либо противоположны. Например, $A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=-M_{23}$.

Пример. Рассмотрим определитель $\begin{vmatrix}1&0&-2\\3&1&0\\7&-1&5\end{vmatrix}$. Для него найдем A_{12} и A_{22}:

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=-1\cdot\begin{vmatrix}3&0\\7&5\end{vmatrix}=-1\cdot(3\cdot5-0\cdot7)=-15,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=\begin{vmatrix}1&-2\\7&5\end{vmatrix}=1\cdot5-(-2)\cdot7=19.$$

Определителем n-го порядка матрицы A называют число, равное

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Это сумма всех произведений элементов первой строки на соответствующие им алгебраические дополнения.

Последняя формула выражает правило составления определителя n-го порядка по элементам первой строки соответствующей ему матрицы и по алгебраическим дополнениям этих элементов, которые являются определителями $(n-1)$-го порядка, взятыми с надлежащими знаками.

Равенство для определителя третьего порядка можно записать так:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Возникает вопрос, нельзя ли использовать для получения величины определителя элементы и соответствующие им миноры не первой, а любой строки матрицы, а также вопрос о разложении определителя по элементам любого столбца. Ответ на эти вопросы дают следующие основные теоремы, приводимые здесь без доказательства.

Теорема. Определитель матрицы n-го порядка равен сумме произведений элементов любой ее строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.

Таким образом, справедливы следующие формулы:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad \left(i = \overline{1,n}\right),$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Особенно удобно разложить определитель по элементам строки (столбца), если в ней много нулей.

Упражнение. Докажите, что определитель диагональной матрицы равен произведению диагональных элементов.

При решении задач используются ***свойства определителей***, которые облегчают их вычисление. Рассмотрим свойства определителей без доказательств, демонстрируя их на примере определителя второго порядка.

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется: $\det A = \det A^T$.

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = |A|.$$

2. При перестановке двух соседних строк или столбцов определитель меняет лишь знак:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ba = 0.$$

4. Множитель, общий для всех элементов некоторой строки (столбца), можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0a_{22} - 0a_{21} = 0.$$

6. Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

7. Значение определителя не изменится, если к элементам его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число k:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + ka_{21}a_{22} - a_{12}a_{21} - ka_{22}a_{21} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

8. Если каждый элемент строки (столбца) определителя равен сумме двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у одного из которых соответствующая строка (столбец) составлена из первых слагаемых, а у другого – из вторых; элементы же, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим без доказательства следующую теорему.

Теорема. Определитель произведения двух квадратных матриц A и B одного порядка равен произведению определителей перемножаемых матриц:

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

На практике часто пользуются следующим способом вычисления определителей: *применяя свойства определителей*, *добиваются*, *чтобы в какой-либо строке* (*столбце*) *определителя стало как можно больше нулей*, *а затем полученный определитель можно разложить по этой строке* (*столбцу*).

Пример. Вычислите определитель матрицы четвертого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

1-й способ:

Разложим данный определитель, например по элементам 3-й строки:

$$\det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} = a_{31}(-1)^4 \cdot M_{31} + a_{32}(-1)^5 \cdot M_{32} +$$

$$+ a_{33}(-1)^6 \cdot M_{33} + a_{34}(-1)^7 \cdot M_{34} = 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1) \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 36 - 2 \cdot 2 - 4 - 4 \cdot 11 = 56.$$

2-й способ:

Данный определитель можно найти, используя свойства определителей. Вычтем из четвертой строки первую, а из третьей – утроенную первую и получим

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Разложим данный определитель по элементам первого столбца, поскольку первый столбец содержит наибольшее количество нулей:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -4 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -4 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -2 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из последнего столбца удвоенный первый, а затем разложим полученный определитель по третьему столбцу

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -4 & -10 & 0 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = 4\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -10 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 4\cdot(24-10) = 56.$$

Итак, значение определителя равно 56.

Исторические сведения

Отметим, что определители были изобретены дважды, а это в математике встречается не так уж часто. Сначала – без глубокой теории, но с хорошими правилами практического применения – еще в начале нашей эры в Древнем Китае. Ученые этой страны еще тогда обладали глубокими и обширными знаниями из разных областей науки и техники, в том числе и математики. Но, к сожалению, на развитие мировой науки они не оказали большого влияния, так как старались скрывать свои открытия от других народов. В результате то, что было открыто или изобретено китайцами, вновь открывалось или изобреталось в других странах. Так было с бумагой, порохом, фарфором. Так получилось и с определителями и решением уравнений с их помощью. В XVII в. метод решения уравнений с помощью определителей заново изобрел великий немецкий ученый Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716). Лейбниц стремился во всех исследованиях к обобщениям, единым методам. В частности, он хотел создать единообразный метод решения систем линейных уравнений, что и привело его к определителям.

2.1.4. Обратная матрица

Квадратная матрица называется ***невырожденной***, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрица называется ***вырожденной***.

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка, а E – единичная квадратная матрица того же порядка.

Определение обратной матрицы. Квадратная матрица A^{-1} называется ***обратной*** к квадратной матрице A, если она удовлетворяет условиям

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Теорема. Если обратная матрица существует, то она единственна.

Доказательство. Пусть A_1^{-1} и A_2^{-1} – обратные матрицы к матрице A. Покажем, что $A_1^{-1} = A_2^{-1}$. Действительно,

$$A_1^{-1} = A_1^{-1}E = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = EA_2^{-1} = A_2^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной.

Доказательство

Необходимость. Пусть для матрицы A существует обратная матрица. Тогда из соотношения $AA^{-1} = E$ следуют равенства $|A|\cdot|A^{-1}| = |A^{-1}A| = |E| = 1$, т. е. $|A| \neq 0$. Отсюда, в частности, следует, что

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Достаточность. Возьмем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

такую, что $|A| \neq 0$. Покажем, что A имеет обратную матрицу.

Рассмотрим матрицу B вида

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

в i-м столбце которой расположены алгебраические дополнения элементов i-й строки матрицы A. Матрица B называется ***присоединенной*** к матрице A.

Перемножим матрицы A и B:

$$AB = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = |A|E.$$

Следовательно, $A\left(\frac{1}{|A|}B\right) = E.$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}B.$$

Теорема доказана.

Из последней формулы вытекает ***алгоритм построения обратной матрицы***: необходимо составить присоединенную матрицу B, а затем каждый ее элемент разделить на число $|A|$.

Таким образом, у всякой невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, определяемая формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A. Заметим, что алгебраические дополнения элементов i-й строки матрицы A расположены в i-м столбце матрицы A^{-1}.

Заметим, *что вырожденная матрица не имеет обратной*.

Далее рассмотрим некоторые свойства обратной матрицы, которые часто используются при решении задач, будем их принимать без доказательства.

Свойства обратной матрицы

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Пример. Найдите обратную матрицу A^{-1} к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

***Решение*.** Сначала вычислим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - (-3)\cdot(-1) = 8 - 3 = 5.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, значит, данная матрица невырожденная, т. е. имеет обратную матрицу. Далее находим алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot|4| = 4,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot|-1| = 1,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot|-3| = 3,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot|2| = 2.$$

Определяем A^{-1} по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Убедимся в том, что матрица A^{-1} найдена верно. Для этого вычислим AA^{-1} и $A^{-1}A$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot\frac{4}{5}+(-3)\cdot\frac{1}{5} & 2\cdot\frac{3}{5}+(-3)\cdot\frac{2}{5} \\ -1\cdot\frac{4}{5}+4\cdot\frac{1}{5} & -1\cdot\frac{3}{5}+4\cdot\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично убедитесь, что $A^{-1}A = E$.

2.1.5. Использование матриц при решении задач с экономическим и социологическим содержанием

Пример. Данные о доходах холдинговой компании по трем областям трех компаний за 2016 и 2018 гг. в тыс. ден. ед. представлены в матрицах A и B:

$$A = \begin{pmatrix} 550 & 680 & 340 \\ 2000 & 330 & 170 \\ 2200 & 240 & 600 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 600 & 800 & 350 \\ 2300 & 500 & 250 \\ 2000 & 950 & 600 \end{pmatrix}.$$

Здесь элемент a_{ij} матрицы A означает доход i-й компании в j-й области за 2016 г., а элементы матрицы B – за 2018 г. Вычислите матрицу C прироста доходов за период с 2016 по 2018 г. и проанализируйте ее. Рассчитайте матрицу $C_{\text{ср}}$, характеризующую средние размеры приростов доходов компаний холдинга за год.

Решение. Матрица приростов доходов за рассматриваемый период равна

$$C = B - A = \begin{pmatrix} 600-550 & 800-680 & 350-340 \\ 2300-2000 & 500-330 & 250-170 \\ 2000-2200 & 950-240 & 600-600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 120 & 10 \\ 300 & 170 & 80 \\ -200 & 710 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы C выражают изменение доходов с 2016 по 2018 г. Так, третья компания по первой области потерпела убытки в размере 200 тыс. ден. ед., так как $c_{31} = -200$, эта же компания по третьей области не принесла доходов, так как $c_{33} = 0$.

Матрица $C_{\text{ср}}$, характеризующая средние размеры приростов доходов компаний холдинга за год, равна матрице C, деленной на количество лет в рассматриваемом периоде:

$$C_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 50 & \frac{1}{2}\cdot 120 & \frac{1}{2}\cdot 10 \\ \frac{1}{2}\cdot 300 & \frac{1}{2}\cdot 170 & \frac{1}{2}\cdot 80 \\ \frac{1}{2}(-200) & \frac{1}{2}\cdot 710 & \frac{1}{2}\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 60 & 5 \\ 150 & 85 & 40 \\ -100 & 355 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример. В социально-экономической сфере широко используются матрицы, моделирующие территориально-экономические связи между районами страны. Такая матрица должна быть квадратной. Элемент a_{ij} указанной матрицы выражает объем рассматриваемого вида продукции, произведенной в i-м районе и потребленной в j-м. Элементы, стоящие на главной диагонали, показывают объем продукции, которая потребляется в том же районе, где и производится.

Каждая симметрично расположенная относительно главной диагонали пара элементов матрицы (a_{ij} и a_{ji}) характеризует двусторонние транспортно-экономические связи между районами. Сумма элементов, лежащих на главной диагонали, показывает общий объем производства для местных нужд всех районов. Сумма остальных элементов матрицы равна общему объему продукции, перевозимой между районами. Каждая строка данной матрицы $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix}$ характеризует размер производства в одном районе и объем поставок его продукции по остальным районам. Каждый столбец матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

характеризует размеры потребления в одном из районов и его состав по местам производства.

Матрица территориально-экономических связей наглядно моделирует экономические связи, упрощает их анализ и при составлении ряда других, сопряженных с ней матриц, позволяет решать ряд социально-экономических задач по рационализации экономических связей, упорядочению размещения производства и т. д. Выполнение арифметических действий с матрицами открывает возможности для упрощения обработки экономической информации и осуществления расчетов непосредственно по сгруппированным данным.

Пример. Пусть некоторое предприятие выпускает продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix},$$

где каждый элемент a_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2$) показывает, сколько единиц сырья j-го типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $C=\begin{pmatrix}120 & 90 & 150\end{pmatrix}$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) – матрицей-столбцом

$$B=\begin{pmatrix}40\\ 20\end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем общую стоимость сырья, затраченную на производство продукции.

Затраты 1-го сырья составляют $S_1=120\cdot 3+90\cdot 4+150\cdot 5=1470$ ед. и 2-го сырья $S_2=120\cdot 1+90\cdot 2+150\cdot 3=750$ ед., поэтому матрица-строка затрат сырья может быть записана как произведение

$$S=CA=\begin{pmatrix}120 & 90 & 150\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1470 & 750\end{pmatrix}.$$

Тогда общая стоимость сырья $Q=1470\cdot 40+750\cdot 20=73\,800$ ден. ед. может быть записана в матричном виде:

$$Q=SB=(CA)B=\begin{pmatrix}1470 & 750\end{pmatrix}\begin{pmatrix}40\\ 20\end{pmatrix}=73\,800.$$

Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: вначале вычисляют матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции, т. е. матрицу

$$R=AB=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}40\\ 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}140\\ 200\\ 260\end{pmatrix},$$

а затем общую стоимость сырья:

$$Q=CR=C(AB)=\begin{pmatrix}120 & 90 & 150\end{pmatrix}\begin{pmatrix}140\\ 200\\ 260\end{pmatrix}=73\,800.$$

Рассмотренный пример иллюстрирует выполнение ассоциативного закона для произведения матриц: $(CA)B = C(AB)$.

Пример. В социологических исследованиях проводятся исследования возрастного состава населения. Задача состоит в прогнозировании количества населения определенной возрастной группы через фиксированный промежуток времени.

Решение. Разделим все население в году с номером t на $N + 1$ возрастную группу $S_i(t)$ (по одному году рождения в каждой группе). Здесь $S_0(t)$ – число родившихся в течение года с номером t и оставшихся в живых.

Опытным путем были определены коэффициенты P_i дожития в каждой из выделенных групп, т. е. коэффициенты передвижки из возрастной группы с возрастом i лет в группу с возрастом $(i + 1)$ лет. Также найдены коэффициенты F_i рождаемости внутри каждой группы определенного возраста.

С использованием введенных коэффициентов легко вывести следующие равенства:

$$S_0(t+1) = F_0 S_0(t) + F_1 S_1(t) + \ldots + F_N S_N(t),$$

$$S_i(t+1) = P_{i-1} S_{i-1}(t),\ i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$S_N(t+1) = P_{N-1} S_{N-1}(t) + P_N S_N(t).$$

Поясним приведенные формулы:

1) группа нулевого возраста $S_0(t+1)$ образуется из числа детей, родившихся в каждой возрастной группе. Безусловно, коэффициенты рождаемости F_i равны нулю для некоторого количества младших и старших возрастных групп;

2) все промежуточные возрастные группы получаются из групп предыдущего возраста $S_{i-1}(t)$ умножением на коэффициент дожития P_{i-1};

3) самая старшая возрастная группа $S_N(t+1)$ состоит из людей данной группы, доживших до нового года, и людей, перешедших из группы предыдущего возраста.

Удобнее всего работать с данными формулами, если ввести следующие объекты:

1) матрицу-строку $\sigma(t)$ состояния возрастных групп в году t:

$$\sigma(t) = (S_0(t) \quad S_1(t) \quad \ldots \quad S_N(t));$$

2) матрицу коэффициентов перехода π:

$$\pi = \begin{pmatrix} F_0 & P_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ F_1 & 0 & P_1 & 0 & \ldots & 0 \\ F_2 & 0 & 0 & P_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{N-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & P_{N-1} \\ F_N & 0 & 0 & 0 & \ldots & P_N \end{pmatrix}.$$

Тогда возрастную ситуацию через год можно определить равенством

$$\sigma(t+1) = \sigma(t)\pi,$$

а через k лет – равенством

$$\sigma(t+k) = \sigma(t)\pi^k.$$

Здесь используется умножение матрицы-строки $\sigma(t)$ на матрицу π и умножение матрицы π на себя k раз.

Если разделить население не на годовые группы, а на более крупные, то придется ввести еще один вид коэффициентов: Q_i – коэффициент выживших в данной возрастной группе в течение года. Тогда матрица перехода из одной возрастной группы в другую будет выглядеть следующим образом:

$$\pi = \begin{pmatrix} F_0 & P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ F_1 & Q_1 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ F_2 & 0 & Q_2 & P_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{N-2} & 0 \\ F_{N-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & Q_{N-1} & P_{N-1} \\ F_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Q_N \end{pmatrix},$$

так как теперь

$$S_i(t+1) = P_{i-1}S_{i-1}(t) + Q_i(t)S_i(t),\ i = 1, 2, \dots, N-1,$$

т. е. количество людей в определенной возрастной группе получается как сумма тех из них, что перешли из предыдущей группы, и тех, которые выжили в данной группе, но не перешли в следующую.

Пример. Пусть все население разделено на 5 групп: до года, от года до 25 лет, от 26 до 50 лет, от 51 до 75 лет и старше 75 лет. Если начальное состояние

$$\sigma(0) = (2114 \quad 5631 \quad 4957 \quad 3284 \quad 1265)$$

и матрица перехода π имеет вид

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}98 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}9 & 0{,}05 & 0 & 0 \\ 0{,}15 & 0 & 0{,}8 & 0{,}04 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix},$$

то через год мы получим следующую демографическую ситуацию:

$$\sigma(1) = \left(2114 \quad 5631 \quad 4957 \quad 3284 \quad 1265\right)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 0 & 0{,}98 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}9 & 0{,}05 & 0 & 0 \\ 0{,}15 & 0 & 0{,}8 & 0{,}04 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2480 & 7140 & 4247 & 2497 & 1163 \end{pmatrix}.$$

Все числа в последнем равенстве получены умножением строки $\sigma(0)$ на соответствующие столбцы матрицы π. Например, число 7140 человек во второй возрастной группе получилось (с округлением) так:

$$7140 = 2114 \cdot 0{,}98 + 5631 \cdot 0{,}9.$$

Аналогично через 2 года

$$\sigma(2) = \begin{pmatrix} 2672 & 8856 & 3755 & 1918 & 965 \end{pmatrix}$$

и через 3 года

$$\sigma(3) = \begin{pmatrix} 2969 & 10588 & 3447 & 1493 & 769 \end{pmatrix}.$$

Цифры в данном примере не имеют ровно никакого экспериментального подтверждения, но если представить, что ситуация действительно развивается по приведенным данным, то можно сделать вывод о росте населения, но при этом сокращении среднего срока жизни.

Пример. Оценка миграции населения с использованием матриц.

Матрица перераспределения населения между n районами имеет общий вид:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элемент m_{ij} обозначает количество населения, мигрировавшего в течение некоторого фиксированного промежутка времени T из участка с номером i в участок с номером j. Кроме того, подразумевается, что мигрантов в иные районы или из других районов нет.

Если обозначить количество людей, выехавших из участка с номером i (в том числе переместившихся внутри него) через n_i, а количество мигрантов, «осевших» на участке с номером j, через k_j, то

$$n_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \;\text{ и }\; k_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}. \tag{2.1}$$

Таким образом, для вычисления n_i необходимо сложить все числа, находящиеся в строке с номером i, а для нахождения k_j – расположенные в столбце с номером j. Отсюда несложно вывести равенство

$$\sum_{i=1}^{n} n_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \sum_{j=1}^{n} k_j = M.$$

Обозначив через $x_{l,0}$ начальное количество населения, проживавшего в районе l, легко найти количество населения через время T:

$$x_{l,1} = x_{l,0} + k_l - n_l.$$

Если миграция населения подчинена закону

$$m_{ij} = \frac{n_i k_j}{M},$$

то получим так называемое невозмущенное перераспределение. Только в этом случае можно однозначно определить элементы m_{ij} по известным суммам отъезда n_i и прибытия k_j, так как система уравнений (2.1) имеет бесконечное множество решений.

Для оценки миграции населения в общем случае вводится в рассмотрение матрица $V = (v_{ij})$ отклонений от невозмущенного перераспределения по формуле:

$$v_{ij} = m_{ij} - \frac{n_i k_j}{M}.$$

Решение. Рассмотрим ситуацию с четырьмя районами. Предположим, что матрица перераспределения в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} 25 & 32 & 21 & 18 \\ 12 & 15 & 16 & 10 \\ 23 & 9 & 18 & 12 \\ 34 & 6 & 29 & 7 \end{pmatrix}.$$

Здесь, например, число 25 в первой строке первого столбца означает число людей, переехавших в пределах района 1, а число 16 во второй строке третьего столбца – количество населения, переехавшего из района 2 в район 3.

Общее количество переехавших из некоторого района получаем суммированием всех чисел соответствующей строки, а количество приехавших в него – суммированием чисел соответствующего столбца. Так, из района 2 выехало 53 человека $\left(n_2 = 12 + 15 + 16 + 10 = 53\right)$, а въехало в него 62 человека $\left(k_2 = 32 + 15 + 9 + 6 = 62\right)$. Аналогично получаем $n_1 = 96$, $n_3 = 62$, $n_4 = 76$, $k_1 = 94$, $k_3 = 84$, $k_4 = 47$.

Количество всех переехавших в течение исследуемого промежутка времени $M = 287$, что несложно получить, просуммировав все элементы матрицы перераспределения.

Построим матрицу V отклонений от невозмущенного перераспределения. Например, $v_{11} = m_{11} - \frac{n_1 k_1}{M} = 25 - \frac{96 \cdot 94}{287} = -6.$ Числа в матрице округляются до целого значения. Вычислив значения всех элементов данной матрицы, получим

$$V = \begin{pmatrix} -6 & 11 & -7 & 2 \\ -5 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \\ 9 & -10 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Примеры решения задач

1. Найдите матрицу $C = 3A - 4B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $C = 3A - 4B = 3\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 15 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} -$
$- \begin{pmatrix} 4 & -8 & 16 \\ 0 & 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 17 & -1 \\ 0 & -9 & -11 \end{pmatrix}.$

2. Найдите матрицу $C = 4A + 2A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $4A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 20 \end{pmatrix}$, $2A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, $4A + 2A^T = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -2 \\ 12 & 6 & 8 \\ 2 & 10 & 30 \end{pmatrix}$.

3. Найдите AB, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 4 + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 0 & 3\cdot 4 + 0\cdot 3 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}.$$

4. Проверьте, выполняется ли равенство $AB = BA$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+15 & 0-6 \\ 4-5 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+0 \\ 10-8 & 15+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $AB \neq BA$.

5. Найдите A^3, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^3 = AAA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$

6. Найдите матрицу X из уравнения $2A + 2X = 3B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$2X = 3B - 2A = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -13 & 18 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} -1 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & -6{,}5 & 9 \end{pmatrix}.$$

7. Вычислите определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot2 + 1\cdot4\cdot3 + 1\cdot2\cdot(-1) - \big((-1)\cdot5\cdot3 + 2\cdot2\cdot4 + 1\cdot1\cdot2\big) =$$

$$= 20 + 12 - 2 - (-15 + 16 + 2) = 30 - 3 = 27.$$

8. Вычислите определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Для вычисления определителя данной матрицы воспользуемся свойством: определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю – и получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Вычислите определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 4 & 6 & -2\end{pmatrix}$.

Решение. В данной матрице вторая и третья строки пропорциональны, воспользуемся свойством определителя – определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix}3 & 7 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 4 & 6 & -2\end{vmatrix}=0.$$

10. Вычислите определитель четвертого порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix}.$$

Решение. Вычитая из четвертой строки первую, из третьей – удвоенную первую и прибавляя первую строку ко второй, получаем

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0 & 6\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам третьего столбца, поскольку третий столбец содержит наибольшее количество нулей:

$$\Delta=1(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}.$$

Вычтем из первой строки последнего определителя удвоенную вторую и затем разложим полученный определитель по первой строке:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=(-3)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-3\cdot 3=-9.$$

Значение определителя равно –9.

11. Предприятие производит изделия трех видов. При этом используется сырье трех типов. Нормы затрат сырья на единицу изделия каждого вида, себестоимость каждого вида сырья и стоимость его доставки приведены в таблице.

Вид изделия	Тип сырья		
	T_1	T_2	T_3
$И_1$	6	4	2
$И_2$	2	1	0
$И_3$	1	3	5
Себестоимость единицы сырья	4	4	2
Стоимость доставки единицы сырья	1	3	2

Каковы общие затраты предприятия на производство 100 усл. ед. изделий первого вида, 70 усл. ед. второго вида и 50 усл. ед. третьего вида?

Решение. Нормы расходов сырья запишем в виде матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице элементы a_{ij} показывают количество сырья j-го типа на изготовление единицы изделия i-го вида. Пусть матрица C показывает цену единицы сырья и доставки единицы сырья:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Объем производства изделий задается матрицей-столбцом

$$Q = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Чтобы определить общие затраты S на производство изделий данного объема Q, надо знать затраты P на сырье для производства единицы изделия каждого вида и его доставку. Для этого умножим матрицу расходов A на матрицу C^T, полученную из матрицы C транспонированием. Получим

$$P = AC^T = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 22 \\ 12 & 5 \\ 26 & 20 \end{pmatrix}.$$

Тогда суммарные затраты

$$S = Q^T P = \begin{pmatrix} 100 & 70 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 44 & 22 \\ 12 & 5 \\ 26 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6540 & 3550 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общие затраты (это стоимость сырья и его доставки) для осуществления данного объема производства изделий составят $6540 + 3550 = 10\,090$ денежных единиц.

12. Найдите матрицу, обратную к матрице A, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. Находим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 14 \neq 0,$$

следовательно, существует A^{-1}.

Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Определяем A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}.$$

2. Проверяем правильность вычислений, используя равенства $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично проверяем равенство $A^{-1}A = E$.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$.

13. Найдите матрицу X из уравнения: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Воспользуемся формулами $AX = B$, $X = A^{-1}B$.

1. Сначала найдем определитель матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

следовательно, существует обратная матрица A^{-1}.

2. Найдем эту обратную матрицу A^{-1}:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Итак,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. В итоге найдем искомую матрицу:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ 5 & -3\end{pmatrix}$. Вычислите $C=A^2+2B$, $D=3A^T-B^2$, $K=2A^TB^T$.

2. Найдите произведения матриц A и B, где:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 4 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ -5 & 3 & 5\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\ -8\\ 5\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & -5\\ 4 & 3 & -5 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ 3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix}7\\ -8\\ 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

в) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & -5 & 0\\ 4 & -7 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$.

3. Проверьте, выполняется ли равенство $AB=BA$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

4. Даны матрицы A и B. Найдите $A+B$, $A-B$, AB, BA, $3A$, $(BA)^T$, $detA$, $detB$.

а) $A=\begin{pmatrix}i & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -i & 0\\ -1 & 0 & i\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & i\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}i & 0 & 3\\ 1+i & 0 & 6i\\ 2i & 0 & 1+2i\end{pmatrix}$.

5. Решите уравнения:

а) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0;$ г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0;$

б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 5+x \end{vmatrix} = 0;$ д) $\begin{vmatrix} x & x & x \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0.$

в) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 2x \\ 2 & x^2 \end{vmatrix} = 0;$

6. Найдите матрицу X из уравнения $5A-3X = 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Предприятие производит продукцию двух видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, у которой по строкам указано количество сырья, расходуемого на производство единицы продукции вида 1 и 2. Стоимость единицы сырья каждого типа заданы матрицей $B = [70\ \ 30]$. Каковы общие затраты предприятия на производство 100 усл. ед. продукции первого вида и 150 усл. ед. второго вида?

8. Вычислите определители следующих матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix};$ в) $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

б) $B = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix};$ г) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$

9. Вычислите определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, разложив его по элементам: а) 4-й строки; б) 2-го столбца.

10. Докажите, что $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 44.$

11. Покажите, что данные матрицы невырожденные, и найдите матрицы, обратные к данным.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

12. Проверьте, являются ли матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ согласованными.

13. Докажите, что $\left(\dfrac{1}{|A|} B \right) A = E.$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое матрица? Какая матрица называется прямоугольной, квадратной, диагональной, единичной?
2. Какие матрицы называются равными?
3. Всякие ли матрицы можно сложить?
4. Дайте определение транспонированной матрицы. Перечислите ее свойства.
5. Всякие ли матрицы можно перемножить? Какие матрицы можно перемножить и что получится в результате?
6. Если матрицы A и B можно умножать, следует ли из этого, что их можно складывать?
7. Если матрицы A и B можно складывать, следует ли из этого, что их можно умножать?
8. Можно ли умножить квадратную матрицу на неквадратную?
9. Может ли произведение неквадратных матриц быть квадратной матрицей?
10. Могут ли совпадать матрицы A и A^T?
11. Как выглядит матрица $(A^T)^T$?

12. Перечислите свойства сложения матриц.

13. Перечислите свойства умножения матриц.

14. Может ли произведение матриц быть числом?

15. Что такое определитель второго порядка? Третьего порядка?

16. Перечислите свойства определителя.

17. Что такое минор M_{ij} элемента a_{ij} определителя A?

18. Что такое алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определителя A?

19. Что такое обратная матрица?

20. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существование обратной матрицы.

21. Верно ли, что матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A?

2.2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.2.1. Системы *m* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными

Системой m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots \quad + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots \quad + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots \quad + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

где числа a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) называют ***коэффициентами системы***, а числа b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) – ***свободными членами***, j – номер соответствующего неизвестного. Каждый коэффициент системы имеет два индекса, первый из которых i указывает на номер уравнения, а второй j – на номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент.

Если все свободные члены равны нулю, т. е. $b_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то система (2.2) называется ***однородной***.

Однородная линейная система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots \quad + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots \quad + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots \quad + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Если среди свободных членов имеются отличные от нуля, то линейная система называется ***неоднородной***.

Решением линейной системы (2.2) называется упорядоченная совокупность n чисел $c_1, c_2, ..., c_n$, которая при подстановке в каждое из уравнений системы вместо соответствующих переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ ($x_1 = c_1, x_2 = c_2, ..., x_n = c_n$) обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется ***совместной***, а система, не имеющая ни одного решения, – ***несовместной***.

Решить систему – значит определить, совместна она или нет, и в случае совместности найти все ее решения.

Система, имеющая только одно решение, называется ***определенной***, больше одного решения – ***неопределенной***. В случае неопределенной системы каждое ее решение называется ***частным решением*** системы. Совокупность всех частных решений называется ***общим решением***.

Две системы называются ***эквивалентными*** или ***равносильными***, если любое решение одной из них является также решением другой и наоборот, т. е. если они имеют одно и то же множество решений. Любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

Линейную систему (2.2) можно записать в матричном виде. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

составленная из коэффициентов линейных уравнений системы (2.2), называется ***основной матрицей системы*** (или ***матрицей системы***).

Матрица-столбец, составленная из неизвестных:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Матрица-столбец, составленная из свободных членов:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Заметим, что матрица A имеет размер $m \times n$, согласована с матрицей X, имеющей размер $n \times 1$, а значит, можно найти произведение AX:

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots & + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots & + a_{2n}x_n \\ \ldots \quad \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots & + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Так как элементами этой столбцевой матрицы размера $m \times 1$ являются левые части уравнений системы (2.2), то по определению равенства матриц

$$AX = B. \tag{2.4}$$

Таким образом, система линейных уравнений (2.2) может быть записана в виде одного матричного уравнения (2.4). Эта запись системы называется ***матричной***.

Если $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – решение системы (2.2), то матрица $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix}$ называется решением этой системы.

2.2.2. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.5}$$

Матрица A данной системы квадратная. ***Определителем системы*** (2.5) называется определитель матрицы A, составленной из коэффициентов этой системы, обозначим его через Δ, $\Delta = \det A$.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если определитель Δ системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то для матрицы данной системы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, определяемая формулой

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Систему (2.5) можно записать в матричном виде $AX = B$.

Умножим обе части этого равенства слева на обратную матрицу A^{-1} и получим

$$\underbrace{A^{-1}A}_{E}X = A^{-1}B,$$

$$EX = A^{-1}B,$$

тогда

$$X = A^{-1}B.$$

Эта формула является ***матричной записью*** решения системы (2.5).

Пример. Решите систему линейных уравнений при помощи обратной матрицы:

$$\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 4x+5y+6z=9, \\ 7x+8y=-6. \end{cases}$$

***Решение*.** Запишем систему в матричном виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Сначала найдем определитель матрицы A

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}=27.$$

Определитель не равен нулю, значит, данная матрица невырожденная, т. е. имеет обратную. Найдем алгебраические дополнения

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}=-48,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}=24,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}=42,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}=-21,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=6,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}=-3,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix}=6,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-3.$$

Определяем A^{-1} по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Итак,

$$A^{-1}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}-48 & 24 & -3\\ 42 & -21 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\cdot 3\begin{pmatrix}-16 & 8 & -1\\ 14 & -7 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-16 & 8 & -1\\ 14 & -7 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Далее найдем искомую матрицу

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-16 & 8 & -1\\ 14 & -7 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 9\\ -6\end{pmatrix}=\frac{3}{9}\begin{pmatrix}-16 & 8 & -1\\ 14 & -7 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6\\ 3\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 2\end{pmatrix},$$

т. е. $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}.$

2.2.3. Формулы Крамера

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (см. 2.5).

Обозначим через Δ_k определитель, полученный заменой в определителе Δ столбца из коэффициентов при неизвестной x_k столбцом свободных членов системы (2.5), тогда

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n\end{vmatrix}.$$

В 1750 г. швейцарский математик Габриэль Крамер дал общие формулы, выражающие неизвестные системы линейных уравнений через определители, составленные из коэффициентов системы, которые отображены в следующей теореме.

Габриэль Крамер

Теорема (Крамера). Если определитель Δ системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, которое называется ***формулами Крамера***:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Доказательство. Запишем систему (2.5) в матричной форме: $AX = B$. Поскольку определитель Δ матрицы A отличен от нуля, она имеет обратную матрицу A^{-1}. Тогда

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Полученная формула является матричной записью решения системы. Единственность решения следует из единственности обратной матрицы.

Матричное равенство имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$x_1 = \frac{1}{|A|}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n) = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n) = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

....

$$x_n = \frac{1}{|A|}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n) = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

так как $A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \ldots + A_{nk}b_n = \Delta_k$ для всякого $k = \overline{1,n}$. Теорема доказана.

Следствие. Если однородная система имеет ненулевое решение, то ее определитель $\Delta = 0$.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 11. \end{cases}$$

Решение. Составим определитель системы и найдем его:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-7) \cdot 3 = 5 + 21 = 26.$$

Определитель отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение. Вычислим определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-7) \cdot 11 = 1 + 77 = 78,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5 \cdot 11 - 1 \cdot 3 = 55 + 3 = 52.$$

Воспользуемся формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{78}{26} = 3, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{52}{26} = 2.$$

Система имеет единственное решение $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

2.2.4. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855)

Формулы Крамера требуют довольно сложных вычислений (при больших n), связанных с вычислением определителей Δ и Δ_k. Также заметим, что методом Крамера нельзя решить систему, если матрица A данной системы вырожденная. *Для практического решения систем линейных алгебраических уравнений используют метод Гаусса, основанный на последовательном исключении неизвестных и пригодный для решения произвольных линейных систем.* Хотя в настоящее время данный метод повсеместно называется методом Гаусса, он был известен и до К. Ф. Гаусса. Первое известное описание данного метода упоминалось еще в китайском трактате «Математика в девяти книгах», составленном между I в. до н. э. и II в. н. э.

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots & + a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \ldots & + a_{2n}x_n = & b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \ldots & + a_{mn}x_n = & b_m. \end{cases}$$

Матрица

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

полученная из основной матрицы системы добавлением столбца свободных членов, называется ***расширенной матрицей системы***.

Элементарными преобразованиями линейной системы называются следующие преобразования:

1) умножение любого уравнения на число, не равное нулю;

2) прибавление к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженного на любое число, при этом сохраняются остальные уравнения системы, в том числе и то, которое прибавлялось;

3) перестановка местами любых двух уравнений системы;

4) вычеркивание нулевой строки, т. е. строки, у которой все элементы равны нулю.

С помощью таких преобразований каждый раз получается система уравнений, эквивалентная исходной.

Метод Гаусса состоит в приведении исходной системы линейных алгебраических уравнений с помощью элементарных преобразований к эквивалентной ей системе, способ решения которой весьма прост.

Метод Гаусса. Предположим, что $a_{11} \neq 0$ (это всегда можно сделать за счет перестановки уравнений). Ко второму уравнению системы прибавим почленно первое, умноженное на $\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$. Затем к третьему уравнению системы прибавим почленно первое, умноженное на $\left(-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}\right)$. Аналогичным образом преобразуем все остальные уравнения, в результате чего получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots. + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $a'_{ij}, b'_i \ (i = \overline{2,m},\ j = \overline{2,n})$ – новые значения коэффициентов и правых частей.

Предполагая, что $a'_{22} \neq 0$, и оставляя без изменения первые два уравнения системы (2.6), преобразуем ее таким образом, чтобы в каждом из остальных уравнений коэффициент при x_2 превратился в нуль. Продолжая этот процесс, приведем систему (2.6) к одной из систем вида (2.7), (2.8) или (2.9). Вид таких систем называется ***ступенчатым***.

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + & c_{12}x_2 + & c_{13}x_3 + \ldots + & c_{1n}x_n & = d_1, \\ & c_{22}x_2 + & c_{23}x_3 + \ldots + & c_{2n}x_n & = d_2, \\ & & c_{33}x_3 + \ldots + & c_{3n}x_n & = d_3, \\ & & & \ldots & \ldots \\ & & & c_{nn}x_n & = d_n, \end{cases} \tag{2.7}$$

где $c_{kk} \neq 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$); c_{kk} – некоторые новые коэффициенты, d_k – свободные члены.

Система (2.7) имеет единственное решение. Находим из последнего уравнения $x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}}$. Затем, подставляя найденное значение x_n в предпоследнее уравнение системы, находим x_{n-1} и т. д.

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2k}x_k + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{kk}x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k. \end{cases} \tag{2.8}$$

где $k < n$.

Система (2.8) имеет бесконечное множество решений. Придавая свободным переменным $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ произвольные значения, последовательно находим $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1$ из системы

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k = d_1 - c_{1k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{1n}x_n, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2k}x_k = d_2 - c_{2k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{kk}x_k = d_k - c_{k\,k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{kn}x_n. \end{cases}$$

В формулах, выражающих $x_1, x_2, \ldots, x_k$ через $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ могут принимать любые значения.

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + & c_{12}x_2 + & c_{13}x_3 + \ldots + & c_{1n}x_n & = d_1, \\ & c_{22}x_2 + & c_{23}x_3 + \ldots + & c_{2n}x_n & = d_2, \\ & & c_{33}x_3 + \ldots + & c_{3n}x_n & = d_3, \\ & & & \ldots & \ldots \\ & & & 0x_n & = d_k, \end{cases} \tag{2.9}$$

где $k \le n$ и $d_k \neq 0$.

Система (2.9) *несовместна*, т. е. не имеет решений, так последнее равенство не выполняется ни при каких значениях неизвестных.

Отметим, что метод последовательного исключения неизвестных применим к любой системе линейных уравнений. При решении системы методом Гаусса преобразования совершаются не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Замечание. *На практике удобнее работать не с системой* (*2.2*), *а с расширенной матрицей* $\tilde{A}$ *данной системы*, *выполняя все элементарные преобразования над ее строками*. *Удобно*, *чтобы коэффициент был равен* 1 (*для этого нужно переставить местами уравнения системы*, *либо разделить обе части первого уравнения на* $a_{11} \neq 1$).

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 7x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 24, \\ 3x_1 + 12x_2 - 5x_3 = -14, \\ 13x_1 + 16x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & -8 & 9 & 24 \\ 3 & 12 & -5 & -14 \\ 13 & 16 & -1 & -4 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второй строке расширенной матрицы первую строку, умноженную на (–7), к третьей – первую строку, умноженную на (–3), а к четвертой – первую строку, умноженную на (–13), и получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -22 & -12 & 10 \\ 0 & 6 & -14 & -20 \\ 0 & -10 & -40 & -30 \end{array}\right).$$

Четвертую строку разделим на (–10) и поменяем со второй:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -14 & -20 \\ 0 & -22 & -12 & 10 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей строке системы вторую строку, умноженную на (–6), а к четвертой – вторую строку, умноженную на 22, и получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 76 & 76 \\ 0 & 0 & -38 & -38 \end{array}\right).$$

Третья и четвертая строки пропорциональны. Одну из них можно убрать из рассмотрения. Данная система совместна и имеет единственное решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 + 4x_3 = 3, \\ -38x_3 = -38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - (2x_2 + 3x_3), \\ x_2 = -4x_3 + 3, \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, единственное решение имеет вид $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второй строке системы первую строку, умноженную на (–6), к третьей – первую строку, умноженную на 7, а к четвертой – первую строку, умноженную на 3, и получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей и четвертой строкам системы вторую строку, умноженную на 1, и получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Данная система совместна и имеет бесконечное множество решений. Выразим переменные x_1, x_2 через переменные x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 1, \\ 15x_2 = -15x_3 - 19x_4 + 15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 1, \\ x_2 = -x_3 - \dfrac{19}{15}x_4 + 1. \end{cases}$$

Подставим выражение для переменной x_2 в первое уравнение и найдем x_1:

$$x_1 = -2\left(-x_3 - \frac{19}{15}x_4 + 1\right) - 2x_3 - 3x_4 + 1 = 2x_3 + \frac{38}{15}x_4 - 2 - 2x_3 - 3x_4 + 1 = -\frac{7}{15}x_4 - 1.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 - \dfrac{7}{15}x_4 \\ 1 - x_3 - \dfrac{19}{15}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

где x_3, x_4 могут принимать любые действительные значения.

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второй строке системы первую строку, умноженную на (−1), а к третьей – первую строку, умноженную на 2, и получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей строке системы вторую строку, умноженную на (−2). В итоге получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует следующая система, равносильная исходной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ 0x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -13. \end{cases}$$

Эта система уравнений решений не имеет, так как получили уравнение $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -13$, которое не имеет решений.

2.2.5. Математические модели в социально-экономической сфере в виде систем линейных алгебраических уравнений

Пример. Предприятие планирует выпуск продукции трех наименований A_j, $j = 1, 2, 3$, на производство которой требуется три вида ресурсов b_i, $i = 1, 2, 3$. Нормы затрат каждого вида ресурсов на изготовление единицы каждого наименования продукции задаются матрицей A. Найдите допустимый план выпуска продукции (усл. ед.), если предприятие располагает ресурсами в количестве единиц, заданном матрицей B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 190 \\ 140 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Решение. Построим математическую модель данной задачи. Обозначим через x_1, x_2, x_3 количество планируемой к выпуску продукции соответственно первого, второго и третьего наименований. Определение допустимого плана выпуска продукции состоит в нахождении неотрицательного решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 190, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 140, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 120. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом Гаусса. Для этого составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 190 \\ 2 & 1 & 3 & 140 \\ 3 & 2 & 1 & 120 \end{array}\right].$$

Прибавим ко второй строке системы первую строку, умноженную на (–2), а к третьей – первую строку, умноженную на (–3), и получим

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 190 \\ 0 & -5 & -3 & -240 \\ 0 & -7 & -8 & -450 \end{array}\right].$$

Прибавим к третьей строке системы вторую строку, умноженную на $(-7/5)$, и получим матрицу

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 190 \\ 0 & -5 & -3 & -240 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{5} & -114 \end{array}\right].$$

Последняя строка полученной матрицы равносильна уравнению $-\frac{19}{5}x_3 = -114$, откуда $x_3 = -114\left(-\frac{5}{19}\right) = 30.$

Вторая строка дает уравнение $-5x_2 - 3x_3 = -240.$ Зная, что $x_3 = 30$, найдем x_2: $-5x_2 - 3 \cdot 30 = -240$, тогда $x_2 = 30$.

Первая строка последней матрицы соответствует уравнению $x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 190$. Зная x_2 и x_3, можем определить x_1:

$$x_1 = 190 - 3 \cdot 30 - 3 \cdot 30 = 190 - 180 = 10.$$

Таким образом, допустимый план производства продукции составляет 10 усл. ед. первого, 30 усл. ед. второго и 30 усл. ед. третьего наименования.

Пример. В таблице приведены расценки на проведение работ для каждого вида услуг.

Виды работ	Нормативы по видам оборудования (число часов)			Полные затраты на эксплуатацию
	Механическое	Тепловое	Энергетическое	
Техническое обслуживание	3	1	4	85
Текущие услуги	2	2	3	82
Капитальный ремонт	10	20	15	580

Найдите расчетные объемы работ (число часов использования оборудования), которые смогут окупить затраты на эксплуатацию.

Решение. Пусть x_1 – количество часов работы механического оборудования, x_2 – теплового оборудования и x_3 – энергетического оборудования, необходимое, чтобы окупить затраты на техническое обслуживание, текущие услуги и капитальный ремонт. Тогда из задачи получается система уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 85, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 82, \\ 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 = 580. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 15 \end{vmatrix} = -10, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 85 & 1 & 4 \\ 82 & 2 & 3 \\ 580 & 20 & 15 \end{vmatrix} = -120,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 85 & 4 \\ 2 & 82 & 3 \\ 10 & 580 & 15 \end{vmatrix} = -170, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 85 \\ 2 & 2 & 82 \\ 10 & 20 & 580 \end{vmatrix} = -80.$$

По формулам Крамера находим решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-120}{-10} = 12, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-170}{-10} = 17, \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-80}{-10} = 8.$$

Тогда $X = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \\ 8 \end{pmatrix}$. Чтобы окупить затраты на эксплуатацию, оборудование должно иметь следующий объем работ: механическое оборудование – 12 часов работы; тепловое оборудование – 17 часов; энергетическое оборудование – 8 часов.

Пример. Средняя численность населения трех областей республики Беларусь составляет 4500 тыс. человек. Согласно наблюдениям население этих трех областей возрастает с ежегодным коэффициентом прироста в 4, 7 и 3 % для 1-й, 2-й и 3-й областей соответственно. Установлено, что общий прирост населения за первый год составит 200 тыс. человек и что прирост населения в первой области равен приросту населения в третьей. Найдите начальные численности населения в каждой из трех областей.

Решение. Пусть x_1 – начальная численность населения в первой области, x_2 – во второй области, x_3 – в третьей области. Тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4500, \\ 0{,}04x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}03x_3 = 200, \\ 0{,}04x_1 - 0{,}03x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим полученную систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Для этого составим расширенную матрицу системы и выполним над ее строками следующие элементарные преобразования:

1) вторую и третью строки матрицы умножим на 100;

2) ко второй строке матрицы прибавим первую, умноженную на (–4); к третьей – первую, умноженную на (–4);

3) к третьей строке матрицы прибавим вторую, умноженную на $\frac{4}{3}$:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4500 \\ 0{,}04 & 0{,}07 & 0{,}03 & 200 \\ 0{,}04 & 0 & -0{,}03 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4500 \\ 4 & 7 & 3 & 20\,000 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4500 \\ 0 & 3 & -1 & 2000 \\ 0 & -4 & -7 & -18\,000 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4500 \\ 0 & 3 & -1 & 2000 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{46\,000}{3} \end{array}\right).$$

По полученной в результате проведенных преобразований матрице составим систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4500, \\ 3x_2 - x_3 = 2000, \\ -\frac{25}{3}x_3 = -\frac{46\,000}{3}. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы находим $x_3 = 1840$, второе уравнение дает

$$x_2 = \frac{1}{3}(2000 + x_3) = \frac{1}{3}(2000 + 1840) = 1280,$$

а из первого уравнения получим

$$x_1 = 4500 - (x_2 + x_3) = 4500 - (1280 + 1840) = 1380.$$

Таким образом, первоначальная численность населения составляет 1380 тыс. человек в первой области, 1280 тыс. человек во второй области и 1840 тыс. человек в третьей области.

Пример (межотраслевой баланс производства). Рассмотрим взаимодействие n отраслей экономики. Каждая отрасль выпускает определенный продукт, для производства которого требуется продукция каждой из этих n отраслей. Пусть a_{ij} – объем продукции i-й отрасли, необходимой для производства одной единицы продукта j-й отрасли. Числа a_{ij}, где $i=\overline{1,n}$ называются *коэффициентами прямых затрат j-й отрасли*, из них составляем матрицу коэффициентов затрат:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть за определенный промежуток времени (например, за месяц или за год) первая отрасль производит x_1 единиц своей продукции, вторая отрасль – x_2 единиц своей продукции, и т. д., j-я отрасль – x_j единиц своей продукции, $j=\overline{1,n}$. За это же время затраты i-й отрасли составляют: $a_{i1}x_1$ – на производство x_1 единиц продукции первой отрасли, $a_{i2}x_2$ – на производство x_2 единиц продукции второй отрасли, ..., $a_{in}x_n$ – на производство x_n единиц продукции n-й отрасли. Таким образом, полные затраты i-й отрасли составят

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n,\ i=\overline{1,n}. \tag{2.10}$$

Из величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ составим матрицу-столбец: $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$. Он называется ***вектором валового выпуска***. Из (2.10) составим ***матрицу-столбец затрат***:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Матрицу-столбец затрат можно записать в виде AX, где A – матрица коэффициентов затрат. Теперь из всей произведенной продукции (матрица-столбец X) определенная часть (матрица затрат) расходуется на производство. Оставшаяся часть продукции может быть израсходована на непроизводственные цели (потребление и накопление). Эта оставшаяся часть называется ***конечным спросом***, пусть

$$X - AX = \overline{Y}. \tag{2.11}$$

На практике обычно задается матрица $\overline{Y}$ и требуется найти решение матричного уравнения, т. е. надо так спроектировать производство (матрица X), чтобы получить заданную матрицу конечного спроса $\overline{Y}$. Заметим, что по смыслу задачи $x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}.$ Из уравнения (2.11) получим матричное уравнение

$$(E - A)X = \overline{Y},\ X \geq 0, \tag{2.12}$$

которое называется ***моделью Леонтьева***.

Если решение системы (2.12) существует для любой неотрицательной матрицы $\overline{Y}$, то матрица A называется ***продуктивной матрицей***. Тогда

$$X = (E - A)^{-1}\overline{Y}.$$

Модель Леонтьева можно использовать для выяснения вопроса, каким должен быть объем производства, чтобы удовлетворить величину данного конечного спроса.

Прогноз выпуска продукции по запасам сырья. Решение таких задач нужно для прогнозов и оценок деятельности предприятий, производства, для экспертных оценок различных проектов, для планирования микроэкономики предприятий.

Пример. Данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени приведены в следующей таблице.

Отрасль	Потребление			Конечный спрос	Всего (ден. ед.)
	Добыча и переработка углеводородов	Энергетика	Машиностроение		
Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	40	100
Энергетика	10	10	20	60	100
Машиностроение	20	10	10	10	50

Найдите объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям необходимо увеличить до 60, 70 и 30 ден. ед.

Решение. Пусть x_i – валовой выпуск продукции i, в нашем случае $i = 1, 2, 3$; y_i – конечный спрос на продукцию i ($i = 1, 2, 3$). Тогда матрицы-столбцы валового выпуска и конечного продукта имеют вид

$$X = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

При заданном увеличении конечного потребления новая матрица-столбец конечного продукта имеет вид

$$\overline{Y} = \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, валовой выпуск продукции каждого вида должен быть равен сумме продукции, использованной при производстве всех видов продукции, и конечного спроса на эту продукцию, т. е.

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + y_i, \; i = 1, 2, 3,$$

где a_{ij} – количества продукции i, используемой при производстве продукции j, a_{ij} – коэффициенты прямых затрат. Последнее уравнение можно записать в матричном виде:

$$X = AX + \overline{Y},$$

где A – матрица коэффициентов прямых затрат, $a_{ij} > 0$, X, $\overline{Y}$ – матрицы-столбцы.

Отсюда $X - AX = \overline{Y}$ или $(E - A)X = \overline{Y}$.

$X = (E - A)^{-1}\overline{Y}$ – матричное решение поставленной задачи.

Определим матрицу A, для чего найдем ее элементы a_{ij}. Надо разделить объем продукции i, предназначенной отрасли j, на общий выпуск сектора j и получим количество продукции i, используемой при производстве единицы продукции вида j, т. е.

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \; i, j = 1, 2, 3.$$

Например, $a_{12} = \dfrac{35}{100} = 0{,}35$, $a_{21} = \dfrac{10}{100} = 0{,}1$. Таким образом, получим матрицу коэффициентов затрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $E - A = B$. Имеем

$$B = E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}35 & -0{,}4 \\ -0{,}1 & 0{,}9 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу B^{-1}, для этого:

1) $\det B = \begin{vmatrix} 0,95 & -0,35 & -0,4 \\ -0,1 & 0,9 & -0,4 \\ -0,2 & -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,514 \neq 0,$ т. е. матрица B – невырожденная матрица и существует обратная матрица B^{-1};

2) составим матрицу B_{ij}, состоящую из алгебраических дополнений матрицы B:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0,68 & 0,16 & 0,19 \\ 0,32 & 0,68 & 0,165 \\ 0,5 & 0,42 & 0,82 \end{pmatrix}.$$

3) $$B^{-1} = \frac{1}{\det B}(B_{ij})^T = \frac{1}{0,514}\begin{pmatrix} 0,68 & 0,16 & 0,19 \\ 0,32 & 0,68 & 0,165 \\ 0,5 & 0,42 & 0,82 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1,323 & 0,623 & 0,973 \\ 0,311 & 1,323 & 0,817 \\ 0,37 & 0,321 & 1,595 \end{pmatrix}.$$

Проверка показывает, что $BB^{-1} = B^{-1}B = E$.

Найдем теперь

$$X = B^{-1}\overline{Y} = (E-A)^{-1}\overline{Y} = \begin{pmatrix} 1,323 & 0,623 & 0,973 \\ 0,311 & 1,323 & 0,817 \\ 0,37 & 0,321 & 1,595 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 152,14 \\ 135,798 \\ 92,51 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для обеспечения заданного увеличения компонент вектора конечного продукта необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов – на 52,14 %, уровень энергетики – на 35,8 %, а выпуск продукции машиностроения – на 8,5 % по отношению к заданным.

Исторические сведения

Впервые матрицы упоминались еще в Древнем Китае, называясь тогда «волшебным квадратом». Их основным применением было решение линейных уравнений. Также волшебные квадраты были известны чуть позднее у арабских математиков, примерно тогда появился принцип сложения матриц. После развития теории определителей в конце XVII в. Габриэль Крамер начал разрабатывать свою теорию в XVIII столетии и опубликовал правило Крамера в 1751 г. Примерно в этом же промежутке времени появился метод Гаусса. Теория матриц начала свое существование в середине XIX в. в работах Уильяма Гамильтона и Артура Кэли. Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат Карлу Вейерштрассу, Мари Энмон Камиль Жордану, Фердинанду Георгу Фробениусу.

С середины XVII в. матрицы использовались Лейбницем, только ко второй половине XIX в. матрицы, независимо от систем уравнений, стали объектом самостоятельных исследований. Дело в том, что операции над матрицами, такие как сложение, умно-

жение матриц и умножение скаляра на матрицу, возникли как технический аппарат при решении задачи, весьма далекой от проблем теории линейных уравнений, – придания геометрического истолкования некоторым обобщениям чисел – кватернионам, которые были открыты Гамильтоном в 1843 г. и составляли интерес для многих математиков середины XIX в. Основные идеи матричной алгебры были сформулированы А. Кэли в 1858 г. в работе «Мемуар по теории матриц». Он развил некое исчисление, вводя числа специального вида, которые охватывали как частный случай известные к тому времени действительные и комплексные числа и кватернионы. В основе его теории лежали именно такие действия с матрицами, что аналогами их были действия с линейными отображениями векторных пространств, уже изучавшимися в то время математиками и механиками. Так, странное на первый взгляд правило умножения матриц соответствует композиции таких отображений. Интересно знать, что именно Кэли ввел одно из современных обозначений матрицы – две вертикальные черты. Термин «матрица» ввел Джеймс Сильвестр в 1850 г.

Позднее глубокие результаты в теории матриц были получены немецкими математиками Карлом Вейерштрассом (1815–1897), Фердинандом Георгом Фробениусом (1849–1917) и французом Мари Энмон Камиль Жорданом (1838–1922), они стали классическими в теории матриц и носят их имена. Можно сказать, что в современной математике нет, пожалуй, почти ни одного серьезного раздела, в котором в той или иной степени не использовались бы достижения теории матриц. При этом именно в силу поразительной универсальности матричного аппарата результаты отдельной задачи, исследования зачастую принимают общий и более глубокий характер, связывающий между собой, казалось бы, довольно далекие проблемы.

С точки зрения истории определители стали изучаться раньше, чем сами матрицы. Впервые их начали использовать в китайских учебниках по математике. Термин «определитель» (лат. determinant) в современном его значении ввел в 1815 г. французский математик Огюстен Луи Коши (1789–1857), хотя как математический инструмент исследования систем линейных уравнений определитель использовал еще немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), который в 1693 г. получил с его помощью формулы решения систем линейных уравнений с невырожденной основной матрицей. Спустя почти три четверти века его результаты повторил Г. Крамер, и они вошли в историю под названием правила Крамера. Метод Крамера (правило Крамера) – способ решения квадратных систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем основной матрицы (причем для таких уравнений решение существует и единственно) – создан им в 1751 г. Габриэль Крамер (1704–1752) – швейцарский математик, ученик и друг Иоганна Бернулли, один из создателей линейной алгебры. Крамер рассмотрел систему произвольного количества линейных уравнений с квадратной матрицей. Решение системы он представил в виде столбца дробей с общим знаменателем – определителем матрицы. Термина «определитель» (детерминант) тогда еще не существовало (его ввел Карл Фридрих Гаусс в несколько ином понимании в 1801 г.), но Крамер дал точный алгоритм его вычисления.

Универсальность идей Лейбница и Крамера подтверждается тем, что спустя 20 лет после Крамера независимо от предшественников те же формулы получил французский математик и механик Жозеф Луи Лагранж (1736–1813). Примерно в то же самое время идея определителя возникла в работах французского математика Этьенна Безу (1730–1783) при решении чисто геометрической задачи (отыскание плоской кривой, проходящей через заданные точки). Первое систематическое и обширное из-

ложение теории определителей дал французский математик и музыкант Александр Теофил Вандермонд (1735–1796) в 1772 г., ему же принадлежит ряд самостоятельных исследований и интересных результатов в этой области, а определитель одного специального вида вошел в историю математики под названием «определитель Вандермонда». Следует отметить, что фундаментальные работы 1812 г. еще двух французских математиков: О. Коши и Ж. Бине (1786–1856) – сыграли немаловажную роль в этой теории и привлекли к ней внимание многих европейских ученых XIX в., в частности А. Кэли и немецкого математика Карла Густава Якоби (1804–1851). Собственно, только после работ Кэли определители, так же как и матрицы, стали самостоятельным объектом интереса математиков, ему же принадлежит одно из современных обозначений определителей. Якоби ввел так называемые функциональные определители (с элементами – переменными величинами (функциями)), указал на их связь с заменой переменных в кратных интегралах и с решениями дифференциальных уравнений в частных производных. Его статьи «О построении и свойствах определителей» и «О функциональных определителях», опубликованные в 1841 г., сделали теорию определителей общим достоянием математики.

Исторический обзор был бы неполон без упоминания работ в этой области французского ученого (математика, механика, физика и астронома) Пьера-Симона Лапласа (1749–1827). Его знаменитая теорема о разложении определителя в сумму произведений элементов и их алгебраических дополнений дает возможность индуктивного (рекуррентного) построения определителей.

Примеры решения задач

1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 4x+5y+6z=9, \\ 7x+8y=-6. \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель матрицы системы:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}=27\neq 0.$$

Далее находим следующие определители:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix}=-54,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix}=27,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix}=54.$$

Воспользуемся формулами Крамера:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-54}{27}=-2;\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{27}{27}=1;\ z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{54}{27}=2.$$

2. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второй строке системы первую строку, умноженную на (–2), к третьей – первую строку, умноженную на (–1), а к четвертой – первую строку, умноженную на (–3), и получим

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 \end{array}\right).$$

Поменяем местами вторую и третью строки:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей строке системы вторую строку, умноженную на (–3), а к четвертой – вторую строку, умноженную на (–4):

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & -20 \end{array}\right).$$

Последнюю строку разделим на 4:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right).$$

Поменяем местами третью и четвертую строки системы:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 \end{array}\right).$$

Умножим третью строку системы на (–5) и прибавим к четвертой строке:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует следующая система, равносильная исходной:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=4, \\ -x_2+x_4=2, \\ x_3-2x_4=-5, \\ 3x_4=12. \end{cases}$$

Найдем поочередно неизвестные:

$$\begin{cases} x_4=4, \\ x_3=2x_4-5, \\ x_2=x_4-2, \\ x_1=-x_2+x_3-x_4+4. \end{cases}$$

Итак, решение системы:

$$\begin{cases} x_4=4, \\ x_3=3, \\ x_2=2, \\ x_1=1. \end{cases}$$

3. Решить следующую систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=5, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=-3, \\ 3x_1-2x_2-x_3=7. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее: первую строку умножаем на (–2) и складываем со второй, далее первую умножаем на (–3) и складываем с третьей, получаем эквивалентную матрицу, в которой работаем со второй и третьей строками:

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&5\\2&-3&2&-3\\3&-2&-1&7\end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&5\\0&-5&8&-13\\0&-5&8&-8\end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&5\\0&-5&8&-13\\0&0&0&5\end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует следующая система, равносильная исходной:

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3=5,\\-5x_2+8x_3=-13,\\0x_1+0x_2+0x_3=5.\end{cases}$$

Эта система уравнений решений не имеет, так как получили уравнение $0x_1+0x_2+0x_3=5$, которое не имеет решений.

4. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=3,\\2x_1+x_2+x_3=11,\\x_1+x_2+2x_3=8.\end{cases}$$

Решение. Представим систему в матричном виде $AX=B$, где

матрица $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}$, матрица $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$, матрица $B=\begin{bmatrix}3\\11\\8\end{bmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы A, $\det A=5\neq 0$ (проверить самостоятельно), таким образом, матрица A невырожденная и существует обратная матрица A^{-1} вида (проверить самостоятельно):

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&3&-2\\-3&1&1\\1&-2&3\end{bmatrix}.$$

По формуле $X=A^{-1}B$ найдем матрицу

$$X=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&3&-2\\-3&1&1\\1&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\11\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Таким образом, $x_1=4$, $x_2=2$, $x_3=1$.

5. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 12 \\ 2 & -1 & 2 & -10 & 8 \end{array}\right).$$

Прибавим к второй строке системы первую строку, умноженную на (–2), к третьей – первую строку, а к четвертой – первую строку, умноженную на (–2), и получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7 \\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 6 \end{array}\right).$$

Сложим третью и четвертую строки системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7 \\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 19 \end{array}\right).$$

Поменяем вторую и четвертую строки местами и вторую разделим на (–1):

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19 \\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13 \\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей и четвертой строкам системы вторую, умноженную на (–2) и 5 соответственно, получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19 \\ 0 & 0 & 3 & -19 & 51 \\ 0 & 0 & -6 & 38 & -102 \end{array} \right).$$

Прибавим к четвертой строке системы третью, умноженную на 2, получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19 \\ 0 & 0 & 3 & -19 & 51 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Данная система совместна и имеет бесконечное множество решений. Выразим переменные x_1, x_2, x_3 через переменную x_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + 5x_4 = -19, \\ 3x_3 - 19x_4 = 51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -(x_2 + 4x_3 - 7x_4) + 1, \\ x_2 = -(x_3 + 5x_4) - 19, \\ x_3 = \dfrac{19}{3} x_4 + 17. \end{cases}$$

Подставим выражение для переменной x_3 во второе уравнение и найдем x_2:

$$x_2 = -19 - (x_3 + 5x_4) = -19 - \left(17 + \frac{19}{3} x_4 + 5x_4 \right) = -36 - \frac{34}{3} x_4.$$

Из первого уравнения находим x_1:

$$x_1 = 1 - (x_2 + 4x_3 - 7x_4) = 1 - \left(-36 - \frac{34}{3} x_4 + 4\left(17 + \frac{19}{3} x_4 \right) - 7x_4 \right) = -31 - 7x_4.$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -31 - 7x_4 \\ -36 - \dfrac{34}{3} x_4 \\ 17 + \dfrac{19}{3} x_4 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

где x_4 может принимать любые действительные значения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите системы линейных уравнений при помощи обратной матрицы:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y - 6z = -1, \\ 3x - 2y = 8. \end{cases}$

2. Решите системы линейных уравнений по формулам Крамера и при помощи метода Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ x + y - z = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y - 6z = -1, \\ 3x - 2y = 8; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} -x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x + y - 3z = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9x + 2y = 3, \\ 7x - 2y = 13; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 4x - y + 2z = 7, \\ x + y + 2z = 3, \\ -x + 3y - 3z = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x + 9y = 2, \\ 6x + 7y = 10; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 2x - y + z = 4, \\ 3x + 2y - 3z = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + 2y - z = 4, \\ 2x + y + z = 5, \\ x - z = 0; \end{cases}$ к) $\begin{cases} 3x - 2y - z = -1, \\ x + 2y + 4z = 11, \\ 2x + 4y - 3z = 0. \end{cases}$

3. Решите системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7, \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 2, \\ 4x - 3y + 3z = 3, \\ x + 3y = 0, \\ 5x + 3z = 3. \end{cases}$

4. Решите систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 2. \end{cases}$$

5. Предприятие выпускает три вида изделий, используя при этом сырье трех типов. Нормы расхода сырья по видам изделий указаны в таблице.

Тип сырья	Норма расхода сырья на одно изделие по видам:		
	1-й вид	2-й вид	3-й вид
I	4	5	6
II	1	2	3
III	0	1	4

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида, если известно, что запас сырья I типа составляет 5500 единиц, II типа – 2050 единиц, III – 1400 единиц. Указанные запасы сырья должны быть использованы полностью.

6. Предприятие планирует выпуск продукции трех видов наименований X_1, X_2, X_3, на производство которой требуется три вида ресурсов I, II, III. Нормы затрат каждого вида ресурсов на изготовление единицы каждого наименования продукции задаются матрицей A. Найдите допустимый план выпуска продукции (усл. ед.), если предприятие располагает ресурсами в количестве единиц, заданном матрицей B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 190 \\ 140 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

7. Иванов, Петров и Сидоров купили три вида продуктов соответственно 2, 5 и 4 кг; 6, 2 и 3 кг; 1, 4 и 7 кг. Иванов уплатил 27 ден. ед., Петров – 23,5 ден. ед. и Сидоров – 34 ден. ед. Найдите цены этих продуктов.

8. Матрица перераспределения населения между пятью районами имеет вид

$$\begin{pmatrix} 10 & 25 & 16 & 14 & 9 \\ 6 & 7 & 11 & 5 & 12 \\ 14 & 8 & 3 & 21 & 2 \\ 31 & 16 & 13 & 6 & 17 \\ 15 & 4 & 19 & 24 & 23 \end{pmatrix}.$$

Известно, что в районах 2 и 4 проживало первоначально 153 и 211 человек соответственно. Определите количество человек, проживающих в данных районах после перераспределения.

9. Решите матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $X \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Докажите, что решением матричного уравнения $AXC = B$ является матрица $X = A^{-1}BC^{-1}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Может ли матричное уравнение $AX = B$ иметь одно решение? Два решения? Ни одного решения?
2. Какая система линейных уравнений называется совместной?
3. Какая система линейных уравнений называется определенной?
4. Какая система линейных уравнений называется однородной?
5. Что называется общим решением системы? Частным решением системы?
6. Что такое расширенная матрица системы?
7. Множества решений двух систем линейных уравнений совпадают. Равны ли расширенные матрицы этих систем?
8. Могут ли быть эквивалентными две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных, но с разным числом уравнений?
9. Может ли множество решений системы линейных уравнений состоять ровно из одного решения? Из двух решений? Из 17 решений?
10. Какие методы решения систем линейных уравнений вы знаете?
11. Могут ли различные методы решения системы линейных уравнений (метод Крамера и метод обратной матрицы) дать различные ответы?
12. Верно ли утверждение: однородная система всегда совместна?

РАЗДЕЛ III

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ

3.1. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ПРЕДЕЛЫ

3.1.1. Основные сведения о функциях

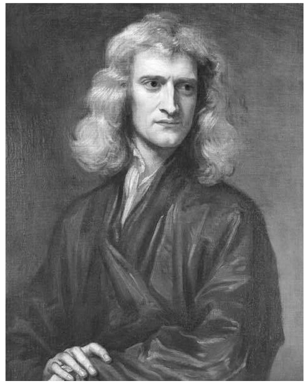
Основу математического анализа составляют дифференциальное и интегральное исчисления. Заслуга открытия дифференциального и интегрального исчисления принадлежит И. Ньютону и Г. Лейбницу.

Понятие функции возникло тогда, когда люди впервые поняли, что окружающие их явления взаимосвязаны. Однако строгое математическое определение понятия функции появилось лишь в конце XVII в. в трудах Лейбница и Ньютона.

Когда мы наблюдаем какой-нибудь процесс или явление из области экономики или социологии, то видим, что одни величины сохраняют свои значения, другие же принимают различные значения.

Переменной называется величина, которая при выполнении некоторого комплекса условий может принимать различные значения. ***Постоянной*** называется величина, которая при выполнении некоторого комплекса условий сохраняет одно и то же значение. Отметим, что выполнение комплекса условий является очень важным. Так, одна и та же величина может быть переменной или постоянной в зависимости от того, в каких условиях она рассматривается. Например, цена на хлеб (и некоторые другие продукты) в условиях рыночной экономики является величиной переменной. В условиях жесткого планирования экономики цена на хлеб может держаться на одном уровне и быть постоянной величиной (в 70-е гг. цена на хлеб была постоянна, буханка серого хлеба стоила 16 коп.).

Готфрид Вильгельм
Лейбниц
(1646–1716)



Исаак Ньютон
(1642—1727)

Изучая какое-нибудь явление, мы обычно имеем дело с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что каждым значениям одних величин соответствуют значения других. Так, например, ясно, что:

1) каждому значению цены товара соответствует определенная величина спроса;

2) каждому году соответствует сумма накопившегося денежного вклада;

3) интенсивность ощущения зависит от интенсивности раздражителя.

Во всех этих примерах общим является то, что с каждым числовым значением одной величины сопоставляется определенное числовое значение другой.

Дадим определение функции – центрального понятия математического анализа.

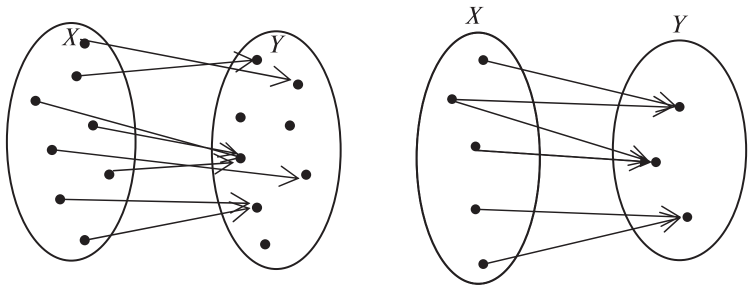
Пусть X и Y – непустые множества. Пусть x – произвольный элемент множества X, y – произвольный элемент множества Y, т. е. $x \in X$, $y \in Y$.

Соответствие f, которое с каждым элементом x множества X сопоставляет только один элемент y множества Y, называется ***функцией***. Записывается так: $y = f(x)$ или $f: X \to Y$.

При этом элементы y, или $f(x)$, из множества Y называются ***значениями функции***, а элементы x из X – ***значениями аргумента***.

Пример. Пусть X – множество студентов-социологов, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ – множество оценок по десятибалльной системе. Тогда можно задать функцию $y = f(x)$, которая каждому студенту $x \in X$ будет ставить в соответствие некоторую оценку $y \in Y$.

Упражнение. Какое из заданных соответствий является функцией?



Множество X называется ***областью определения*** функции f и обозначается через $D(f)$. Множество всех $y \in Y$, являющихся значениями функции f в точках $x \in X$, называется ***множеством значений*** функции f и обозначается через $E(f)$.

Функция, у которой область определения и область значений – числовые множества, называется ***числовой функцией***.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, т. е. абсциссами являются значения переменной x, а ординатами – соответствующие им значения функции y.

Пример. Графиком функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ является верхняя полуокружность радиуса $R = 3$ с центром в начале координат.

Упражнение. Какие из приведенных ниже рисунков (рис. 3.1) являются графиками функций?

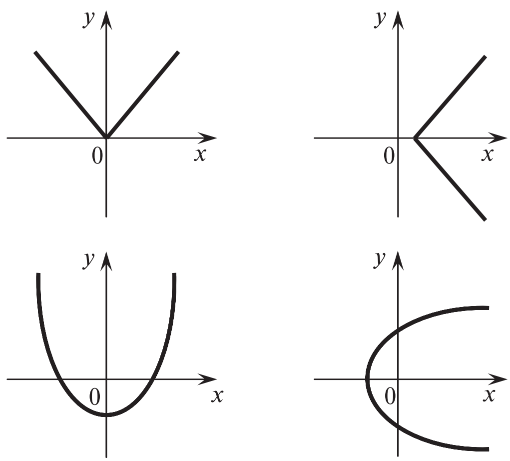


Рис. 3.1

Упражнение. Укажите область определения функций, изображенных на рис. 3.2.

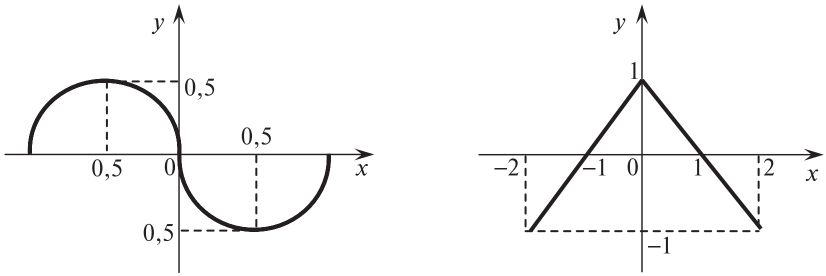


Рис. 3.2

Упражнение. Укажите множество значений функции, изображенной на рис. 3.3.

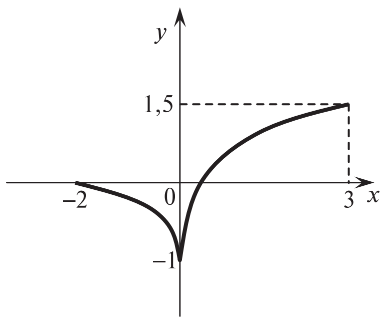


Рис. 3.3

3.1.2. Способы задания функций. Примеры функций из психологии, экономики и социологии

Чтобы задать функцию, необходимо указать правило, позволяющее, зная значения x, находить соответствующие значения y. Наиболее часто встречаются следующие три способа задания функции: аналитический; табличный; графический.

Аналитический способ заключается в том, что функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений, например

$$y = -0{,}9 + 9{,}638x^{-1{,}394},$$

где y – годовой темп прироста ставки заработной платы (в процентах); x – общий уровень безработицы (в процентах). Это формула Филлипса.

Аналитический способ удобен для решения задач прогнозирования. Положительными сторонами аналитического способа задания функции являются краткость записи, возможность определения значения функции для любого значения аргумента и, что самое главное, возможность изучения функциональной зависимости с помощью математического анализа. Недостатком этого способа является то, что он применим для описания лишь сравнительно простых форм и процессов.

Табличный способ, если дана таблица, содержащая значения переменной x и соответствующие значения переменной y. В виде таблиц записываются результаты экспериментального исследования каких-либо социологических процессов и явлений.

Пример. Рост числа научных изданий y с 1750 г. (с интервалом в 50 лет) в зависимости от года x выглядит (округленно) следующим образом.

x	1750 г.	1800 г.	1850 г.	1900 г.	1950 г.
y	10	100	1000	10 000	100 000

К недостатку табличного способа можно отнести невозможность поместить в таблицу все значения аргумента. Табличная запись, особенно если она велика, не обладает наглядностью и не позволяет обозреть общий вид графика функции.

Графический способ заключается в том, что строится график функции. Непосредственно из этого графика находятся значения функции y, соответствующие значениям аргумента x. Не всякая линия является графиком некоторой функции. Например, множество точек окружности не может быть графиком функции, поскольку одному значению абсциссы x соответствуют два значения ординаты y_1 и y_2.

Рассмотрим *основные элементарные функции*:

1) *степенная* функция $y = x^\alpha$, где α – действительное число;

2) *показательная* функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$;

3) *логарифмическая* функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$;

4) *тригонометрические* функции $y = \sin x$, $y = \cos x$;

5) *обратные тригонометрические* функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.

Приведем **примеры** функций из психологии, экономики и социологии.

1. Если x – спрос на товар, y – цена товара, то $y = 3x^{-0,8}$ – функция цены от спроса товара.

2. Пусть x – цена товара, y – спрос на товар, то $y = \dfrac{200}{x+2}$ – функция спроса от цены товара.

3. Сумма денежного вклада в банке $y = 100 \cdot (1{,}03)^x$ – функция от времени x, которое хранится вклад в банке.

4. Психофизический закон Вебера – Фехнера: $S = a\lg Y + b$, где S – интенсивность ощущения, Y – интенсивность раздражителя, a и b – константы, зависящие от условий и вида раздражителей.

5. Скорость смены представлений в сознании (И. Гербарта): $Y = a(1 - e^{-bx})$, где x – время, Y – скорость, a и b – константы, зависящие от опыта.

6. В психологическом тесте Д. Векслера общий уровень относительного интеллекта IQ_0 зависит линейно от шкальных оценок по 11 субтестам:

$$IQ_0 = 0{,}6\sum_{i=1}^{11} y_i + b_0,$$

где IQ_0 – общий показатель уровня интеллекта; y_i – шкальные оценки; b_0 – поправка на зависимость относительного интеллекта от возраста человека.

Функция $f(x)$ называется ***четной***, если для всех x из области определения данной функции f справедливо равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси OY.

Функция $f(x)$ называется ***нечетной***, если для всех x из области определения данной функции f справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат (0; 0).

Упражнение. На каком из рисунков (рис. 3.4) изображен график четной, а на каком – нечетной функции?

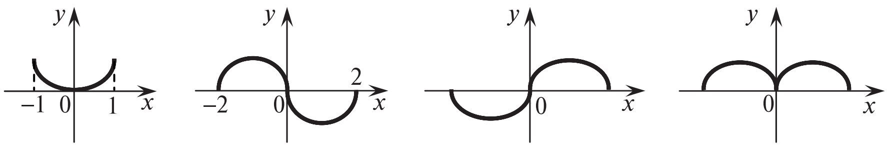


Рис. 3.4

Пусть заданы функция $u = g(x)$ с областью определения X, областью значений U и функция $y = f(u)$ с областью определения, содержащей множество U, и областью значений Y. Тогда функция, обозначаемая через $y = f(g(x))$, которая каждому значению x из множества X ставит в соответствие единственное значение y из множества Y такое, что $y = f(u)$ и $u = g(x)$, называется *сложной функцией*.

Например, если $y = u^3$, $u = \sin x$, то $y = (\sin x)^3 = \sin^3 x$ – сложная функция, определенная на всей числовой прямой.

Элементарными называются функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью алгебраических действий и образования сложных функций.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ***монотонно возрастающей* (*неубывающей*)**, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих X, из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$).

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ***монотонно убывающей* (*невозрастающей*)**, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству X, из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$).

Упражнение. На каком из рисунков (рис. 3.5) изображен график убывающей, а на каком – возрастающей функции?

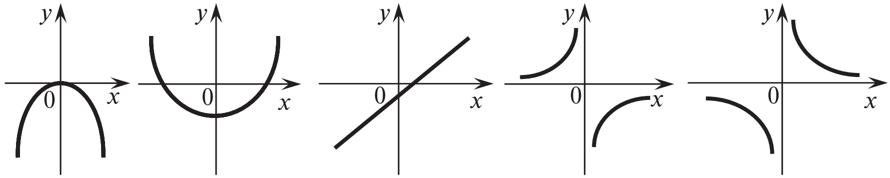


Рис. 3.5

Определение обратной функции. Пусть функция $y=f(x)$ строго монотонная (возрастающая или убывающая) и непрерывная на области определения $x \in (a;b)$, область значений этой функции – $y \in (c;d)$, тогда на интервале $(c;d)$ определена непрерывная строго монотонная функция $x=g(y)$ с областью значений $(a;b)$, которая является обратной для $y=f(x)$.

Для любого элемента из множества $(c;d)$ можно поставить в соответствие только один элемент множества $(a;b)$, для которого $y=f(x)$. Такое соответствие определяет функцию, которая называется обратной функцией к f. Обратная функция обозначается так: $y=f^{-1}(x)$.

Замечание. *Об обратной функции $x=g(y)$ для функции $y=f(x)$ на конкретном промежутке имеет смысл говорить, если на этом интервале функция $y=f(x)$ либо возрастает, либо убывает.*

3.1.3. Понятие предела функции. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности

Пусть x_0 – любое действительное число (точка на числовой прямой). ***Окрестностью*** точки x_0 называется любой интервал $(a;b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, называется ε-*окрестностью* точки x_0 (обозначается $U_\varepsilon(x_0)$).

Если $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, то $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$, или, что одно и то же, $|x-x_0|<\varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε-окрестность точки x_0 (рис. 3.6).

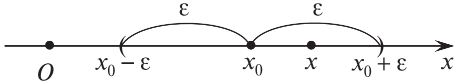


Рис. 3.6

Проколотой окрестностью точки x_0 называется ее окрестность, из которой исключена сама точка x_0.

Проколотой ε*-окрестностью* точки x_0 (обозначается $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$) называется ε-окрестность точки x_0, из которой исключена сама точка x_0, т. е. объединение интервалов $(x_0-\varepsilon, x_0)\cup(x_0, x_0+\varepsilon)$.

Если $x\in(x_0-\varepsilon, x_0)\cup(x_0, x_0+\varepsilon)$, то $0<|x-x_0|<\varepsilon$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Сформулируем определение предела функции в точке.

Число A называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ (зависящее от ε), что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ или $f(x)\to A$ при $x\to x_0$.

Неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ означает, что $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.

Выясним *геометрический смысл определения предела функции в точке*. Число A является пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0, если для любой ε-окрестности точки A на оси ординат найдется такая проколотая δ-окрестность точки x_0 на оси абсцисс, что для всех x из этой окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A. Иными словами, все точки $(x, f(x))$, где $x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, лежат внутри полосы $A-\varepsilon<y<A+\varepsilon$ шириной 2ε (рис. 3.7).

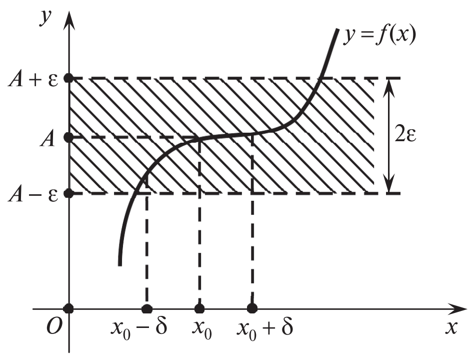


Рис. 3.7

Замечание. *Из определения предела функции в точке x_0, а именно из условия, что в этой точке функция может быть не определена, непосредственно следует утверждение: если функции f и g таковы, что $f(x)=g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и пределы этих функций в точке x_0 существуют, то* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=5$.

Решение. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-1| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)-5| = |(3x+2)-5| = |3x-3| < \varepsilon$, т. е. $|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Положив $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, видим, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $0 < |x-1| < \delta \left(\delta = \frac{\varepsilon}{3} \right)$, выполняется неравенство $|(3x+2)-5| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 1}(3x+2) = 5$.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Решение. При $x \neq 1$ $f(x) = x+1$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Неравенство $|(x+1)-2| < \varepsilon$ выполняется, если $0 < |x-1| < \varepsilon$, т. е. $\delta = \varepsilon$ и $\lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2 = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

Иногда приходится рассматривать предел функции $y = f(x)$ при условии, что точка x, приближаясь к точке x_0, остается либо правее, либо левее ее. При этом способ приближения x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. В связи с этим вводят понятия *односторонних пределов*.

Число A называется ***пределом слева*** (***справа***) функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ (для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначения: для предела функции слева

$$A = f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x);$$

для предела функции справа

$$A = f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Пример. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \frac{|x|}{x}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Раскрывая модуль по определению, получаем

$$f(-0) = \lim_{x \to -0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$f(+0) = \lim_{x \to +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{x} = 1.$$

Этот результат можно увидеть наглядно, построив график функции (рис. 3.8).

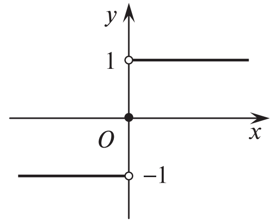


Рис. 3.8

Следующая теорема устанавливает связь между односторонними пределами и пределом функции в точке.

Теорема. Функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке у нее существуют равные пределы слева и справа, причем общее значение этих пределов является пределом функции в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ 3 - x, & x > 1 \end{cases}$$

при $x \to 1$ имеет предел, равный 2, поскольку $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 2.$

Далее рассмотрим определение предела функции на бесконечности.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ и говорят, что функция $y = f(x)$ стремится к A при x, стремящемся к ∞.

Пример. При достаточно больших по модулю x значение функции $y = \dfrac{1}{x}$ становится сколь угодно малым (меньше любого сколь угодно малого положительного числа ε), поэтому $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Кратко определение предела функции на бесконечности можно записать в виде

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M > 0 \ \forall x : |x| > M \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

В этой символической записи используется символ $\exists$ – ***квантор существования*** (произносится как «существует» или «для некоторого»).

Геометрический смысл этого определения таков: если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что при $x \in (-\infty, M)$ или $x \in (M, +\infty)$ соответствующие значения функции $y = f(x)$ попадают в ε-окрестность точки A, т. е. точки $(x, f(x))$ графика функции лежат в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рис. 3.9).

Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $x > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 \ \forall x : \ x > M \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

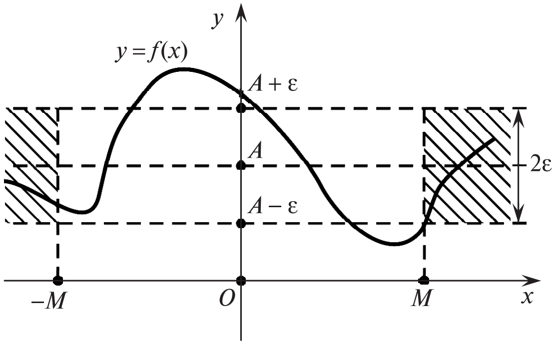


Рис. 3.9

Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $x < -M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x:\ x < -M\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Поведение функции $y = f(x)$ в случаях $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ представлено на рис. 3.10, *а*, *б* и *в* соответственно.

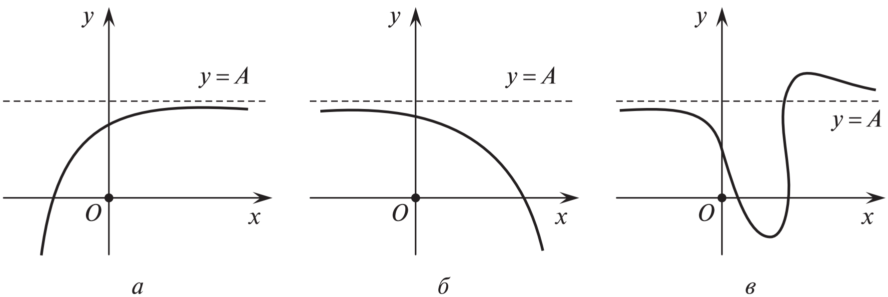


Рис. 3.10

Пример. Доказать по определению, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Решение. Выберем любое $\varepsilon > 0$ и выясним, для каких x будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Решая это неравенство, получаем $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, если $M = \frac{1}{\varepsilon}$, то при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, справедливо неравенство $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

Пример. Доказать по определению, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2+2}=1.$

Решение. Выберем любое $\varepsilon>0$ и выясним, для каких x будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{x^2+1}{x^2+2}-1\right|<\varepsilon.$ Решая это неравенство, получаем $\left|-\dfrac{1}{x^2+2}\right|=\dfrac{1}{x^2+2}<\dfrac{1}{x^2}<\varepsilon,$ откуда $x^2>\dfrac{1}{\varepsilon}$ и $x<-\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}.$ Следовательно, если $M=\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}},$ то при всех x, удовлетворяющих неравенству $x<-M,$ справедливо неравенство $\left|\dfrac{x^2+1}{x^2+2}-1\right|<\varepsilon.$

3.1.4. Свойства функций, имеющих предел в точке. Бесконечно малые функции. Бесконечно большие функции

Общие свойства функций, имеющих предел в точке

1. Если функция $y=f(x)$ имеет предел в точке x_0, то он единственный.

2. Функция, имеющая предел в точке, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Предел и неравенства

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>B$ $(A<B),$ то существует проколотая окрестность точки x_0, в которой выполняются неравенства: $f(x)>B$ $(f(x)<B).$

2. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ и в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $f(x)\geq g(x)$ $(f(x)\leq g(x)).$ Тогда $A\geq B$ $(A\leq B).$

3. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$ и в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливы неравенства $f(x)\leq h(x)\leq g(x).$ Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A.$

Предел и арифметические операции

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B.$ Тогда существуют пределы функций $f(x)\pm g(x),$ $f(x)g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B;$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=AB,$ в частности $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x))=cA;$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0).$

В последнем случае функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ рассматривается только при тех значениях x, для которых функция $g(x)\neq 0.$

Рассмотренные выше свойства будем принимать без доказательства.

Замечание. *Свойства 1–3, сформулированные выше, справедливы также и в случае, когда* x_0 *является одним из символов* $+\infty, -\infty, \infty$. *Под окрестностью* $U(x_0)$ *в этих случаях понимается множество, у которого существует подмножество* $U(x_0, \varepsilon) \subset U(x_0)$, *где* $\varepsilon > 0$ *и*

$$U(+\infty, \varepsilon) = \left\{ x: \ x \in \boldsymbol{R}, x > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{+\infty\};$$

$$U(-\infty, \varepsilon) = \left\{ x: \ x \in \boldsymbol{R}, x < -\frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{-\infty\};$$

$$U(\infty, \varepsilon) = \left\{ x: \ x \in \boldsymbol{R}, |x| > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{\infty\}.$$

Данные множества называются ε*-окрестностями элементов* $+\infty, -\infty, \infty$ *соответственно.*

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x \to 2} \left(3x - \dfrac{24}{x} \right)$.

Решение.

$$\lim_{x \to 2} \left(3x - \frac{24}{x} \right) = \lim_{x \to 2} 3x - \lim_{x \to 2} \frac{24}{x} = 3 \lim_{x \to 2} x - 24 \lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = 3 \cdot 2 - 24 \cdot \frac{1}{2} = -6.$$

Пример. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 3) = 2 \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7.$

2) $\lim\limits_{x \to 1} (9x^2 - 6x + 8) = \lim\limits_{x \to 1} 9x^2 - \lim\limits_{x \to 1} 6x + \lim\limits_{x \to 1} 8 = 9 \lim\limits_{x \to 1} x^2 - 6 \lim\limits_{x \to 1} x + 8 =$
$= 9 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 9 - 6 + 8 = 11.$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x}{2x + 1}$.

Решение. Пределы числителя и знаменателя существуют. Убедимся, что предел знаменателя отличен от 0: $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 1) = 2 \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Тогда применимо свойство о пределе частного:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x}{2x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 3x)}{\lim\limits_{x \to 2} (2x + 1)} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} x^2 + 3 \lim\limits_{x \to 2} x}{2 \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 1} = \frac{2^2 + 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{10}{5} = 2.$$

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$.

Примерами бесконечно малых функций являются функции $y = x^2$ при $x \to 0$, $y = x - 2$ при $x \to 2$, $y = \sin x$ при $x \to \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \to \infty$.

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной*** на множестве X, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$.

Теорема. Сумма конечного числа бесконечно малых функций, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию являются бесконечно малыми функциями.

Следствие. Так как всякая бесконечно малая при $x \to x_0$ функция ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция. Произведение бесконечно малой функции на число также является бесконечно малой функцией.

Между функциями, имеющими предел в точке, и бесконечно малыми функциями существует определенная связь, которую устанавливает следующая теорема. Рассмотрим ее без доказательства.

Теорема. Для того чтобы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to x_0$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ и говорят, что функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$ или что она имеет бесконечный предел в точке x_0.

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-1}$ является бесконечно большой функцией при $x \to 1$ (рис. 3.11).

Если же выполняется неравенство $f(x) > M$ $(f(x) < -M)$, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty)$.

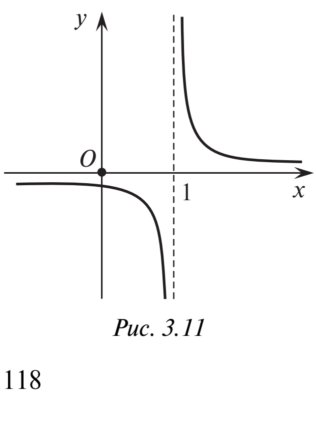


Рис. 3.11

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to +\infty, -\infty, \infty$.

Так, функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to \infty$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $L = L(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > L$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Например, $y = x^3$ является бесконечно большой функцией при $x \to \infty$.

Теорема. Если функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$ $(\alpha \ne 0)$, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большой при $x \to x_0$, и наоборот, если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая при $x \to x_0$.

Пример. Доказать по определению, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to 0$.

Решение. Выберем любое $M > 0$ и выясним, для каких x будет выполняться неравенство $|f(x)| > M,$ т. е. $\left|\dfrac{1}{x}\right| > M.$ Решая это неравенство, получаем $|x| < \dfrac{1}{M}.$ Таким образом, если $\delta = \dfrac{1}{M},$ то для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x| < \delta,$ справедливо неравенство $|f(x)| > M.$ Это означает, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to 0$.

Пример. Функция $y = x^3 - 1$ является бесконечно малой в точке $x = 1,$ так как $\lim\limits_{x\to 1}(x^3 - 1) = 1^3 - 1 = 0.$

Пример. Вычислим $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5}{3x-12}.$

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 4}(3x - 12) = 0,$ то $(3x - 12)$ есть бесконечно малая величина, а обратная ей величина есть бесконечно большая. То есть

$$\lim_{x\to 4}\frac{5}{3x-12} = 5\lim_{x\to 4}\frac{1}{3x-12} = \infty.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{4x+3}.$

Решение. Так как $(4x + 3)$ при $x \to \infty$ есть бесконечно большая величина, а обратная ей величина $\dfrac{1}{4x+3}$ есть бесконечно малая, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{4x+3} = 2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{4x+3} = 0.$

3.1.5. Замечательные пределы

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используется предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

называемый ***первым замечательным пределом***.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 4x}$.

Решение. Вычислим этот предел с помощью первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 4x}=5\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 4x}=5\lim_{x\to 0}\frac{4x}{4\sin 4x}=$$

$$=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 4x}{4x}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{4}.$$

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\approx 2{,}71 \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e\approx 2{,}71.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)^3=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)^3=e^3.$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x$, где $k\in \boldsymbol{R}$.

Решение. Обозначим $x=kt$. Тогда $t\to\infty$ при $x\to\infty$ и

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{kt}=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^k=e^k.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^x$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x+2}{x-3}$ на x, сведем данный предел к частному пределов из предыдущего примера:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x}=\frac{e^2}{e^{-3}}=e^5.$$

Раскрытие неопределенностей

Раскрыть неопределенность – значит найти предел соответствующего выражения, если он существует.

Перечислим все основные *виды неопределенностей*: ноль делить на ноль $\left(\frac{0}{0}\right)$, бесконечность делить на бесконечность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, ноль умножить на бесконечность $(0\cdot\infty)$, бесконечность минус бесконечность $(\infty-\infty)$, единица в степени бесконечность (1^{∞}), ноль в степени ноль (0^0), бесконечность в степени ноль (∞^0).

Раскрывать неопределенности позволяет:

а) упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т. п.);

б) использование замечательных пределов;

в) использование замены бесконечно малого выражения ему эквивалентным (использование таблицы эквивалентных бесконечно малых).

Сгруппируем неопределенности в таблицу неопределенностей. Каждому виду неопределенности поставим в соответствие метод ее раскрытия (метод нахождения предела).

Виды неопределенностей	Методы нахождения предела
$\left(\frac{0}{0}\right)$	1. Преобразовать и упростить выражение. 2. Применить первый замечательный предел
$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	1. Преобразовать и упростить выражение. 2. Разделить на наибольшую степень x
$(0\cdot\infty)$ $(\infty-\infty)$	Преобразовать к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
(1^{∞})	Применить второй замечательный предел
(0^0) (∞^0)	Логарифмировать выражение и использовать равенство $\lim\limits_{x\to x_0}\ln(f(x))=\ln(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))$

3.1.6. Использование пределов в экономике и социологии

Многие социально-экономические закономерности удается увидеть с помощью предельного перехода.

Пример. Экспериментально была установлена зависимость $y=\dfrac{200}{x+2}$ между ценой одного из товаров x и спроса на него y. Исследовать поведение функции спроса от цены товара $y=\dfrac{200}{x+2}$ при неограниченном увеличении цены ($x \to \infty$).

Решение. Так как $(x + 2)$ при $x \to \infty$ есть бесконечно большая величина, а обратная ей величина $\dfrac{1}{x+2}$ есть бесконечно малая, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty} 200}{\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)}=0.$$

Таким образом, при неограниченном росте цен спрос приближается к нулю.

Пример. Экономические исследования показывают, что спрос y на товары первой необходимости и спрос z на предметы роскоши зависят от дохода x следующим образом:

$$y(x)=\frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1},\ z(x)=\frac{b_2x(x-a_2)}{x-c_2},$$

где a_1, a_2 – уровни доходов, при которых начинается приобретение тех или иных товаров. Это функции Л. Торнквиста.

Найдем, как меняется $y(x)$ при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} y(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=b_1\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{a_1}{x}}{1-\dfrac{c_1}{x}}\right)=b_1.$$

Найдем, как меняется $z(x)$ при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} z(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{b_2x(x-a_2)}{x-c_2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=b_2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\dfrac{a_2}{x}\right)}{1-\dfrac{c_2}{x}}\right)=\infty.$$

Таким образом, при неограниченном увеличении доходов спрос на товары первой необходимости растет до определенного предела, равного b_1. Миллионеры не покупают для себя хлеба больше, чем съедят. Поэтому число b_1 называется уровнем насыщения. Спрос же на предметы роскоши не имеет уровня насыщения. Он растет даже при неограниченном росте доходов.

Исторические сведения

К понятию «предел» вплотную подошли еще древнегреческие ученые при вычислении площадей и объемов некоторых фигур и тел с помощью метода исчерпывания. Так, Архимед, рассматривая последовательности вписанных и описанных ступенчатых фигур и тел, с помощью метода исчерпывания доказывал, *что разность между их площадями (и, соответственно, объемами) может быть меньше любой наперед заданной положительной величины. Включая в себя представление о бесконечно малых, метод исчерпывания являлся зародышем теории пределов. Однако в явном виде в древнегреческой математике понятие «предел» не было сформулировано. Не было создано и каких-либо основ общей теории.*

Новый этап в развитии понятия предела наступил в эпоху создания дифференциального и интегрального исчислений. Галилео Галилей (1564–1642), Иоганн Кеплер (1571–1630), Бонавентура Кавальери (1598–1647), Блез Паскаль (1623–1662) и др. широко используют при вычислении площадей и объемов метод «неделимых», метод актуальных бесконечно малых, т. е. таких бесконечно малых, которые, по их представлению, являются неизменными величинами, не равными нулю и вместе с тем меньшими по абсолютной величине любых положительных конечных величин. Продолжает в этот период применяться и развиваться и метод исчерпывания. На основе интуитивного понятия предела появляются попытки создать общую теорию пределов. Так, И. Ньютон первый отдел книги «О движении тел» труда «Математические начала натуральной философии» посвящает своеобразной теории пределов под названием «Метод первых и последних отношений», которую берет за основу своего исчисления флюксий. В этой теории Ньютон взамен актуальным бесконечно малым предлагает концепцию «потенциальной» бесконечно малой, которая лишь в процессе своего изменения становится по абсолютной величине меньше любой положительной конечной величины. Точка зрения Ньютона была существенным шагом вперед в развитии представления о понятии предела, намечавшегося у математиков XVII в.; в XVIII в. оно постепенно все больше анализировалось и уточнялось (Л. Эйлер, Ж. Д'Аламбер, Л. Карно, братья Бернулли). В этот период оно служило лишь для попыток объяснить правильность дифференциального и интегрального исчисления и еще не являлось методом разработки проблем математического анализа.

Современная теория пределов начала формироваться в начале XIX в. в связи с изучением свойств различных классов функций, прежде всего непрерывных, а также в связи с попыткой доказательства существования ряда основных объектов математического анализа (интегралов функций действительных и комплексных переменных, сумм рядов, алгебраических корней и более общих уравнений и т. п.). Впервые в работах французского математика О. Коши понятие предела стало основой построения математического анализа. Им были получены основные признаки существования пределов последовательностей, основные теоремы о пределах и, что очень важно, дан внутренний критерий сходимости последовательности, носящий теперь его имя. Окончательно понятие предела последовательности и функции оформилось на базе теории действительного числа в работах чешского математика и философа Б. Больцано (1781–1848) и немецкого математика К. Вейерштрасса (1815–1897).

Слово limes для обозначения предела впервые употребил И. Ньютон, символ lim ввел С. Люилье (1750–1840) в 1786 г., выражение $\lim\limits_{n\to\infty}$ *первым записал У. Гамильтон в 1855 г.*

Примеры решения задач

1. Найдите область определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$.

Решение. При отыскании области определения X дробной функции нужно исключить значения аргумента, при которых знаменатель обращается в ноль. Учитывая, что аналитическое выражение функции содержит корень четной степени, то подкоренное выражение должно быть положительным.

Тогда $x + 3 > 0$, $x > -3$, следовательно, $X = (-3; +\infty)$.

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-6x+8}$.

Решение. Если $x \to \infty$, то числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности и мы получили выражение вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, которое называют неопределенностью. Выносим за скобки старшую степень переменной x и сокращаем на общий множитель:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x+8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{5x}{x^2}+\dfrac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{6x}{x^2}+\dfrac{8}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}}{2-\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{x^2}} = \frac{1-0+0}{2-0+0} = \frac{1}{2}.$$

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{-x^2+3x-2}$.

Решение. Предел числителя и знаменателя равен нулю, имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{-x^2+3x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x-2)}{-(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(1-x)} = \frac{2-3}{1-2} = 1.$$

4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-1}{2x+1}$.

Решение. Так как пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя отличен от нуля, то воспользуемся теоремой о пределах частного:

$$\lim_{x\to 5}\frac{3x^2-1}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 5}(3x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 5}(2x+1)}=\frac{3\lim\limits_{x\to 5}x^2-\lim\limits_{x\to 5}1}{2\lim\limits_{x\to 5}x+\lim\limits_{x\to 5}1}=\frac{3\cdot 5^2-1}{2\cdot 5+1}=\frac{74}{11}.$$

5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4}$.

Решение. Предел числителя и знаменателя равен нулю, имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{x+2}=\frac{2+5}{2+2}=\frac{7}{4}.$$

6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$.

Решение. Воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\operatorname{tg}x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

7. Докажите, что функция $\dfrac{7}{2x+5}$ является бесконечно малой при $x\to\infty$.

Решение. Вычислим $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{2x+5}$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+5)=\infty$, то $(2x+5)$ есть бесконечно большая величина, а обратная ей величина есть бесконечно малая. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{2x+5}=7\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x+5}=7\cdot 0=0$, следовательно, функция $\dfrac{7}{2x+5}$ является бесконечно малой при $x\to\infty$.

8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

Решение. Сделаем замену $x=2t$ и воспользуемся вторым замечательным пределом, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^2=e^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. По графику функции, изображенному на рис. 3.12, укажите:

а) область ее определения;

б) множество ее значений;

в) точки, в которых функция обращается в нуль;

г) промежутки возрастания и убывания функции.

2. Найдите область определения функции

$$y = \log_a \frac{3}{17 - x}.$$

3. Найдите указанные пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6x^2 - 3x + 2}{4x^2 + 2x - 3}$; д) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x - x^6}{x^2 - 2x + 5}$; е) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}$; ж) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}$;

г) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 + x - 10}$; з) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x + 3}{x} \right)^{-5x}$.

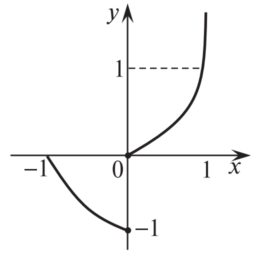


Рис. 3.12

Вопросы для самоконтроля

1. Какие величины называются постоянными, а какие — переменными? Дайте определение функции.
2. Что такое область определения функции? Что такое область значений функции?
3. Какие способы задания функции вы знаете? Что такое график функции?
4. Назовите основные элементарные функции.
5. Какая функция называется четной, а какая — нечетной? Приведите соответствующие примеры.
6. Какая функция называется монотонно возрастающей, а какая — монотонно убывающей? Приведите соответствующие примеры.
7. Дайте определение сложной функции и приведите соответствующий пример.
8. Приведите примеры функций из социально-экономической сферы.
9. Дайте определение предела функции.
10. Запишите основные теоремы о пределах функции.
11. Какие функции называются бесконечно большими? Какие функции называются бесконечно малыми? Перечислите основные свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций.
12. Неопределенности какого вида вы знаете? Как раскрываются эти неопределенности?

3.2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

3.2.1. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если существует предел функции в точке x_0, равный значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Последнее равенство означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Подчеркнем, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой точке, то согласно данному определению она определена в некоторой окрестности этой точки (обычной, а не проколотой, как это было в случае определения предела функции).

Замечание. *Так как* $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, *то равенство из определения непрерывной в точке функции можно записать в виде*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0),$$

т. е. для непрерывной функции символы предела и функции перестановочны.

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x \neq 0, \\ 1, x = 0 \end{cases}$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, так как она определена в этой точке, имеет в ней предел и

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0).$$

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases} x, x \leq 2, \\ x + 2, x > 2 \end{cases}$ определена в точке $x_0 = 2$, но не имеет предела в этой точке (рис. 3.13, *а*), поскольку

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = 2 \neq 4 = \lim_{x \to 2+0} f(x).$$

Следовательно, она не является непрерывной в точке $x_0 = 2$.

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 2, \\ 1, x = 2 \end{cases}$ определена в точке $x_0 = 2$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$, но не является непрерывной в этой точке, поскольку $f(2) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 2} f(x)$ (см. рис. 3.13, *б*).

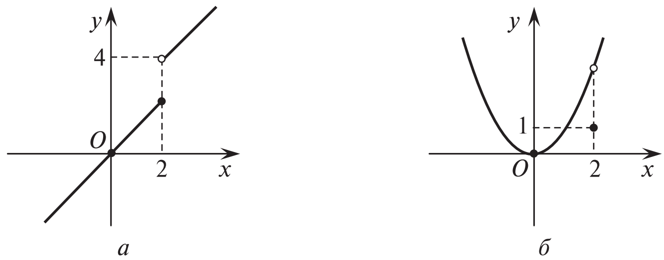


Рис. 3.13

Таким образом, для непрерывности функции $y = f(x)$ существенно выполнение трех условий:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;
2) функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;
3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Свойства функций, непрерывных в точке

Следует отметить, что свойства функций, непрерывных в точке, вытекают из определения непрерывности и соответствующих свойств предела функции в точке. Сформулируем свойства без доказательства.

1. Функция, непрерывная в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки.

2. Непрерывная функция, отличная от нуля в точке x_0, сохраняет знак в некоторой окрестности этой точки, т. е. если $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$, то существует $U(x_0)$ такая, что $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ для любого $x \in U(x_0)$.

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции

$$f(x) \pm g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x_0) \neq 0)$$

также непрерывны в точке x_0.

Непрерывность основных элементарных функций

1. Постоянная функция $f(x) = C$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$, поскольку

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} C = C = f(x_0).$$

2. Функция $f(x) = x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$, поскольку $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0)$.

3. Многочлен

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ \text{где } n \geq 0,\ n \in \boldsymbol{Z},\ a_i \in \boldsymbol{R},$$

есть функция, непрерывная в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Это следует из непрерывности функций $f(x)=C,\ f(x)=x$ и свойства 3 непрерывных в точке функций.

4. Дробно-рациональная функция, т. е. функция вида $g(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)},$ где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, непрерывна во всех таких точках $x\in \boldsymbol{R},$ в которых ее знаменатель не равен нулю.

5. Тригонометрические функции $y=\sin x,\ y=\cos x$ непрерывны во всех точках $x\in \boldsymbol{R}.$

6. Функция $y=\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна в точках, где $\cos x\neq 0,$ т. е. $x\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$

7. Функция $y=\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна в точках, где $\sin x\neq 0,$ т. е. $x\neq \pi+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$

8. Функция $y=a^x\ \ (a>0, a\neq 1)$ непрерывна при всех $x\in \boldsymbol{R}.$

9. Функция $y=\log_a x\ \ (a>0, a\neq 1)$ непрерывна при всех $x>0, x\in \boldsymbol{R}.$

3.2.2. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва функции и их классификация

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной слева (справа) в точке*** x_0, если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)\ \ \left(\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)\right).$$

Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} x,\ x\geq 0,\\ x+1,\ x<0\end{cases}$$

непрерывна справа в точке $x=0,\ \lim\limits_{x\to +0} f(x)=f(0)=0,$ и не является непрерывной слева в точке $x=0,$ поскольку $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=1\neq f(0)=0.$

Очевидно, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна и слева, и справа в этой точке, т. е. $f(x_0-0)=$ $=f(x_0+0)=f(x_0).$

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва функции*** $y=f(x),$ либо если функция не определена в самой точке x_0, либо если она определена в этой точке, но не является в ней непрерывной (т. е. нарушается по крайней мере одно из трех условий непрерывности функции п. 3.2.1).

Иными словами, точка x_0 является точкой разрыва функции, если x_0 является значением аргумента, при котором происходит «разрыв графика функции».

Все точки разрыва функции подразделяются на *точки разрыва первого и второго рода*.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва первого рода*** функции $y = f(x)$, если в этой точке пределы функции слева и справа (т. е. односторонние пределы) существуют и конечны и не равны значению функции в этой точке. Величина $\left| f(x_0+0) - f(x_0-0) \right|$ называется скачком функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Если пределы функции $y = f(x)$ слева и справа существуют, конечны и при этом $f(x_0-0) = f(x_0+0)$ (т. е. скачок функции в точке x_0 равен нулю), то точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***. Чтобы устранить разрыв функции в точке x_0, достаточно изменить значение функции только в одной этой точке. В этом случае говорят, что функция может быть доопределена по непрерывности в точке x_0.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва второго рода*** функции $y = f(x)$, если в этой точке по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Пример. Функция $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода, так как $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{|x|}{x} = -1$, $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{|x|}{x} = 1$. Скачок функции в точке $x = 0$ равен $|1-(-1)| = 2$.

Пример. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ при } x \neq 0, \\ 2, \text{ при } x = 0 \end{cases}$$

точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва, поскольку

$$\lim_{x\to-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Если положить $f(0) = 1$ (вместо $f(0) = 2$), разрыв устранится и функция станет непрерывной.

Пример. Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода, поскольку

$$\lim_{x\to-0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to+0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной на интервале*** (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и в точке a непрерывна справа, а в точке b – слева.

«Важные пределы»

Часто при вычислении пределов применяются следующие важные пределы:

$$\lim_{x\to0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e; \ \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \ \lim_{x\to0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha;$$

$$\lim_{x\to0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \ \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot 4=1\cdot 4=4.$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+x^3}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^3)^{1/5}-1}{x^3}=\dfrac{1}{5}.$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{16^x-4^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(4^x\left(\dfrac{4^x-1}{x}\right)\right)=4^0\ln 4=\ln 4.$

3.3. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

3.3.1. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной

Одним из основных понятий дифференциального исчисления является ***производная***, которая используется при исследовании процессов, в том числе социологических и экономических, описываемых функциями.

Рассматривая различные по характеру задачи, мы приходим к пределу одного вида, который очень часто используется в различных областях науки. Дадим общее определение производной.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X ($x\in X$). Выберем некоторую точку $x_0\in X$ и найдем значение функции в этой точке: $y_0=f(x_0)$. Дадим x_0 ***приращение аргумента*** Δx, $\Delta x\neq 0$ такое, чтобы $(x_0+\Delta x)\in U(x_0)$, и вычислим ***приращение функции*** $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, которое зависит от приращения аргумента Δx (рис. 3.14).

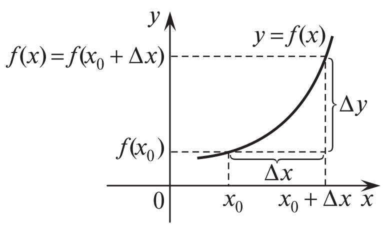


Рис. 3.14

Далее рассмотрим некоторые задачи, приводящие к понятию производной.

Задача о мгновенной скорости прямолинейного движения

Предположим, что точка M движется по некоторой прямой, которую примем за ось Ox. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM=x$. Следовательно, можно сказать, что абсцисса x движущейся точки есть функция времени t, т. е. $x=f(t)$. Это уравнение называется *уравнением движения*, оно выражает закон движения точки.

Найдем скорость движения точки в любой момент времени t.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка занимает положение M, причем $OM=x$. Наряду с моментом времени t рассмотрим более поздний момент времени $t+\Delta t$. За промежуток времени Δt между этими моментами точка проходит путь $\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t)$ (рис. 3.15).

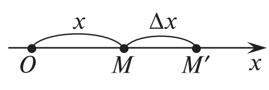


Рис. 3.15

Средняя скорость за промежуток времени равна

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Будем уменьшать длину промежутка времени Δt. Предел средней скорости $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ называется *мгновенной скоростью* в момент времени t:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Таким образом, если точка движется прямолинейно, то ее скорость в момент времени t равна пределу отношения приращения координаты точки к приращению времени, когда последнее стремится к нулю.

Задача о касательной

Дадим сначала определение касательной к кривой на плоскости.

Пусть L – некоторая непрерывная кривая, M_0 – точка этой кривой. Проведем через точку M_0 секущую M_0N (рис. 3.16). Когда точка N, двигаясь вдоль кривой, как угодно близко приближается к точке M_0, эта секущая, поворачиваясь около точки M_0, стремится к некоторому предельному положению M_0T. *Касательной к кривой L в точке M_0* называется предельное положение M_0T секущей M_0N, когда точка N стремится к точке M_0 вдоль данной кривой.

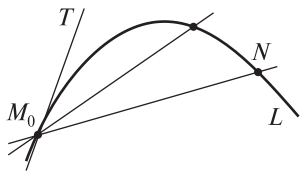


Рис. 3.16

Если секущая M_0N при $N \to M_0$ не имеет предельного положения, то говорят, что касательной к данной кривой в точке M_0 не существует.

Пусть $y = f(x)$ – некоторая непрерывная функция. Найдем уравнение касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Придадим абсциссе x_0 приращение Δx и от точки M_0 графика перейдем к точке N с абсциссой $x_0 + \Delta x$ и ординатой $y_0 + \Delta y$. Пусть M_0N – секущая, φ – угол наклона секущей к положительному направлению оси Ox (рис. 3.17).

Из треугольника M_0NB находим $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пусть точка N стремится к точке M_0 вдоль графика функции $y = f(x)$. Тогда $\Delta x \to 0$ и секущая M_0N стремится к своему предельному положению – касательной M_0T (мы предполагаем, что касательная существует). Пусть α – угол, который образует касательная M_0T с осью Ox. Тогда при $\Delta x \to 0$ $\varphi \to \alpha$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{N \to M_0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

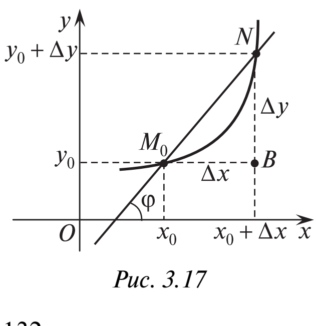


Рис. 3.17

Значит, если в точке $M_0(x_0, y_0)$ к графику функции $y = f(x)$ можно провести касательную, то ее угловой коэффициент

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Зная угловой коэффициент касательной, легко написать ее уравнение:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

В рассмотренных выше задачах по существу делалось одно и то же: приращение функции делилось на приращение независимой переменной, и затем вычислялся предел их отношения. Оказывается, что многие задачи приводят к необходимости вычисления такого же предела, поэтому имеет смысл специально заняться его изучением.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Придадим аргументу в точке x_0 ненулевое приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$. Тогда функция получит соответствующее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если этот предел существует.

Таким образом, производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 – это *число*, которое обозначается через $f'(x_0)$ (читается: эф штрих от x_0) или $y'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если производная существует во всех точках x из окрестности $U(x_0)$, то она является *функцией аргумента* x.

Производная имеет несколько обозначений: y', $f'(x_0)$, $\dfrac{dy}{dx}$.

Замечание. *Если для некоторого значения* x_0 *выполняется одно из условий* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, *то говорят, что в точке* x_0 *существует* ***бесконечная производная***, *равная соответственно* $+\infty$ *или* $-\infty$.

Из рассмотренных выше задач следует ***физический*** и ***геометрический смысл производной***.

Физический смысл производной: мгновенная скорость в момент времени равна производной от закона движения, т. е. $V(t_0) = f'(t_0)$.

Если рассматривать произвольную функцию $y = f(x)$, то ее производная характеризует скорость изменения переменной y по сравнению с переменной x. Чем больше модуль производной, тем резче изменяется функция y при изменении аргумента x и, следовательно, тем круче поднимается или опускается график этой функции.

Геометрический смысл производной: угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ равен значению производной данной функции в точке x_0.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной графика функции $y = f(x)$ в точке касания $M(x_0, f(x_0))$, называется *нормалью*. Так как угловые коэффициенты k_1 и k_2

перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1k_2=-1$, то отсюда, предполагая, что $f'(x_0)\neq 0$, получаем уравнение нормали: $y=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$.

Пример. Пользуясь определением, найти производную функции $f(x)=x^2+x$ в точке $x_0=2$. Составить уравнение касательной к графику данной функции в точке $x_0=2$.

Решение. По определению производной получаем

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2+(2+\Delta x)-(2^2+2)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+5\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+5)=5.$$

Пользуясь уравнением касательной $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, имеем

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)=5(x-2)+2^2+2=5x-4.$$

Таким образом, уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+x$ в точке $x_0=2$ имеет вид $y=5x-4$.

Используя понятия односторонних пределов функции, введем понятия правой и левой производных функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Правой производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 (производной справа) называется предел

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Левой производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 (производной слева) называется предел

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Это ***односторонние производные***.

Замечание. *Функция $y=f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда односторонние производные $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ существуют и равны между собой, причем $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.*

Пример. Функция $y=|x|$ имеет в точке $x_0=0$ правую производную

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{|\Delta x+0|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

и левую производную

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{|\Delta x+0|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

но не имеет производной $f'(x_0)$, поскольку $f'_+(x_0)\neq f'_-(x_0)$.

В дальнейшем под выражением «функция имеет производную» будем понимать наличие *конечной производной*, если не оговорено иное.

Функция, имеющая производную в данной точке, называется ***дифференцируемой в этой точке***. Операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке, то она и непрерывна в ней.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0. Тогда существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha, \text{ или } \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$ (см. п. 3.14).

Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0)\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} (\alpha\Delta x) = 0,$$

а это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечание. *При доказательстве теоремы мы установили, что если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение в этой точке выражается формулой*

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$

Замечание. *Обратное утверждение предыдущей теоремы не всегда верно: непрерывная в данной точке функция может не иметь в ней производной.*

Например, функция $y = |x - 1|$ непрерывна в точке $x_0 = 1,$ но не является в ней дифференцируемой.

3.3.2. Основные правила дифференцирования

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (при $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место следующие равенства:

1) $(u + v)' = u' + v'$;
2) $(u - v)' = u' - v'$;
3) $(uv)' = u'v + uv'$;
4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}.$

Рассмотрим примеры нахождения производных элементарных функций.

1. $f(x)=C$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0, \text{ т. е. } C'=0.$$

Таким образом, *постоянный множитель можно выносить за знак производной*:

$$(Cu)'=Cu'.$$

2. $f(x)=x^{\alpha}$, α – действительное число.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=x^{\alpha}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}x}=x^{\alpha}\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1},$$

т. е. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$. Отметим частные случаи этой формулы:

$$(x)'=1,\ \left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

3. $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a,$$

т. е. $(a^x)'=a^x\ln a$. В частности, $(e^x)'=e^x$.

4. $f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}x}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a},$$

т. е. $\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$. В частности, $\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$.

5. Тригонометрические функции:

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x,$$

$$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$. Отсюда

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\mathrm{ctg}\,x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример. Найти производные функций:

1) $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1$;
2) $y = x\sin x$;
3) $y = \dfrac{x+1}{x^2+2}$.

Решение. Используя основные правила дифференцирования и формулы для производных элементарных функций, имеем:

1) $(x^7 - 4x^5 + 2x - 1)' = 7x^6 - 4\cdot 5x^4 + 2\cdot 1 - 0 = 7x^6 - 20x^4 + 2$;

2) $(x\sin x)' = (x)'\sin x + x(\sin x)' = \sin x + x\cos x$;

3) $\left(\dfrac{x+1}{x^2+2}\right)' = \dfrac{(x+1)'(x^2+2) - (x+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \dfrac{1(x^2+2) - (x+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2} =$

$$= \frac{x^2 + 2 - 2x^2 - 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2 + 2 - 2x}{(x^2+2)^2}.$$

Пример. Найти угол φ между положительным направлением оси абсцисс и касательной к параболе $y = x^2 - 5x - 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Решение. Так как $y' = 2x - 5$, то $y'(3) = 1$. Поэтому для искомого угла φ имеем $\mathrm{tg}\,\varphi = 1$, откуда находим $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Примеры. Вычислить производные следующих функций.

1. $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 6$,

$$f'(x) = 5(x^3)' + 2(x^2)' - 3(x)' + 6' = 5\cdot 3x^2 + 2\cdot 2x - 3\cdot 1 + 0 = 15x^2 + 4x - 3.$$

2. $f(x) = x\cos x$,

$$f'(x) = x'\cos x + x(\cos x)' = 1\cdot\cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x.$$

3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $f'(x) = \dfrac{(\ln x)'x - x'\ln x}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot\ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

3.3.3. Производная сложной функции. Производная обратной функции

Пусть функция $u = g(x)$ задана в некоторой окрестности $U = U(x_0)$ точки x_0, а функция $y = f(u)$ – в некоторой окрестности $V = V(x_0)$ точки $u_0 = g(x_0)$, причем V содержит множество $g(U)$. Тогда определена ***сложная функция*** $y = f(g(x))$ с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Теорема. Если функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(u)$ – в точке $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем

$$y'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Таким образом, для нахождения производной сложной функции надо *производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу*:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = g(x)$, то $y'_x = y'_u u'_v v'_x$.

Пример. Найти производную функции $y = \sin(5x+2)$.

Решение. Данная функция является сложной. Ее можно представить так: $y = \sin u$, где $u = 5x+2$. Поскольку $y'_u = \cos u = \cos(5x+2)$, $u'_x = 5$, то по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$y'_x = y'_u u'_x = 5\cos(5x+2).$$

Пример. Найти производную функции $y = \sin^3(5x+2)$.

Решение. Представим данную функцию в виде $y = u^3$, где $u = \sin v$, $v = 5x+2$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = 3u^2 \cos v \cdot 5 = 15\sin^2(5x+2)\cos(5x+2).$$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале (a, b) и имеет производную $f'(x_0) \neq 0$ в произвольной точке x_0 этого интервала, то обратная ей функция $x = g(y)$ существует и также имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Приведем формулы для вычисления производных обратных тригонометрических функций.

1. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 \le x \le 1.$
2. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 \le x \le 1.$
3. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \boldsymbol{R}.$
4. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \boldsymbol{R}.$

Докажем первую формулу, т. е. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 \le x \le 1.$

Пусть $y = \arcsin x$. Обратная ей функция имеет вид $x = \sin y$, $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. На интервале $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ верно равенство $x'_y = \cos y \ne 0$. По правилу дифференцирования обратных функций

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

где перед корнем взят знак плюс, так как $\cos y > 0$ при $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

В точках $x = \pm 1$ имеем $(\arcsin x)' = +\infty$.

3.3.4. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда ее приращение, как было сказано ранее в п. 3.3.1, в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

При достаточно малых значениях Δx и $f'(x_0) \ne 0$ основной вклад в эту сумму вносит первое слагаемое $f'(x_0)\Delta x$, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$, т. е. величина $\alpha \Delta x$ сколь угодно мала по сравнению с Δx при $\Delta x \to 0$. Первое слагаемое пропорционально Δx и, следовательно, линейно зависит от Δx.

Говорят, что слагаемое $f'(x_0)\Delta x$ является главной линейной частью приращения функции $y = f(x)$ в точке x_0, и называют его ***дифференциалом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0.

Обозначают дифференциал через dy или $df(x_0)$. Таким образом,

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

Для функции $y = x$ получаем $dy = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$. Поэтому предыдущую формулу можно переписать в виде

$$dy = f'(x_0)dx,$$

откуда $f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}$, или, более кратко, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ (читается: «игрек штрих равно дэ игрек по дэ икс»). Это означает, что *производная функции равна отношению дифференциала данной функции к дифференциалу ее аргумента*.

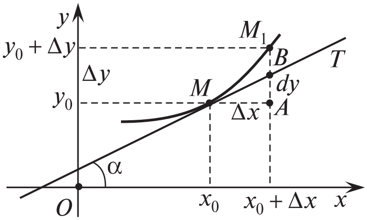


Рис. 3.18

Замечание. *Дифференциал функции можно определить и так. Если приращение функции $y=f(x)$ в точке x_0 представимо в виде $\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x$, где A – постоянная, то $dy = A\Delta x$, а сама функция называется дифференцируемой в точке x_0.*

Дифференциал функции в точке имеет простой геометрический смысл. Проведем к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ касательную MT и рассмотрим ординату этой касательной для точки $x_0+\Delta x$ (рис. 3.18).

На рисунке $|AM| = \Delta x$, $|AM_1| = \Delta y$. Из прямоугольного треугольника MAB имеем $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{|AB|}{\Delta x}$, т. е. $|AB| = \operatorname{tg}\alpha\Delta x$. Но согласно геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Поэтому имеет место равенство $|AB| = f'(x_0)\Delta x$, т. е. $|AB| = dy$.

Таким образом, дифференциал функции $y=f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x_0 получает приращение Δx.

Процесс нахождения дифференциала функции, как и производной, называется ***дифференцированием*** и осуществляется по тем же правилам, что и для производных:

1) $d(u+v) = du + dv$;
2) $d(u-v) = du - dv$;
3) $d(uv) = vdu + udv$;
4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, $v \neq 0$.

Пример. Найти дифференциал функции $y = \cos x + x\sin x$.

Решение

$$dy = d(\cos x) + d(x\sin x) = -\sin xdx + \sin xdx + xd(\sin x) = x\cos xdx.$$

3.3.5. Основные теоремы дифференциального исчисления

Рассмотрим практическую сторону применения производной. Следует отметить, что в этом разделе мы рассмотрим только выборочно теоремы дифференциального исчисления, необходимые будущему социологу в профессиональной деятельности. Для более подробного и углубленного изучения данного вопроса необходимо смотреть и изучать специализированную математическую литературу.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале (a, b).

Точка $x_0 \in (a, b)$ называется ***точкой локального минимума (локального максимума)*** функции $y=f(x)$, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для любого $x \in U(x_0)$ выполнено условие $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$). Точки локального минимума и локального максимума называются ***точками экстремума***, а значения функции в них – ***экстремумами функции***.

Отметим, что точки минимума и максимума функции имеют *локальный характер*, в силу чего значения функции в точках минимума могут оказаться больше ее значений в точках максимума. Так, на рис. 3.19 точки x_1 и x_3 являются точками максимума функции, а x_2 и x_4 – точками минимума функции. Значение функции в точке максимума x_1 меньше ее значения в точке минимума x_4.

Необходимое условие экстремума функции выражается следующей теоремой.

Теорема (Ферма). Пусть x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$ и существует производная $f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ферма имеет следующий геометрический смысл: если x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$ и существует $f'(x_0)$, то касательная, проведенная к графику данной функции в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси *Ox* (рис. 3.20). В самом деле, в этом случае угловой коэффициент касательной равен нулю: $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = 0$.

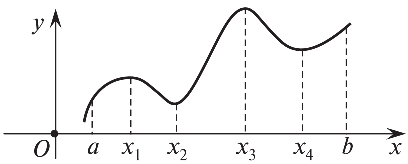


Рис. 3.19

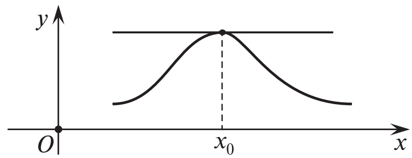
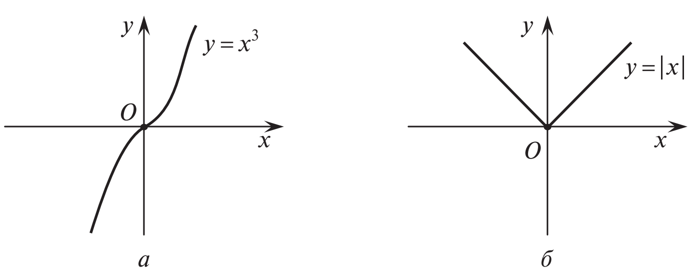


Рис. 3.20

Замечание. *Условие* $f'(x_0) = 0$ *является необходимым, но не достаточным условием экстремума функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0. *Например, функция* $y = x^3$ *в точке* $x_0 = 0$ *имеет производную, равную нулю, но* $x_0 = 0$ *не является точкой экстремума данной функции* (рис. 3.21, *а*).

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ производной не имеет, но $x_0 = 0$ является точкой минимума данной функции (рис. 3.21, *б*).



а *б*

Рис. 3.21

Точки, в которых производная функции не существует или равна нулю, называют ***критическими точками*** или ***точками, подозрительными на экстремум***. Точки, в которых производная функции равна нулю, называют ***стационарными точками***.

Напомним, что функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** на интервале (a, b), если для любых значений x_1 и x_2, принадлежащих данному интервалу, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Возрастающие и убывающие функции называются ***монотонными***.

Одна из основных задач исследования функции – это нахождение промежутков ее возрастания и убывания. Исследование на монотонность легко провести с помощью производной. Рассмотрим только одно достаточное условие возрастания (убывания) функции, в котором используется понятие производной.

Теорема (*достаточное условие возрастания (убывания) функции*). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для любого $x \in (a, b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a, b).

Данная теорема имеет простой геометрический смысл. Если на некотором интервале касательная к графику функции $y = f(x)$ образует с осью *Ox* острый угол α $(\mathrm{tg}\,\alpha > 0)$, то функция возрастает на этом интервале (рис. 3.22, *а*). Если касательная к графику образует с осью *Ox* тупой угол α $(\mathrm{tg}\,\alpha < 0)$, то функция убывает (рис. 3.22, *б*).

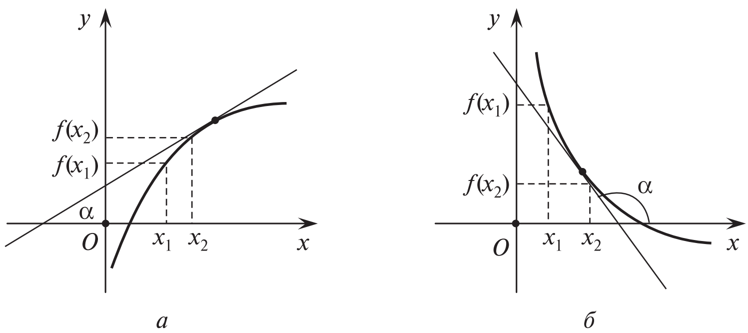


Рис. 3.22

Пример. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Решение. Данная функция определена на всей числовой прямой. Найдем ее производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Таким образом, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$. Следовательно, функция возрастает на интервалах $x \in (-\infty; -1) \cup$ $\cup (1; +\infty)$ и убывает на интервале $x \in (-1; 1)$.

Теорема (первое достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой ε-окрестности точки x_0. Если в точке $x = x_0$ производная функции $y = f(x)$ равна нулю и при переходе через эту точку меняет знак, то x_0 является точкой экстремума, причем x_0 – точка максимума, если знак производной меняется с плюса на минус (т. е. $f'(x) > 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$), и x_0 – точка минимума, если знак производной меняется с минуса на плюс (т. е. $f'(x) < 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$).

Замечание. *Теорема (первое достаточное условие экстремума) остается верной и в случае, если x_0 – точка непрерывности функции и производная в ней не существует, но меняет знак при переходе через данную точку.*

Пример. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ на промежутке [0; 2].

№	План нахождения $y_{\text{наим}}$ и $y_{\text{наиб}}$ на промежутке $[a; b]$	Применение плана
1	Находим производную функции, т. е. y'	$y'(x) = 4x^3 - 4x$
2	Находим критические точки функции	$y'(x) = 0,\ 4x^3 - 4x = 0,\ 4x(x^2 - 1) = 0,$ $x = 0, x = 1, x = -1$ – критические точки функции
3	Выбираем критические точки, лежащие внутри данного промежутка $[a; b]$	$0 \in [0; 2],\ 1 \in [0; 2],\ -1 \notin [0; 2]$
4	Находим значения функции в критических точках (принадлежащих промежутку) и на концах промежутка	$y(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = -3,$ $y(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 - 3 = -4,$ $y(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 - 3 = 5$
5	Из найденных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее	$y_{\text{наим}} = y(1) = -4,$ $y_{\text{наиб}} = y(2) = 5$

Ниже мы рассмотрим задачи из социально-экономической сферы, которые приводят к понятию производной.

3.3.6. Экономический смысл производной. Предельные величины в экономической сфере

Теоретический анализ разнообразных явлений экономики использует ряд предельных величин. Перечислим лишь некоторые из них: предельная стоимость, предельные издержки, предельный доход, предельная производительность, предельная полезность, предельная склонность к потреблению. Все эти величины самым тесным образом связаны с понятием производной.

Производительность труда. Пусть функция $Q(t)$ выражает количество произведенной продукции за время t. Найдем производительность труда в момент времени t_0.

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $Q(t_0)$ до $Q(t_0 + \Delta)$, т. е. на $\Delta Q = Q(t_0 + \Delta) - Q(t_0)$; тогда средняя производительность труда за этот период времени $u_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$.

Под производительностью труда в момент времени t_0 естественно понимать предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$u(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} u_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Таким образом, производительность труда – это скорость роста объема продукции.

В случае дифференцируемой функции $Q(t)$ вычисление производительности труда $u(t_0)$ в момент времени t_0 сводится к нахождению производной функции $Q(t)$ в точке t_0, т. е.

$$u(t_0) = Q'(t_0).$$

Предельный доход. Пусть функция $R(q)$ показывает зависимость дохода R от продажи продукции объема q. Рассуждения, аналогичные предыдущим, приведут к следующей формуле:

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta q} = R'(q).$$

Величина $R'(q)$ определяет предельный доход, который еще называют ***маржинальным*** и обозначают MR, т. е. $MR = R'(q)$.

Предельный продукт. Пусть функция $Q(x)$ выражает зависимость количества произведенной продукции от величины затрат x.

Отношение $\dfrac{\Delta Q}{\Delta x}$ есть средняя величина продукта, соответствующая величине затрат в размере Δx. Под предельным продуктом при затратах x_0 в экономике понимают следующий предел:

$$MQ(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} Q_{cp} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x}.$$

В случае дифференцируемой функции $Q(x)$ вычисление величины предельного продукта $MQ(x)$ при затратах x сводится к нахождению производной функции $Q(x)$ в точке x, т. е.

$$MQ(x) = Q'(x).$$

Предельная величина характеризует не состояние (как суммарная или средняя величины), а процесс, изменение экономического объекта. Таким образом, предельная величина выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса). Определение предельных величин с помощью понятия производной позволяет использовать математический аппарат для доказательства экономических законов.

3.3.7. Примеры использования производной в социологии

Пример. Количество продукции $Q(t)$, произведенной рабочим в течение дня, выражается функцией $Q(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50,$ где t – время в часах, причем $1 \le t \le 8.$ Необходимо вычислить производительность труда через 1 ч после начала работы и за 1 ч до окончания рабочего дня.

Решение. Производительность труда $u(t)$ выражается формулой $u(t) = Q'(t),$ тогда $u(t) = Q'(t) = -2{,}5t^2 + 15t + 100.$ Производительность труда через 1 ч после начала работы определяется как $u(1)$: $u(1) = -2{,}5 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + {}$ ${} + 100 = 112{,}5,$ т. е. через 1 ч после начала работы производительность труда равна 112,5 усл. ед. продукции в час. Производительность труда за 1 ч до окончания рабочего дня определяется как $u(7)$: $u(7) = -2{,}5 \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 82{,}5$ усл. ед. продукции в час.

Эластичность функции

Понятие эластичности было введено Альфредом Маршаллом в связи с анализом функции спроса. Впоследствии это понятие было распространено и на другие функции.

Эластичностью функции называется предел отношения относительного приращения функции $y = f(x)$ к относительному приращению переменной x, если приращение аргумента стремится к нулю $\Delta x \to 0$. Эластичность функции обозначается $E_x(y)$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}y';$$

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y'.$$

Вывод: эластичность – это коэффициент пропорциональности между относительными изменениями величин y и x. Если, например, x увеличится на один процент, то y увеличится (приближенно) на $E_x(y)$ процентов.

Эластичность спроса относительно цены. Пусть спрос q зависит от цены p по закону $q = q(p)$. Функция $E_p(q) = \frac{p}{q}q'$ показывает, как изменится спрос на данный товар, если цена изменится на 1 %. Так как обычно $q' < 0,$ т. е. с увеличением цены спрос уменьшается, то $E_p(q)$ берут со знаком «–», т. е.

$$E_p(q) = -\frac{p}{q}q'.$$

Если $\left|E_p(q)\right| > 1,$ то говорят, что спрос эластичен, а если $\left|E_p(q)\right| < 1,$ то неэластичен, если же $\left|E_p(q)\right| = 1,$ то спрос нейтрален.

Эластичность предложения относительно цены. Пусть количество товара s, предлагаемого на продажу в единицу времени, зависит от цены p по закону $s = s(p)$. Функция $E_p(s) = -\frac{p}{s}s'$ показывает, как изменится предложение, если цена на товар изменится на 1 %.

Пример. Найдите эластичность спроса q относительно цены p, если $q(p) = -2p^2 + 3p + 8,$ при $p = 1, p = 2.$

Решение. Эластичность спроса относительно цены найдем по формуле $E_p(q) = -\frac{p}{q}q'.$ Найдем производную $q'(p) = \left(-2p^2 + 3p + 8\right)' = -4p + 3.$ Получаем

$$E_p(q) = -\frac{p}{-2p^2 + 3p + 8}(-4p + 3) = -\frac{-4p^2 + 3p}{-2p^2 + 3p + 8}.$$

При $p = 1$ получаем $E_1(q) = -\frac{-4+3}{-2+3+8} = \frac{1}{9},$ т. е. спрос неэластичен.

При $p = 2$ получаем $E_2(q) = -\frac{-4\cdot 2^2 + 3\cdot 2}{-2\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 8} = 1\frac{2}{3},$ т. е. спрос эластичен.

Пример. Правильное применение знаний об эластичности спроса на товары помогает правительству в оценке последствий введения новых налогов или акцизов. Пусть x – акцизы на табачные изделия, y – спрос на этот товар. Предположим, что государство предполагает повысить акцизы на табачные изделия на 10 %. Если известно, что эластичность спроса составляет $E_x(y) = -0{,}2,$ то следует ожидать, что это вызовет снижение спроса на данный товар на 0,2 · 10 = 2 % и доходы государства по продаже табачных изделий повысятся на 8 %.

Исторические сведения

Отдельные задачи об определении касательных к кривым были решены еще математиками Древней Греции. Например, были найдены способы построения касательных к коническим сечениям и некоторым другим кривым. Однако разработанные античными математиками методы были применимы лишь в весьма частных случаях и далеки от идей дифференциального исчисления.

Понятие производной возникло в XVII в., задолго до построения строгой теории пределов. Формирование понятия исторически связано с двумя задачами: проведения касательной к кривой и нахождения скорости движения.

Французский математик и юрист П. Ферма не позднее чем в 1629 г. предложил способы проведения касательных к произвольным кривым, которые, по существу, основывались на применении производных. Другой французский математик и философ Р. Декарт разработал к 1637 г. метод координат и основы аналитической геометрии. Научная переписка между ними помогла выработать общее понятие касательной, понимаемое как предельное положение секущей.

Работы Р. Декарта и П. Ферма способствовали открытию интегрального исчисления и его постепенному обоснованию.

В 1666 г. английский ученый И. Ньютон и независимо от него несколько позднее немецкий математик Г. Лейбниц разработали теорию производных, получившую название дифференциального исчисления. И. Ньютон, исходя из вопросов механики, представлял аргумент функции как время, функцию времени называл флюентой (т. е. текущей величиной), а ее производную рассматривал как скорость течения (т. е. изменения) функции и называл флюксией. И. Ньютон обозначал функции последними буквами латинского алфавита u, x, y, z, а их флюксии, т. е. производные от флюент по времени, – соответственно теми же буквами с точкой над ними, т. е. $\dot{u}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Терминология И. Ньютона (флюенты, флюксии) и его символы производной утратили свое значение. Лишь в физике в некоторых случаях производные по времени обозначают точками над буквами.

В середине 70-х гг. XVII в. Г. Лейбниц разработал очень удобный алгоритм дифференциального исчисления. Дальнейшее развитие дифференциального исчисления шло сначала по пути, намеченному Лейбницем; большую роль на этом этапе сыграли работы братьев Якоба и Иоганна Бернулли, английского математика Брука Тейлора (1685–1731) и др.

Следующим этапом в развитии дифференциального исчисления были работы Л. Эйлера и Ж. Лагранжа (XVIII в.). Эйлер впервые стал излагать его как аналитическую дисциплину, независимо от геометрии и механики. Он вновь выдвинул в качестве основного понятия дифференциального исчисления производную. Лагранж пытался строить дифференциальное исчисление алгебраически, пользуясь разложением функций в степенные ряды; ему, в частности, принадлежит введение термина «производная» и обозначения y' и $f'(x)$. В начале XIX в. была удовлетворительно решена задача обоснования дифференциального исчисления на основе теории пределов. Это было выполнено главным образом благодаря работам О. Коши, Б. Больцано и К. Гаусса. Более глубокий анализ исходных понятий дифференциального исчисления был связан с развитием теории множеств и теории функций действительной переменной в конце XIX – начале XX в.

Вопрос о взаимосвязи между непрерывностью функции и ее дифференцируемостью сыграл важную роль в проблеме строгого обоснования математического анализа. Дело в том, что в течение XVII, XVIII и первой половины XIX в. математики считали, что любая непрерывная функция имеет производную. Это утверждение основывалось на том, что непрерывную кривую представляли как траекторию движения тела, а производная – это скорость движения, тогда естественно считать, что всякое движение совершается с некоторой скоростью. Немецкий математик К. Вейерштрасс в 1875 г. построил пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке. Геометрически это значит, что кривая непрерывна, но ни в одной точке не имеет касательной.

Примеры решения задач

1. Найдите по определению производную функции $f(x)=x^2$ в точке x.
Решение. Воспользуемся формулой

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}:$$

1) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=$
$=2x\Delta x+(\Delta x)^2;$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=2x+\Delta x;$

3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$

Таким образом, $f'(x)=(x^2)'=2x.$

2. Найдите производную следующих функций:

1) $y=2x^3-4x^2+5x-3.$

Решение.

$$y'=(2x^3-4x^2+5x-3)'=(2x^3)'-(4x^2)'+(5x)'-(3)'=$$
$$=2(x^3)'-4(x^2)'+5(x)'=6x^2-8x+5;$$

2) $y=(2x+3)\sin x.$

Решение.

$$y'=\big((2x+3)\sin x\big)'=(2x+3)'\sin x+(2x+3)(\sin x)'=2\sin x+(2x+3)\cos x;$$

3) $y=\dfrac{x^3}{\cos x}.$

Решение.

$$y'=\left(\frac{x^3}{\cos x}\right)'=\frac{(x^3)'\cos x-x^3(\cos x)'}{(\cos x)^2}=$$
$$=\frac{3x^2\cos x-x^3(-\sin x)}{(\cos x)^2}=\frac{x^2(3\cos x+x\sin x)}{\cos^2 x};$$

4) $y=\dfrac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}.$

Решение. Преобразуем исходную функцию к следующему виду:

$$y=\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2xx^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}=2xx^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}=2x^{\frac{7}{6}},$$

$$y' = \left(2x^{\frac{7}{6}}\right)' = 2 \cdot \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}-1} = \frac{7}{3}x^{\frac{1}{6}} = \frac{7}{3}\sqrt[6]{x};$$

5) $y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. Преобразуем исходную функцию к следующему виду $y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}} = 4x^{-\frac{2}{3}}$, тогда

$$y' = \left(4x^{-\frac{2}{3}}\right)' = 4\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = 4\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{8}{3x^{\frac{5}{3}}} = -\frac{8}{3x\sqrt[3]{x^2}}.$$

3. Вычислите эластичность функции $y = 3x - 6$ при: а) $x = 10$; б) $x = 1$.

Решение. Находим производную $y = (3x-6)' = 3$, тогда

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y' = \frac{x}{3x-6} \cdot 3 = \frac{x}{x-2};$$

а) при $x = 10$ имеем $E_{10}(y) = \dfrac{10}{10-2} = \dfrac{10}{8} = 1{,}25.$ Это означает, что если x возрастет на 1 % (т. е. с 10 до 10,01), то значение y увеличится на 1,25 %;

б) при $x = 1$ имеем $E_1(y) = \dfrac{1}{1-2} = -1.$ Это означает, что если x увеличится на 1 % (т. е. с 1 до 1,01), то y уменьшится на 1 %.

4. Выясните, как изменится выручка продавца с увеличением цены товара при различных вариантах эластичности спроса.

Решение. Пусть цена товара равна p, а величина спроса составляет q, причем $q = q(p)$. Тогда выручка U равна произведению цены товара p на количество проданных единиц товара (на величину спроса) q, т. е. $U = qp = q(p)p$. Эластичность выручки относительно цены равна

$$E_p(U) = E_p(qp) = E_p(q) + E_p(p) = E_p(q) + 1,$$

где $E_p(q)$ – эластичность спроса по цене. Так как эластичность спроса по цене отрицательна, то $E_p(U) = E_p(q) + 1 = 1 - \left|E_p(q)\right|$.

Возможны следующие варианты:

а) $\left|E_p(q)\right| > 1$ (т. е. спрос эластичен), тогда $E_p(U) < 0$. Это означает, что изменение выручки происходит в направлении, противоположном изменению цены, т. е. при эластичном спросе повышение цены p ведет к уменьшению выручки U, а снижение цены на товар увеличивает выручку;

б) $\left|E_p(q)\right| = 1$ (т. е. спрос нейтрален), тогда $E_p(U) = 0.$ Это означает, что изменение цены товара не влияет на выручку;

в) $\left|E_p(q)\right| < 1$ (т. е. если спрос неэластичен), тогда $E_p(U) > 0.$ Это означает, что в этом случае изменение цены товара вызывает изменение выручки в том же направлении. Повышение цены товара ведет к увеличению выручки. Таким образом, продавцу выгодно повышать цену, что приведет к увеличению выручки.

5. Как изменится спрос на товар, если эластичность спроса относительно дохода равна $E_r(q) = 3{,}15,$ а доход увеличится с 1000 до 1042 ден. ед.?

Решение. Величина $E_r(q) = 3{,}15$ показывает, что если доход *r* увеличится на 1 %, то спрос увеличится на 3,15 %.

Из условия задачи получаем, что доход увеличился на

$$\frac{1042 - 1000}{1000} \cdot 100\,\% = 4{,}2\,\%.$$

Следовательно, спрос при этом увеличится на 4,2 · 3,15 = 13,23 %.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите по определению производные функции в точках $x_0 = 1$, $x_0 = 2$:

а) $y = 3x^2 + x - 2;$

б) $y = x^2 - 2x + 10;$

в) $y = -5x^2 + 6x + 1.$

2. Найдите производные следующих функций:

а) $y = 4x^3 - 5x^2 - \dfrac{6}{x} + 10;$

б) $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1;$

в) $y = \dfrac{1}{x^3} - \sqrt{x} - x^2;$

г) $y = \sin x \ln x + x^3 - \sqrt{x} + 4;$

д) $y = (4x^3 - 5x^2 - 6) \cdot \cos x;$

е) $y = x \sin x;$

ж) $y = (x^2 + 1) \cdot \cos x;$

з) $y = (x^3 + 2) \cdot \sqrt{x};$

и) $y = \dfrac{2x - 1}{x + 2};$

к) $y = \dfrac{\ln x}{x};$

л) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2}.$

3. Напишите уравнения касательных к графикам функции в точке $x_0 = 2$:

а) $y = x^2 + 6x + 1;$

б) $y = -3x^2 - x + 2;$

в) $y = 2x^2 - 4x + 3.$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

а) $f(x)=x^3+3x-5$ на отрезке $[-2; 2]$;

б) $f(x)=2x-\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 4]$.

5. Функция полных издержек производства имеет вид $K=K(x)$, где x – объем продукции в условных единицах для данного производства. Определите, при каком объеме производства продукции средние издержки $K_{\text{сред}}=\dfrac{K(x)}{x}$ имеют наименьшее значение:

а) $K(x)=x^3-6x^2+15x$; б) $K(x)=x^3-3x+5$.

6. Рассчитайте эластичность следующих функций:

а) $y=x^3+1,\ x_0=5, x_0=1$; в) $y=1+2x-x^2,\ x_0=10, x_0=1$;

б) $y=5\ln x,\ x_0=e$; г) $y=\dfrac{2x+1}{x^2+1},\ x_0=1$.

7. Найдите эластичность спроса q относительно цены p, если $q(p)=$ $=-3p^2+4p+5,$ при $p=1, p=2$.

8. Функция спроса имеет вид $q(p)=-p^2+p+2$. Оцените эластичность спроса по цене при цене $p=1$.

9. Функция q спроса относительно дохода r имеет вид $q(r)=4+1{,}2r+$ $+0{,}44r^2$. Как изменится спрос, если доход изменяется: 1) от 100 до 150; 2) от 100 до 90?

10. Дана функция $q=\dfrac{p^3}{2p^2+7}$, выражающая зависимость спроса q от цены p. Найдите эластичность спроса относительно цены. Вычислите частное значение эластичности при указанном значении цены $p_0=1$. Как увеличение цены повлияет на выручку?

11. Объем продукции u, выпускаемой рабочим в течение рабочего дня, выражается функцией $u(t)=-\dfrac{5}{48}t^3+\dfrac{5}{4}t^2$, где t – время (ч). Вычислите производительность труда и скорость ее изменения в конце пятого часа работы.

12. Под экспериментальные посадки ценных культур решили отгородить участок прямоугольной формы длиной 144 м и шириной 24 м, а затем разделить его пополам перпендикулярно длине. Но с целью экономии средств на постройку забора решили найти наиболее выгодный размер участка. Найдите длину и ширину нового участка такой же площади и экономию средств, если 1 погонный метр забора стоит 2,25 доллара.

13. Под посевы элитных культур выделили земельный участок прямоугольной формы площадью 3,24 га и вдоль всей границы окопали рвом. Найдите размер участка, чтобы стоимость рва была наименьшей. Вычислить наименьшую стоимость рва, если погонный метр его обходится в 0,5 усл. ед.

14. Расходы на топливо для парохода делятся на две части. Первая из них A не зависит от скорости и равна 480 тыс. рублей в час. А другая часть S^* расходов пропорциональна кубу скорости (т. е. равна kv^3), причем при скорости 10 км/ч расходы составляют 30 тыс. рублей в час. При какой скорости общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей?

15. Океанское пассажирское судно движется со скоростью 12 узлов. Стоимость топлива S^*, необходимого для движения судна, пропорциональна кубу его скорости (т. е. равна kv^3) и составляет 200 усл. ед. в час при скорости 10 узлов. Все другие виды расходов A составляют 500 усл. ед. в час. Найдите экономию средств при движении с наиболее выгодной скоростью, если до порта назначения 1000 морских миль (1 узел = 1 морская миля в час).

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение производной функции. Что такое дифференцирование функции? Какая функция называется дифференцируемой в точке?
2. Геометрический и физический смысл производной функции.
3. Как вычислить производную на основе ее определения?
4. Как используется понятие мгновенной скорости в социально-экономической сфере?
5. Запишите основные правила дифференцирования функций.
6. Выпишите таблицу производных основных элементарных функций.
7. Дайте определение дифференциала функции. Геометрический смысл дифференциала функции.
8. Экстремумы функции. Необходимое и достаточное условия экстремума функции.
9. Что такое эластичность функции? Кем было введено данное понятие?
10. Как найти эластичность спроса относительно цены? Что показывает данная функция?
11. Как найти эластичность предложения относительно цены? Что показывает данная функция?

3.4. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

3.4.1. Первообразная. Понятие неопределенного интеграла

Во многих вопросах науки приходится восстанавливать функцию по известной ее производной, т. е., зная функцию $F'(x) = f(x)$, нужно найти функцию $F(x)$. Для решения таких задач служит операция ***интегрирования***, обратная операции дифференцирования, а раздел математического анализа, изучающий способы нахождения функции по ее производной, называют *интегральным исчислением*.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной функции*** $f(x)$ на некотором интервале (a; b), если для любого $x \in (a; b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример. Пусть $f(x) = 3x^2$, тогда $F(x) = x^3$, так как $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$.

Иногда не указывают конкретно, на каком интервале рассматривается вопрос о первообразной данной функции $f(x)$. В таких случаях предполагается, что речь идет о максимальном промежутке, на котором функция $f(x)$ определена и непрерывна.

Теорема. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на интервале (a; b). Тогда $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – константа, также является первообразной функции $f(x)$ на интервале (a; b). Справедливо обратное утверждение, каждая функция, являющаяся первообразной функции $f(x)$ на интервале (a; b), может быть представлена в виде

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ на интервале (a; b); C – константа.

Из теоремы следует, что множество функций вида $\Phi(x) = F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, C – произвольная постоянная, исчерпывает все семейство первообразных функции $f(x)$.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называют ***неопределенным интегралом*** от этой функции и обозначают символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F'(x) = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*. Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется ***интегрированием*** этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых, получаемых из одной из них (любой) путем параллельных ее переносов вдоль оси ординат (рис. 3.23).

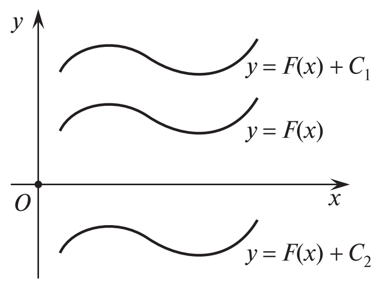


Рис. 3.23. Семейство кривых

Возникает вопрос: для любой ли функции $f(x)$ существует первообразная, а значит, и неопределенный интеграл? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке [a; b], то на этом промежутке у функции $f(x)$ существует первообразная.

Некоторые свойства неопределенного интеграла.

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$ производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

То есть правильность интегрирования проверяется дифференцированием. Равенство $\int(3x^2+4)dx = x^3+4x+C$ верно, так как $(x^3+4x+C)' = 3x^2+4.$

3. $\int(f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$ интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

3.4.2. Таблица основных неопределенных интегралов. Основные методы интегрирования

Таблица основных неопределенных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq -1,$$

$$\int dx = x+C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,$$

$$\int e^x dx = e^x+C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,\ a\neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|}+C,\ a\neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

Примеры

1. $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1}+C = \frac{x^6}{6}+C.$

2. $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C = \frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$

Основные методы интегрирования

1. ***Непосредственным интегрированием*** называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путем применения к ним основных свойств неопределенного интеграла. При этом подынтегральную функцию обычно соответствующим образом преобразуют.

Пример. Найдите интеграл $\int(2x^4+3\sin x-5e^x)dx.$

Решение.

$$\int\left(2x^4+3\sin x-5e^x\right)dx=2\int x^4dx+3\int\sin xdx-5\int e^xdx=$$

$$=2\frac{x^5}{5}+C_1+3(-\cos x)+C_2-5e^x+C_3=\frac{2}{5}x^5-3\cos x-5e^x+C,$$

$$C=C_1+C_2+C_3.$$

2. Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, т. е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется ***методом замены переменной*** или ***методом подстановки***. Он основан на следующей теореме.

Теорема. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, а $x=\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную, то функция $f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)$ также имеет первообразную, причем

$$\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=F\left[\varphi(t)\right]+C.$$

Отметим, что в случае «удачной» замены переменной $x=\varphi(t)$ заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или сводящимся к табличному. Умение правильно подобрать замену переменной приобретается только практикой.

Пример. Вычислите интеграл $\int(2x+1)^{10}dx.$

Решение.

$$\int(2x+1)^{10}dx=\left|\begin{gathered}2x+1=t\\ d(2x+1)=dt\\ 2dx=dt\\ dx=\frac{dt}{2}\end{gathered}\right|=\frac{1}{2}\int t^{10}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{11}}{11}=\frac{(2x+1)^{11}}{22}+C.$$

3. ***Метод интегрирования по частям***:

$$\int udv=uv-\int vdu,$$

где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные.

Эта формула дает возможность свести вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$, который может оказаться существенно более простым.

Перечислим группы интегралов, берущихся по частям:

а) к первой группе интегралов относятся интегралы, в которых подынтегральная функция в качестве множителя содержит одну из следующих функций:

$$\ln x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x$$

и т. п. при условии, что оставшаяся часть подынтегральной функции представляет собой производную известной функции. В этом случае полагают $u(x)$ равной одной из перечисленных функций.

Пример. Вычислите интеграл $\int \ln x dx$.

Решение.

$$\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = x \end{vmatrix} = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C;$$

б) к этой группе относятся интегралы вида

$$\int P_n(x) \cos ax dx, \quad \int P_n(x) \sin ax dx, \quad \int P_n(x) e^{ax} dx,$$

где a – постоянное число; $P_n(x)$ – многочлен степени n. Здесь считают $u(x) = P_n(x)$, а за dv берем остальные сомножители.

Пример. Вычислите интеграл $\int x e^x dx$.

Решение.

$$\int x e^x dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = e^x \end{vmatrix} = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Пример. Вычислите интеграл $\int (2x+3) \sin x dx$.

Решение.

$$\int (2x+3) \sin x dx = \begin{vmatrix} u = 2x+3, & dv = \sin x dx \\ du = 2dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = (2x+3)(-\cos x) -$$

$$- \int (-\cos x)(2dx) = -(2x+3)\cos x + 2\int (\cos x dx) = -(2x+3)\cos x + 2\sin x + C.$$

Пример. Вычислите интеграл $\int x \cos x dx$.

Решение.

$$\int x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \cos x dx \\ du = dx, & v = \sin x \end{vmatrix} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

3.4.3. Определенный интеграл

К понятию определенного интеграла приводят задачи на нахождение предела интегральной суммы. Рассмотрим некоторые из них.

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a; b]$ оси Ox задана непрерывная функция $y = f(x)$, не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, называют *криволинейной трапецией*.

Пусть $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a; b]$. Найдем площадь S криволинейной трапеции, образованной графиком этой функции на отрезке $[a; b]$.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и восстановим в точках деления этого отрезка перпендикуляры до пересечения с графиком функции $y = f(x)$ (рис. 3.24). Тем самым мы разложим рассматриваемую криволинейную трапецию на n частей.

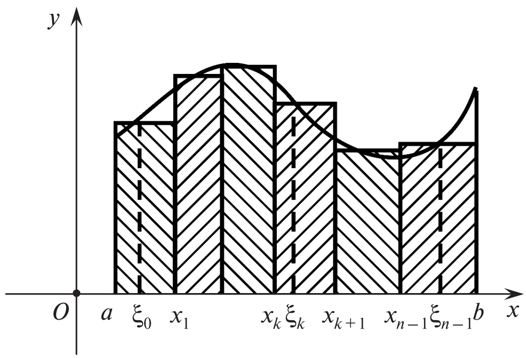


Рис. 3.24

На каждом из отрезков $[x_k; x_{k+1}]$ выберем произвольную точку ξ_k и заменим k-ю криволинейную трапецию разбиения прямоугольником с основанием $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и высотой $f(\xi_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Таким образом, мы заменим исходную криволинейную трапецию ступенчатой фигурой, составленной из n прямоугольников. Площадь k-го прямоугольника равна произведению основания на высоту, т. е. $f(\xi_k)\Delta x_k$.

Просуммировав площади всех прямоугольников, получим площадь всей ступенчатой фигуры:

$$S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Эта величина может быть принята за приближенное значение площади рассматриваемой криволинейной трапеции: $S \approx S_n$.

Приближение к искомой площади S криволинейной трапеции будет тем точнее, чем более мелкое разбиение отрезка $[a; b]$ на части мы будем брать. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n, когда n неограниченно возрастает так, что $\lambda = \max \Delta x_k \to 0$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Задача о вычислении длины пути по заданной скорости

Пусть точка M движется прямолинейно с переменной скоростью $V = f(t)$, где $f(t)$ – заданная функция времени t. Вычислим длину пути, пройденного точкой M за промежуток времени от t_0 до T. Промежуток $[t_0; T]$ разобьем на n промежутков $[t_0; t_1]$, $[t_1; t_2]$, ..., $[t_{n-1}; T]$ длиной $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$.

В течение малого промежутка времени Δt_k скорость движения можно приближенно считать постоянной и равной $f(t_k')$, где t_k' – некоторое значение из промежутка $[t_k; t_{k+1}]$. Длина пути, пройденного за этот промежуток времени, приближенно равна $f(t_k')\Delta t_k$. Складывая все длины $f(t_k')\Delta t_k$, получаем приближенное значение длины пути, пройденного точкой M за промежуток времени от t_0 до T:

$$S_n = f(t_0')\Delta t_0 + f(t_1')\Delta t_1 + \dots + f(t_{n-1}')\Delta t_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k')\Delta t_k.$$

Переходя к пределу при $\lambda = \max \Delta t_k \to 0$, находим точное значение длины пути:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k')\Delta t_k.$$

Сравнивая результаты этих двух задач, нетрудно заметить общий метод их решения: разбиение отрезка, на котором задана функция, на части; составление суммы S_n, которая принимается в качестве приближенного значения искомой величины; предельный переход. Этот метод применяется и для решения многих других задач (например, вычисления объемов, работы переменной силы). Поэтому пределы такого рода стали предметом особого исследования.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a; b]$. Разобьем отрезок $[a; b]$ произвольным образом на n частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Пусть $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – длина частичного отрезка $[x_k; x_{x+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. На каждом таком отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму

$$S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

которая называется *интегральной суммой Римана* (немецкий математик, 1826–1866) функции $y = f(x)$, соответствующей разбиению отрезка $[a; b]$ с фиксированными точками ξ_k.

Пусть λ – длина наибольшего частичного отрезка разбиения, т. е. $\lambda = \max \Delta x_k$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Данная величина называется *диаметром разбиения*.

Если существует конечный предел интегральной суммы S_n при $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_k, то этот предел называется ***определенным интегралом*** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

а сама функция $y = f(x)$ называется ***интегрируемой по Риману*** на отрезке $[a; b]$.

Таким образом, определенный интеграл есть число, к которому стремится интегральная сумма, когда $\lambda \to 0$.

Символ $\int_a^b f(x)dx$ читается так: «определенный интеграл от a до b эф от икс дэ икс». Число a называется *нижним пределом интегрирования*, число b – *верхним пределом интегрирования*, функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*.

Обозначение определенного интеграла похоже на обозначение неопределенного. И это не случайно. Оказывается, что вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла.

Отличия: определенный интеграл от $f(x)$ на $[a; b]$ есть число, а неопределенный интеграл – множество первообразных $F(x)+C$.

Возвращаясь к задаче о площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, можно сказать, что

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции. В этом и состоит ***геометрический смысл определенного интеграла.***

Если тело движется прямолинейно с переменной скоростью $V = f(t)$, то путь s, пройденный телом за время движения от $t = t_0$ до $t = T$, можно определить по формуле

$$S = \int_{t_0}^{T} f(t)dt.$$

В этом состоит ***физический смысл определенного интеграла***.

3.4.4. Условия интегрируемости функций. Свойства определенного интеграла

Рассмотрим теоремы, в которых отражены необходимые и достаточные условия интегрируемости функций. Рассмотрим их без доказательства.

Теорема (необходимое условие интегрируемости функции). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на данном отрезке.

Обратная теорема неверна: существуют ограниченные функции, не являющиеся интегрируемыми.

Пример. Функция Дирихле

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x \text{ рационально},\\ 0, \text{ если } x \text{ иррационально},\end{cases}$$

не интегрируема на отрезке [0; 1].

Решение. Действительно, если при разбиении отрезка [0; 1] на частичные отрезки выбрать на каждом из них рациональную точку ξ_k, получим

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1} 1\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=$$
$$=x_n-x_0=1-0=1.$$

Если же выбрать иррациональную точку ξ_k, то $S_n=0$. Следовательно, предел интегральных сумм для функции Дирихле не существует и она не интегрируема на отрезке [0; 1], хотя является на нем ограниченной.

Далее сформулируем три теоремы, которые выражают **достаточные условия интегрируемости функций** на отрезке.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема. Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Заметим, что дифференцирование элементарных функций приводит к элементарным функциям, в то время как для интегрирования это не всегда имеет место. Существуют функции, первообразные которых не выражаются через элементарные функции (например, e^{-x^2}, $\sin x^2$, $\cos x^2$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$ и др.). Интегралы от таких функций называются «неберущимися».

Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b dx = b - a.$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$$

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$, то их сумма $f(x) + g(x)$ также интегрируема на $[a; b]$ и

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx,$$

т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов.

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a; b]$, $[a; c]$, $[c; b]$, то она интегрируема на двух других отрезках, причем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

При $a < c < b$ данное равенство имеет простой *геометрический смысл*: площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a; c]$ и $[c; b]$.

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ $(a < b)$ и $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a; b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$

7. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$ $(a < b)$ и $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in [a; b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ $(a < b)$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на отрезке $[a; b]$, причем

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;\, b]$ $(a < b)$ и для всех $x \in [a; b]$ выполняются неравенства $m \le f(x) \le M$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

10. ***Теорема о среднем.*** Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;\, b]$ и для всех $x \in [a; b]$ выполняются неравенства $m \le f(x) \le M$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),$$

где $m \le \mu \le M$.

Величину μ называют *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$.

Замечание. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, то теорема о среднем принимает вид*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a),$$

где $c \in [a; b]$.

3.4.5. Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Формула Ньютона – Лейбница

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, интегрируемую на отрезке $[a;\, b]$. Если $x \in [a; b]$, то данная функция интегрируема также на отрезке $[a;\, x]$, т. е. существует $\int_a^x f(t)dt$. Предположим, что x меняется на отрезке $[a;\, b]$. Тогда на этом отрезке определена функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

которая задается **определенным интегралом с переменным верхним пределом интегрирования**.

Очевидно, что $F(a) = 0$, $F(b) = \int_a^b f(t)dt$.

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;\, b]$, то функция $F(x)$ непрерывна на этом отрезке.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда функция $F(x)$ дифференцируема в любой точке $x \in [a; b]$ и $F'(x) = f(x)$.

Таким образом установлено, что любая непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную (а следовательно, и бесконечное множество первообразных), одной из которых является интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. А так как всякая другая первообразная для функции $f(x)$ может отличаться от $F(x)$ только на постоянную, то тем самым установлена *связь между неопределенным и определенным интегралами*:

$$\int f(x)dx = \int\limits_a^x f(t)dt + C.$$

Теорема (формула Ньютона – Лейбница). Определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной на верхнем и нижнем пределах интегрирования, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – *одна из первообразных функции* $f(x)$.

Формула $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ называется **формулой Ньютона – Лейбница**; ее можно переписать в виде

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

где $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ – **двойная подстановка от *a* до *b***.

Вычисление определенных интегралов непосредственно по определению очень громоздко и затруднительно даже для простых функций. Гораздо более удобно вычислять определенный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_2^3 x^2 dx$.

Решение

$$\int\limits_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}.$$

В случае нахождения определенных интегралов с помощью теоремы Ньютона – Лейбница могут быть использованы все перечисленные выше приемы для нахождения неопределенных интегралов. Следует учесть, что при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется; не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменной.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x dx.$

Решение

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left| \begin{matrix} t = 2x, & dt = 2dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2} \\ \alpha = 2\cdot 0 = 0, & \beta = 2\cdot\dfrac{\pi}{2} = \pi \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{\pi} \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin t dt =$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = \left(-\frac{1}{2}\cos t\right)\Big|_0^{\pi} = \left(-\frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 0\right) = \left(-\frac{1}{2}\cdot(-1)\right) - \left(-\frac{1}{2}\cdot 1\right) = 1.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{2} \dfrac{2x dx}{(2x^2+1)^2}.$

Решение

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{2x dx}{\left(2x^2+1\right)^2} = \left| \begin{matrix} 2x^2+1 = t, & d(2x^2+1) = dt, \\ 4x dx = dt, & 2x dx = \dfrac{1}{2}dt, \\ \alpha = 2\cdot(-1)^2+1 = 3, & \\ \beta = 2\cdot 2^2 + 1 = 9 & \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_3^9 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int\limits_3^9 t^{-2} dt = -\frac{1}{2}t^{-1}\Big|_3^9 = -\frac{1}{2t}\Big|_3^9 = \left(-\frac{1}{2\cdot 9}\right) - \left(-\frac{1}{2\cdot 3}\right) = -\frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{1}{9}.$$

Теорема (формула интегрирования по частям для определенного интеграла). Если функции *u* и *v* имеют непрерывные производные на отрезке [*a*; *b*], то справедлива формула

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e x \ln x dx.$

Решение

$$\int_1^e x\ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x, & dv = xdx, \\ du=\dfrac{dx}{x}, & v=\dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1^2}{2}\ln 1\right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+e^2}{4}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} x\sin x dx.$

Решение

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx = \begin{vmatrix} u=x, & dv=\sin x dx, \\ du=dx, & v=-\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x dx =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \sin x\Big|_0^{\pi} = (-\pi\cos\pi + 0\cos 0) + (\sin\pi - \sin 0) = -\pi(-1) = \pi.$$

Пример. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y=x$ и $y=x^2$.

Решение. Изобразим графики обеих функций на плоскости.

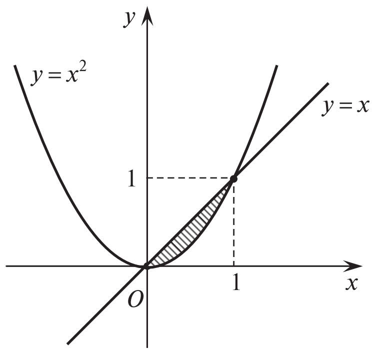


Рис. 3.25. Площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y=x$ и $y=x^2$

Убеждаемся, что речь идет о криволинейной фигуре, ограниченной сверху графиком функции $y=x$, снизу – графиком функции $y=x^2$. Точки пересечения графиков (0; 0) и (1; 1) легко находятся из уравнения $x=x^2$. Таким образом, $f_2(x)=x$, $f_1(x)=x^2$, $a=0$, $b=1$ и

$$S=\int_0^1 (x-x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^2}{2}-\frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$

3.4.6. Применение интегрального исчисления в социально-экономической сфере

Применение определенного интеграла в социально-экономической сфере основано на том, что любой меняющийся социально-экономический процесс может быть интерпретирован как скачкообразный, скачки которого близки к нулю.

Количество произведенной продукции

Объем произведенной продукции Q зависит от производительности труда и длительности промежутка рабочего времени, в течение которого производительность может меняться. Пусть $f(t)$ – функция изменения производительности труда от времени. Количество продукции Q, произведенной в промежутке времени от a до b при производительности труда $f(t)$, вычисляется по формуле

$$Q = \int_a^b f(t)dt.$$

Если затраты труда считать линейно зависимыми от времени, а затраты капитала – неизменными, то функция Кобба – Дугласа примет вид $f(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$. Тогда объем произведенной продукции Q за T лет составит

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t} dt.$$

Пример. Найдите дневную выработку Q за рабочий день продолжительностью 8 часов, если производительность труда в течение дня меняется по эмпирической формуле $f(t) = -0{,}1t^2 + 0{,}8t + 10.$

Решение. Воспользуемся формулой $Q = \int_a^b f(t)dt.$ В нашем случае имеем

$$Q = \int_0^8 f(t)dt = \int_0^8 \left(-0{,}1t^2 + 0{,}8t + 10\right)dt = \left(-0{,}1 \cdot \frac{t^3}{3} + 0{,}8 \cdot \frac{t^2}{2} + 10t\right)\Bigg|_0^8 = 88{,}53.$$

Количество денег, поступивших в банк за определенный промежуток времени

Пусть функция $f(t)$ описывает количество денег, поступающих в банк в каждый момент времени t. Определим общее количество денег, поступивших в банк за промежуток времени [0; T]. Если $f(t) = \text{const}$, то количество денег U, поступившее в банк за промежуток времени [0; T], находится по формуле $U = f(c) \cdot T$, где c – произвольное значение из отрезка [0; T].

Если $f(t)$ – количество денег, поступивших в банк в момент времени t, то общее количество денег, поступивших в банк за промежуток времени $[0;\ T]$, находится по формуле

$$U=\int_0^T f(t)dt.$$

Дисконтирование

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через некоторое количество времени t при определенной процентной ставке p, называется ***дисконтированием***. Такие задачи решаются при определении экономической эффективности капиталовложений.

Пусть доход изменяется со временем и описывается функцией $f(t)$, удельная норма процента $i=\dfrac{p}{100}$ и процент начисляется непрерывно. Тогда дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле

$$K=\int_0^T f(t)e^{it}dt.$$

Вычисление средних величин

В социально-экономической сфере часто требуется найти среднюю производительность труда за определенный промежуток времени, среднее значение затрат на производство труда за определенный промежуток времени и т. д. Такого рода задачи решаются с помощью теоремы о среднем. Для непрерывной на отрезке $[a;\ b]$ функции $f(x)$ существует такая точка $c\in[a;\ b]$, что $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$. Тогда среднее значение $f(c)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ равно

$$f(c)=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx.$$

Пример. Найдите среднее значение затрат в денежных единицах на производство и реализацию продукции, имеющих вид $S(x)=3x^2+4x+2$, где x – объем продукции в усл. ед., если объем продукции меняется от 2 до 4 усл. ед.

Решение. В этом примере $a=2$, $b=4$, $f(x)=S(x)$. Тогда среднее значение функции равно

$$S_{\text{ср}}=\frac{1}{4-2}\int_2^4(3x^2+4x+2)dx=\frac{1}{2}(x^3+2x^2+2x)\Big|_2^4=\frac{1}{2}(104-20)=42.$$

Таким образом, средние издержки составляют 42 ден. ед.

Исторические сведения

Возникновение задач интегрального исчисления связано с нахождением площадей и объемов. Ряд задач такого рода был решен математиками Древней Греции. Античная математика предвосхитила идеи интегрального исчисления в значительно большей степени, чем дифференциального исчисления. Большую роль при решении таких задач играл метод исчерпывания, созданный Евдоксом Книдским (ок. 408 г. до н. э. – ок. 355 г. до н. э.) и широко применявшийся Архимедом (287–212 гг. до н. э.). Архимед сумел найти площадь витка спирали, объемы эллипсоида и сегментов гиперболоида и параболоида вращения и т. д. Однако он не выделил общего содержания интеграционных приемов и понятия об интеграле, а тем более не создал метода вычисления интегралов.

Ученые Среднего и Ближнего Востока в IX–XV вв. изучали и переводили труды Архимеда на общедоступный в их среде арабский язык, но существенно новых результатов они не получили. Деятельность европейских ученых в это время была еще более скромной. Лишь в XVI–XVII вв. развитие естественных наук поставило перед математиками Европы ряд новых задач, в частности задачи на нахождение квадратур, кубатур (т. е. площадей фигур и объемов тел) и определение центров тяжести. Труды Архимеда, впервые изданные в 1544 г. (на латинском и греческом языках), стали привлекать широкое внимание, и их изучение явилось одним из важнейших отправных пунктов дальнейшего развития интегрального исчисления. Античный метод «неделимых» был возрожден И. Кеплером. В более общей форме идеи этого метода были развиты Б. Кавальери, Э. Торричелли (1608–1647), Дж. Валлисом, Б. Паскалем. Методом «неделимых» был решен ряд геометрических и механических задач. К этому же времени относятся опубликованные позднее работы П. Ферма по квадрированию парабол n-й степени, а затем – работы Х. Гюйгенса (1629–1695) по спрямлению кривых.

В итоге этих исследований выявилась общность приемов интегрирования при решении внешне несходных задач геометрии и механики, приводившихся к квадратурам как к геометрическому эквиваленту определенного интеграла. Заключительным звеном в цепи открытий этого периода было установление взаимно обратной связи между задачами на проведение касательной и на квадратуры, т. е. между дифференцированием и интегрированием. Основные понятия и алгоритм интегрального исчисления были созданы независимо друг от друга И. Ньютоном и Г. Лейбницем. Последнему принадлежат термин «интегральное исчисление» и обозначение интеграла. В работах Ньютона основную роль играло понятие неопределенного интеграла (флюенты), тогда как Лейбниц исходил из понятия определенного интеграла.

Дальнейшее развитие интегрального исчисления в XVIII в. связано с именами И. Бернулли и Л. Эйлера. В начале XIX в. интегральное исчисление вместе с дифференциальным было перестроено О. Коши на основе теории пределов. В развитии интегрального исчисления в XIX в. приняли участие русские математики М. В. Остроградский (1801–1861/62), В. Я. Буняковский (1804–1889), П. Л. Чебышев (1821–1894). В конце XIX – начале XX в. развитие теории множеств и теории функций действительного переменного привело к углублению и обобщению основных понятий интегрального исчисления (Б. Риман (1826–1866), А. Лебег (1875–1941) и др.).

Примеры решения задач

1. Вычислить следующие неопределенные интегралы:

а) $\int (x^2 + 5x^6 + 4x - 8)dx;$ б) $\int \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx;$

в) $\int \frac{2+x^4}{x}dx;$ г) $\int \frac{dx}{25+4x^2};$ д) $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx.$

Решение.

а) $\int (x^2+5x^6+4x-8)dx = \int x^2dx + 5\int x^6dx + 4\int xdx - 8\int dx =$

$$= \frac{x^3}{3} + 5\cdot\frac{x^7}{7} + 4\cdot\frac{x^2}{2} - 8x + C;$$

б) $\int \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = 2\int xx^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}dx = 2\int x^{\frac{7}{6}}dx = 2\frac{6x^{\frac{13}{6}}}{13} + C = \frac{12}{13}\sqrt[6]{x^{13}} + C;$

в) $\int \frac{2+x^4}{x}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{x^4}{x}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int x^3dx = 2\ln|x| + \frac{x^4}{4} + C;$

г) $\int \frac{dx}{25+4x^2} = \int \frac{dx}{4\left(\frac{25}{4}+x^2\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + x^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5} + C =$

$$= \frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5} + C;$$

д) $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$

$$= \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

2. Вычислить следующие неопределенные интегралы, сделав соответствующие замены:

а) $\int \sin(3x+2)dx;$ б) $\int \operatorname{tg} x dx;$ в) $\int e^{\frac{x}{4}}dx.$

Решение.

а) $\int \sin(3x+2)dx = \left| \begin{array}{c} t = 3x+2, \\ dt = (3x+2)'dx = 3dx, \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{3}\sin t dt = \frac{1}{3}\int \sin t dt =$

$$= -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + C;$$

б) $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x, \\ dt = (\cos x)'dx = \\ = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C;$

в) $\int e^{\frac{x}{4}}dx = \left| \begin{array}{c} t = \dfrac{x}{4}, \\ x = 4t, \\ dx = 4dt \end{array} \right| = 4\int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C.$

3. Вычислить интеграл $I(x) = \int e^x \sin 5x dx.$

Решение.

$$I(x) = \int e^x \sin 5x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x, & dv = \sin 5x dx, \\ du = e^x dx, & v = -\dfrac{\cos 5x}{5} \end{array} \right| = e^x\left(-\frac{\cos 5x}{5}\right) -$$

$$-\int\left(-\frac{\cos 5x}{5}\right)e^x dx = -\frac{1}{5}e^x \cos 5x + \frac{1}{5}\int e^x \cos 5x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x, & dv = \cos 5x dx \\ du = e^x dx, & v = \dfrac{\sin 5x}{5} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{5}e^x \cos 5x + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^x \sin 5x - \frac{1}{5}\underbrace{\int e^x \sin 5x dx}_{I(x)}\right).$$

Таким образом, получим

$$I(x) = -\frac{1}{5}e^x \cos 5x + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^x \sin 5x - \frac{1}{5}I(x)\right),$$

$$I(x) = -\frac{1}{5}e^x \cos 5x + \frac{1}{25}e^x \sin 5x - \frac{1}{25}I(x),$$

$$I(x) + \frac{1}{25}I(x) = -\frac{1}{5}e^x \cos 5x + \frac{1}{25}e^x \sin 5x,$$

$$\frac{26}{25}I(x) = -\frac{1}{5}e^x \cos 5x + \frac{1}{25}e^x \sin 5x,$$

$$I(x) = -\frac{5}{26}e^x \cos 5x + \frac{1}{26}e^x \sin 5x.$$

4. Вычислить следующие определенные интегралы:

а) $\int_0^{\pi} \sin x dx;$ б) $\int_1^8 \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x}dx.$

Решение.

а) $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = \cos x\Big|_{\pi}^0 = \cos 0 - \cos\pi = 1-(-1) = 2;$

б) $\int\limits_1^8 \frac{x-\sqrt[3]{x}}{x} dx = \int\limits_1^8 dx - \int\limits_1^8 x^{-\frac{2}{3}} dx = x\Big|_1^8 - 3\sqrt[3]{x}\Big|_1^8 =$

$= (8-1) - \left(3\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{1}\right) = 7-(6-3) = 4.$

5. Найдите объем произведенной за 6 лет продукции, если функция Кобба – Дугласа имеет вид $z(t) = (14+t)e^t$.

Решение. Объем произведенной продукции определим, вычислив определенный интеграл: $Q = \int\limits_0^6 (14+t)e^t dt$. Для его вычисления воспользуемся методом интегрирования по частям. Тогда

$$Q = \int\limits_0^6 (14+t)e^t dt = \begin{vmatrix} u = 14+t, & dv = e^t dt, \\ du = (14+t)' dt = dt, & v = \int e^t dt = e^t \end{vmatrix} =$$

$$= (14+t)e^t\Big|_0^6 - \int\limits_0^6 e^t dt = ((14+t)e^t - e^t)\Big|_0^6 = ((13+t)e^t)\Big|_0^6 = 19e^6 - 13e^0 \approx 7652.$$

Таким образом, объем произведенной за 6 лет продукции составит 7652 усл. ед.

6. Определите дисконтированный доход за 5 лет при процентной ставке 6 %, если базовые капиталовложения составили 10 млн ден. ед. и ожидается ежегодное увеличение капиталовложений на 1 млн ден. ед.

Решение. Для определения дисконтированного дохода воспользуемся формулой $K = \int\limits_0^T f(t)e^{-it} dt.$ Надо найти функцию капиталовложений $f(t)$, которая, согласно условию задачи, является линейной. Получим $f(t) = k + lt$, где $k = 10$, $l = 1$. Тогда $f(t) = 10 + t$. Удельная норма процента равна $i = \frac{p}{100} = \frac{6}{100} = 0{,}06.$ Таким образом, дисконтированный доход

$$K = \int\limits_0^5 (10+t)e^{-0{,}06t} dt = \begin{vmatrix} u = 10+t, & dv = e^{-0{,}06t} dt, \\ du = dt, & v = \int e^{-0{,}06t} dt = \frac{e^{-0{,}06t}}{-0{,}06} = -\frac{100}{6} e^{-0{,}06t} \end{vmatrix} =$$

$$=(10+t)\left(-\frac{100}{6}e^{-0,06t}\right)\Bigg|_0^5-\int_0^5\left(-\frac{100}{6}e^{-0,06t}\right)dt=\left(-\frac{100(10+t)}{6e^{0,06t}}-\frac{100^2}{36e^{0,06t}}\right)\Bigg|_0^5=$$

$$=\left(-\frac{100}{e^{0,06t}}\cdot\frac{(160+6t)}{36}\right)\Bigg|_0^5=\left(-\frac{100}{e^{0,06\cdot 5}}\cdot\frac{(160+6\cdot 5)}{36}\right)-\left(-\frac{100}{e^{0,06\cdot 0}}\cdot\frac{(160+6\cdot 0)}{36}\right)=$$

$$=\left(-\frac{100}{e^{0,3}}\cdot\frac{190}{36}\right)-\left(-\frac{100}{e^{0}}\cdot\frac{160}{36}\right)=\frac{100}{36}\left(160-\frac{190}{e^{0,3}}\right)\approx 53,457 \text{ ден. ед.}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$; г) $\int\frac{dx}{9x^2+4}$;

б) $\int\cos 5x dx$; д) $\int\left(3x^4+\frac{4}{x}-\frac{8}{x^5}+\sqrt{x}\right)dx$;

в) $\int\frac{dx}{5-2x}$; е) $\int\sin 4x dx$.

2. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_2^3 x^2 dx$; б) $\int_{-\pi/3}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}$; в) $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$; г) $\int_0^1 \arcsin x dx$.

3. Дневная производительность труда (за 7 рабочих часов) рабочего машиностроительного завода описывается функцией $y=-0,09t^2+0,28t+10,06$, где t – время в часах, y – количество продукции. Какое количество продукции производит рабочий за 1 год (260 рабочих дней)?

4. Найдите среднее значение издержек производства, описываемых функцией $K(x)$, если объем продукции x изменяется от a до b усл. ед. При каком значении объема выпускаемой продукции издержки принимают среднее значение:

а) $K(x)=3x^2+4x+1,\ a=0,\ b=3$;

б) $K(x)=4x^2+6x+1,\ a=0,\ b=4$;

в) $K(x)=8x^2+2x+5,\ a=0,\ b=3$;

г) $K(x)=3x^2+4x+2,\ a=0,\ b=4$;

д) $K(x)=6x^2+4x+1,\ a=0,\ b=5$?

5. Найдите объем произведенной за 4 года продукции, если функция Кобба – Дугласа имеет вид $z(t)=(1+t)e^{0,5t}$.

6. Определите дисконтированный доход за 3 года при процентной ставке 8 %, если базовые капиталовложения составили 11 тыс. ден. ед. и ожидается ежегодное увеличение капиталовложений на 2 тыс. ден. ед.

7. Объем продукции u, произведенной бригадой за смену, задается следующим соотношением: $u = u(t) = 6{,}5t^2 + 100t + 60,\ 1 \le t \le 8,$ где t – рабочее время в часах. Определите производительность труда в момент времени $t_0 = 4$. Найдите среднюю производительность труда в период от $t_1 = 1$ до $t_2 = 8$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение первообразной. Что такое неопределенный интеграл? Геометрический смысл неопределенного интеграла.
2. Запишите известные вам свойства неопределенного интеграла.
3. Запишите таблицу основных неопределенных интегралов.
4. В чем состоит непосредственное интегрирование?
5. В чем состоит метод замены переменной в неопределенном интеграле?
6. Выпишите формулу интегрирования по частям. Перечислите группы интегралов, берущихся по частям.
7. Что такое определенный интеграл? Запишите формулу Ньютона – Лейбница.
8. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
9. Запишите основные свойства определенного интеграла.
10. Запишите теорему о среднем. Как найти среднее значение функции с помощью определенного интеграла?
11. Что такое дисконтирование? По какой формуле можно вычислить дисконтированный доход K за время T?

Р А З Д Е Л IV

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СОЦИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

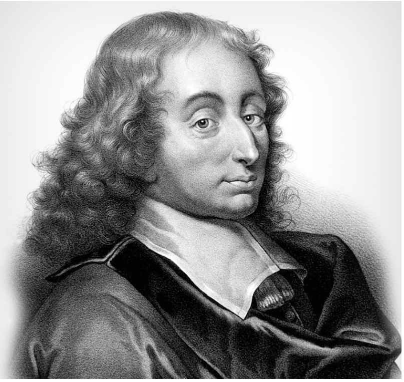
4.1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Прежде чем любая область знаний сформируется в особую науку, она проходит длительный период накопления эмпирического материала, период развития в недрах другой, более общей науки и затем выделяется в самостоятельную науку. Не является исключением и наука про общие законы комбинирования и образования различных конфигураций объектов, получившая название «комбинаторика». Еще в доисторическую эпоху люди столкнулись с проблемой выбора тех или иных объектов, расположения их в определенном порядке, нахождения среди различных расположений подходящих. Например, во время охоты необходимо было выбрать наилучшее расположение охотников, во время битвы – расположение воинов. Нельзя точно сказать, когда наряду с состязаниями в беге, метании диска, прыжках появились игры, требовавшие умения рассчитывать, составлять планы и опровергать планы противника.

Комбинаторные мотивы можно заметить в символике китайской «Книги Перемен» (V в. до н. э.). По мнению ее авторов, все в мире комбинируется из различных сочетаний мужского и женского начал, а также восьми стихий: земля, горы, вода, ветер, гроза, огонь, облака и небо. Историки отмечают также комбинаторные проблемы в руководствах по игре в го и другие игры. Большой интерес математиков многих стран с древних времен неизменно вызывали магические квадраты. Комбинаторные задачи, касавшиеся перечисления небольших групп предметов, решали греки. Аристотель описал без пропусков все виды правильных трехчленных силлогизмов, а его ученик Арисксен из Тарента перечислил различные комбинации длинных и коротких слогов в стихотворных размерах. Живший в IV в. н. э. математик Папп рассматривал число пар и троек, которые можно получить из трех элементов, допуская их повторения. Интерес к сочетаниям проявлялся и в Индии. В VII в. индийский математик Бхаскара в книге «Лилавати», изучая проблемы комбинаторики, писал о применении *перестановок к подсчету вариаций размера в стихосложении, различных расположений в архитектуре и т. п. В его работе мы можем найти правила для отыскания числа перестановок и сочетаний нескольких предметов. При этом им также рассматривается и случай, когда в перестановках есть повторяющиеся элементы. В Западной Европе ряд глубоких открытий в области комбинаторики сделали два еврейских исследователя, Авраам ибн Эзра (XII в.) и Леви бен Гершом (он же Герсонид, XIV в.). Ибн Эзра подсчитывал число размещений с перестановками в огласовках имени Бога и обнаружил симметричность биномиальных коэффициентов, а Герсонид дал явные формулы для их подсчета и применения в задачах вычисления числа размещений и сочетаний. Несколько комбинаторных задач содержит «Книга абака» (Фибоначчи, XIII в.). Например, он поставил задачу найти наименьшее число гирь, достаточное для взвешивания любого товара весом от 1 до 40 фунтов.*

Наибольшее распространение получила игра в кости: два или три кубика с нанесенными на них очками бросали на стол, и ставку брал тот, у кого выпала большая сумма очков. Несмотря на грозные запреты церкви, азартные игры все же развивались. Позже некоторые игроки, которые наиболее часто играли в кости, подметили, что одни суммы очков выпадают часто, а другие – редко. Были составлены таблицы, показывавшие, сколькими способами можно получить то или иное число очков. Сначала допускалась ошибка: подсчитывали только число различных сочетаний, дававших данную сумму. Этими вопросами занимались такие известные итальянские математики XVI в., как Д. Кардано, Н. Тарталья и др. Наиболее полно исследовал данный вопрос в XVII в. Галилео Галилей, но его рукопись оставалась неопубликованной до 1718 г. В 1713 г. была опубликована книга «Искусство предположений» Якоба Бернулли, в которой указывались формулы для числа размещений из n элементов по k, выводились выражения для степенных сумм и т. д.

Работы Б. Паскаля и П. Ферма ознаменовали рождение двух новых ветвей математической науки – комбинаторики и теории вероятностей. Ранее комбинаторные проблемы лишь затрагивались в общих трудах по астрологии, логике и математике или большей частью относились к области математических развлечений. В 1666 г. Г. В. Лейбниц публикует «Диссертацию о комбинаторном искусстве», в которой впервые появляется термин «комбинаторный». Этот математический труд Лейбница должен был стать лишь началом большой работы, о которой он часто упоминал в своих письмах и печатных трудах. Г. В. Лейбниц планировал для комбинаторики многочисленные приложения: к играм, статистике, кодированию и декодированию, теории наблюдений. Он считал, что комбинаторика должна заниматься «одинаковым и различным, похожим и непохожим, абсолютным и относительным расположением, в то время как обычная математика занимается большим и малым, единицей и многим, целым и частью». Иными словами, под комбинаторикой Г. В. Лейбниц понимал примерно то, что мы теперь называем дискретной математикой. К области комбинаторики Г. В. Лейбниц относил и «универсальную характеристику» – математику суждений, то есть прообраз ны-



Блез Паскаль
(1623–1662)

Пьер Ферма
(1607–1665)

нешней математической логики. Проекты Лейбница казались несбыточными математикам его времени, но сейчас, после создания быстродействующих вычислительных устройств, многие его планы стали претворяться в жизнь, а дискретная математика выросла в своем значении и начала соперничать с математическим анализом.

Замечательные достижения в области комбинаторики принадлежат одному из величайших математиков XVIII в. Леонарду Эйлеру, швейцарцу, прожившему почти всю жизнь в России, где он был членом Петербургской академии наук. У Л. Эйлера хватало времени размышлять и над задачами, которые, казалось бы, не заслуживали его внимания: о том, можно ли обойти мосты в Кенигсберге (ныне Калининграде) так, чтобы не побывать дважды на одном и том же мосту, можно ли поставить 36 офицеров из 6 разных полков так, чтобы в каждой шеренге и каждой колонне было по одному офицеру каждого воинского звания из каждого полка, сколькими способами можно разбить данное число на слагаемые и т. д.

После работ Б. Паскаля и П. Ферма, Г. В. Лейбница и Л. Эйлера можно было уже говорить о комбинаторике как о самостоятельном разделе математики, тесно связанном с другими областями науки, такими как теория вероятностей, учение о рядах и т. д. Таким образом, комбинаторика как самостоятельная ветвь математики возникла в XVII в. На протяжении долгого времени основную роль в изучении мироздания играл математический анализ: дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, вариационное исчисление и т. д. Все процессы рассматривались как непрерывные, чтобы можно было применять к ним развитый аппарат математики непрерывного. С появлением быстродействующих вычислительных машин такие абстрактные области математики, как математическая логика, общая алгебра, стали прикладными. Тогда для составления алгоритмических языков, на которых стали писать программы *для машин, понадобились специалисты именно в этих областях математики. Произошло изменение соотношения между дискретной и классической математикой. Изменилась и роль древнейшей области дискретной математики – комбинаторики. Если раньше комбинаторика применялась для составления занимательных задач, кодирования и расшифровки древних письменностей, то со временем она превращается в важнейшую область математического знания.*

4.1.1. Основные комбинаторные принципы сложения и умножения

Задачи, при решении которых приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и производить подсчет числа всех возможных таких комбинаций, относятся к разделу математики, который называется ***комбинаторикой***. Этот раздел математики находит широкое применение в социологии. Классической теории вероятностей предшествуют разделы комбинаторики.

Комбинаторный подсчет числа случаев, благоприятствующих тому или иному событию, служит хорошей психологической подготовкой к введению понятия вероятности. Лучший способ освоения комбинаторики – решение задач. О простых и типовых, но в тоже время важных, задачах пойдет речь ниже. Начнем с **основных принципов комбинаторики** – принципа сложения и принципа умножения, которые рассмотрим сначала на примерах.

Пример. Пусть в книжном магазине имеется 8 различных видов книг по «Социологии» и 5 различных книг по «Высшей математике». Сколькими способами можно выбрать в подарок книгу по «Социологии» или книгу по «Высшей математике»? Сколькими способами можно выбрать две книги, по «Высшей математике» и «Социологии»?

Ответ на первый вопрос очевиден. Книгу по «Социологии» можно выбрать 8 способами, по «Высшей математике» – 5 способами. Следовательно, книгу по «Социологии» или по «Высшей математике» можно выбрать $8 + 5 = 13$ способами. Для ответа на второй вопрос заметим, что если мы выбираем две книги по «Высшей математике» и «Социологии», то к каждой из 8 различных книг по «Социологии» можно подобрать книгу по «Высшей математике» 5 способами, а именно, к первой книге по «Социологии» подбираем 5 различных книг по «Высшей математике», ко второй книге по «Социологии» – опять 5 различных книг по «Высшей математике» и т. д. Таким образом, набор, состоящий из книги по «Высшей математике» и «Социологии», можно выбрать $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 8 \cdot 5 = 40$ способами.

На этом простейшем примере мы продемонстрировали применение принципов сложения и умножения. Отметим, что такие понятия теории множеств, как *подмножество*, *объединение множеств*, *пересечение множеств*, рассмотренные в первой главе, оказываются весьма полезными при решении комбинаторных задач. Сформулируем теперь основные принципы комбинаторики в общем виде.

Комбинаторный принцип сложения. Если множество A содержит n разных элементов, а множество B – m разных элементов и $A \cap B = \varnothing$, то множество $A \cup B$ содержит $n + m$ элементов.

Замечание. *Если некоторый объект A можно выбрать n способами, а другой объект B, отличный от A, – m способами, то, согласно комбинаторному принципу сложения, объект «A или B» можно выбрать $n + m$ способами.*

Пример. Рассмотрим, сколькими способами студенту факультета философии и социальных наук БГУ можно выбрать одну книгу, когда на полке находятся 14 книг по социологии, 10 книг по информационным технологиям и 6 книг по математике для гуманитариев.

Заметим, что книгу по социологии можно выбрать 14 способами, по информационным технологиям – 10 способами, а по математике для гуманитариев – 6 способами. Согласно комбинаторному принципу сложения и в силу предыдущего замечания студент может выбрать одну книгу на полке $14 + 10 + 6 = 30$ способами.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий комбинаторный принцип умножения.

Пример. Из Минска в Москву ведет n путей, а из Москвы в Орел – m путей. Сколькими различными путями можно совершить путешествие из Минска в Орел через Москву?

Выбрать один из n возможных путей из Минска в Москву, дальше можно продолжить путешествие m способами, поэтому общее число различных путей из Минска в Орел равно $n \cdot m$.

Комбинаторный принцип умножения. Если множество A содержит n различных элементов, т. е. $A = \{a_i\colon i = 1, 2, ..., n\}$, а множество B – m различных элементов, т. е. $B = \{b_j\colon j = 1, 2, ..., m\}$, то множество C, составленное из всех возможных пар, т. е. $C = \{(a_i, b_j)\colon i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m\}$, содержит $n \cdot m$ элементов.

Замечание. *Если некоторый объект A можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно, независимо от выбора A, выбрать m способами, то, согласно комбинаторному принципу умножения, объект «A и B» можно выбрать $n \cdot m$ способами.*

Пример. Рассмотрим, сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова ПРОЦЕНТ.

Гласную букву можно выбрать двумя способами (О или Е), а согласную – пятью (П, Р, Ц, Н или Т). Следовательно, согласно комбинаторному принципу умножения и в силу сделанного замечания гласную и согласную буквы можно выбрать $2 \cdot 5 = 10$ способами.

Рассмотрим пример еще одной задачи, при решении которой используются оба принципа комбинаторики.

Пример. Сколькими способами студенту факультета философии и социальных наук можно выбрать две книги по разным наукам, когда на полке находятся 14 книг по социологии, 10 книг по информационным технологиям и 6 книг по математике для гуманитариев?

Если выбирать книгу по социологии и книгу по информационным технологиям, то существует 14 вариантов выбора книги по социологии и 10 вариантов выбора книги по информационным технологиям, поэтому, по комбинаторному принципу умножения, для этого выбора существует $14 \cdot 10 = 140$ возможностей.

Если выбирать книгу по социологии и книгу по математике для гуманитариев, то имеется 14 вариантов выбора книги по социологии и 6 – книги по математике для гуманитариев, поэтому, по комбинаторному принципу умножения, для указанного выбора имеется $14 \cdot 6 = 84$ возможностей.

Если выбирается книга по информационным технологиям и книга по математике для гуманитариев, то существуют 10 способов выбора книги по информационным технологиям и 6 – книги по математике для гуманитариев, поэтому, по комбинаторному принципу умножения, для такого выбора существует $10 \cdot 6 = 60$ возможностей.

Наконец, поскольку указанные три выбора разных пар книг отличаются друг от друга, то, согласно комбинаторному принципу сложения, всего существует $140 + 84 + 60 = 284$ способа выбора двух книг.

Примеры решения задач

1. Студент факультета философии и социальных наук может пересдать зачет по «Основам высшей математики» либо в конце июня – и на это дается ему 3 попытки, – либо в сентябре с помощью 2 попыток. Сколько существует попыток, чтобы сдать зачет по «Основам высшей математики»?

Решение. Так как время попыток сдать зачет различное, то можно воспользоваться правилом суммы. Тогда количество попыток сдать зачет по «Основам высшей математики», согласно *комбинаторному принципу сложения*, равно $3 + 2 = 5$.

2. В группе факультета философии и социальных наук 38 студентов. Сколько существует способов выбрать старосту группы и его заместителя?

Решение. Сначала выберем старосту группы. Число способов равно 38, так как каждый студент может быть старостой. После этого останется 37 студентов, из которых может быть выбран заместитель старосты. То есть число способов выбора заместителя – 37. По комбинаторному принципу умножения количество способов выбора пары «староста и заместитель» равно $38 \cdot 37 = 1406$.

3. Пусть в магазине имеется 7 различных видов коробок конфет и 5 различных коробок печенья. Сколькими способами можно выбрать в подарок коробку конфет или коробку печенья? Сколькими способами можно составить набор, состоящий из коробки конфет и коробки печенья?

Решение. Коробку конфет или коробки печенья можно выбрать, согласно комбинаторному принципу сложения, $7 + 5 = 12$ способами. Составить набор из коробки конфет и коробки печенья можно, согласно комбинаторному принципу умножения, $7 \cdot 5 = 35$ способами.

4. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова МОСКВА?

Решение. Гласную букву можно выбрать двумя способами (О или А), а согласную – четырьмя (М, С, К, В). Следовательно, согласно комбинаторному принципу умножения, гласную и согласную буквы можно выбрать $2 \cdot 4 = 8$ способами.

5. На полке в библиотеке стоят 5 книг по социальной психологии, 20 книг по социологии труда и 15 книг по статистике. Сколькими способами студент может выбрать одну книгу?

Решение. Книгу по социальной психологии студент может выбрать 5 способами, книгу по социологии труда – 20, а книгу по статистике – 15 способами, тогда по комбинаторному принципу сложения одну книгу можно выбрать $5 + 20 + 15 = 40$ способами.

Задачи для самостоятельного решения

1. На факультете философии и социальных наук пять специальностей. На первой специальности 25 человек, на второй – 30, на третьей – 20, на четвертой – 23 студента и на пятой – 19. Сколькими способами можно выбрать одного студента?

2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слов: а) ПРОДУКТЫ; б) МЕТОДИКА; в) РЕМОНТ?

3. В магазине одежды продается 5 разных рубашек и 4 разных галстука. Сколько существует способов выбора в подарок рубашки и галстука без учета их фасона и цвета?

4. Сколькими способами можно оклеить две комнаты обоями, если имеется четыре вида различных обоев: а) комнаты могут быть оклеены одинаковыми обоями; б) комнаты не могут быть оклеены одинаковыми обоями?

5. Сколько неудачных попыток можно сделать, открывая сейф, код которого состоит из трех различных цифр?

6. Сколько «слов» длины 5 можно составить из 33 букв русского алфавита так, чтобы любые две соседние буквы были различными?

7. Три человека независимо друг от друга решили положить в определенный день свои вклады в банк в городе, в котором имеется 8 банков. Сколько может быть вариантов размещения вкладов?

4.1.2. Комбинаторика. Выбор без повторений

Решение комбинаторных задач часто приводит к понятиям *перестановки*, *размещения* и *сочетания*. Поэтому на начальном этапе знакомства с основами комбинаторики необходимо научиться определять вид соединения элементов конечного множества, а также подсчитать количество таких соединений.

Для построения соответствующих математических моделей комбинаторных задач будем использовать математический аппарат теории множеств. Если множество состоит из элементов a, b и c, то нам безразличен порядок, в котором указаны элементы, например:

$$\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, b, a\}.$$

Но есть задачи, в которых важен порядок следования элементов. При этом указывается, какой элемент считается первым, какой – вторым, какой – третьим и т. д.

Множество вместе с заданным в нем порядком расположения его элементов называют ***упорядоченным множеством***.

Очевидно, что каждое множество, содержащее более одного элемента, можно упорядочить не единственным способом. Упорядоченные множества записывают, располагая по порядку их элементы в круглых скобках:

$$(a, b, c), (b, a, c), (c, b, a).$$

Например, из двух букв А и Б можно построить упорядоченное множество двумя различными способами:

(А, Б), (Б, А).

Три буквы А, Б и В можно расположить в виде последовательности уже шестью способами. Разумеется, когда мы говорим о *последовательности*, то имеем в виду упорядоченное множество элементов. Например, АБ и БА – это разные последовательности. К каждой последовательности вида АБ и БА можно подставить букву В тремя различными способами: спереди, между буквами или сзади. Тогда из АБ получим ВАБ, АВБ, АБВ, а из БА – ВБА, БВА и БАВ. Все получившиеся последовательности разные, и их можно записать в виде следующих упорядоченных множеств:

(А, Б, В), (А, В, Б), (Б, А, В), (Б, В, А), (В, А, Б), (В, Б, А).

Определение перестановки. Установленный в конечном множестве порядок называют ***перестановкой*** его элементов.

Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Замечание. *Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов, т. е. могут быть получены из того же самого множества, называются перестановками этого множества.*

Для сокращения записи произведения всех натуральных чисел от 1 до n в математики используется n-факториал, обозначаемый $n!$ (читают «эн-факториал»), т. е.

$$n! \overset{def}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n.$$

Число всевозможных перестановок в множестве из n элементов обозначают P_n (P – первая буква французского слова *permutation* – перестановка). Читается «число перестановок из эн элементов» или «пэ из эн».

Утверждение. Число перестановок P_n можно вычислить по формуле

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Пусть $n = 2$, тогда число перестановок из двух элементов равно 2: на первое место поставили любой из двух элементов, а на второе – оставшийся элемент, т. е. $P_2 = 2$. Если $n = 3$, тогда число перестановок из трех элементов вычисляется следующим образом: на первое место ставим любой один из трех элементов, вариантов в этом случае 3, на второе – любой один из двух оставшихся, вариантов 2, и на третье место – последний элемент, вариант 1. Таким образом, в силу комбинаторного принципа умножения число всех таких перестановок равно $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.

Пример. Сколько существует вариантов проведения собрания учебной группы, если количество выступающих на собрании – 4?

Так как на собрании должны выступать всего четыре оратора, то число способов расположения их в списке выступающих и, соответственно, число способов проведения собрания равно числу перестановок из 4 элементов – P_4, т. е. $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

При помощи формулы для P_n получаем

$$1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720,$$

$$7! = 5040,\ 8! = 740\,320,\ 9! = 362\,880,\ 10! = 3\,628\,800.$$

Принято считать, что $\mathbf{0! = 1}$.

Замечание. *Если рассматривать перестановки n предметов, расположенных не в ряд, а по кругу, и считать одинаковыми расположения, переходящие друг в друга при вращении, то число различных перестановок равно* $P_{n-1} = (n-1)!$

Перестановки букв некоторого слова называют ***анаграммами***. Например, среди анаграмм слова КРОТ, которых всего $P_4 = 4! = 24$, только одна, не считая самого слова КРОТ, имеет смысл в русском языке: КОРТ. Анаграмм слова ПРОЕКТ будет $P_6 = 6! = 720$.

При решении задач иногда необходимо из n имеющихся различных объектов отобрать произвольные m штук ($m \le n$) и расположить их в некотором порядке. Сколько существует упорядоченных расположений при заданных числах n и m?

Например, пусть даны четыре буквы А, Б, В, Г. Требуется выделить из них две и расположить их в определенном порядке. Таких способов 12. Действительно, первую букву можно выбрать четырьмя способами, а вторую придется выбирать из оставшихся трех, следовательно, в силу комбинаторного принципа умножения всего получается $4 \cdot 3 = 12$ способов. Запишем их в виде упорядоченных множеств:

(А, Б), (А, В), (А, Г), (Б, А), (Б, В), (Б, Г),

(В, А), (В, Б), (В, Г), (Г, А), (Г, Б), (Г, В).

В общем случае имеем n различных элементов, выберем из них m элементов. При этом выборки могут отличаться или составом элементов, или их порядком. Посчитаем число таких упорядоченных выборок. На первое место можно поставить любой из n элементов, на второе – любой из оставшихся $(n - 1)$ элементов и т. д., на m-е место – любой из оставшихся $(n - (m - 1))$ элементов. Следовательно, в силу комбинаторного принципа умножения всего получается $n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - (m - 1))$ упорядоченных выборок из n элементов по m элементов.

Определение размещения. Конечные упорядоченные подмножества заданного множества называются ***размещениями***.

Число всевозможных размещений из n элементов по m *обозначают* A_n^m (A – первая буква французского слова *arrangement* – размещение). Читается «число размещений из эн элементов по эм» или «A из эн по эм».

Утверждение. Число размещений A_n^m, где $m \le n$, можно вычислить по формуле

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Из формулы числа размещений следует

$$A_n^1 = n,\ A_n^2 = n(n-1),\ A_n^3 = n(n-1)(n-2),$$

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6,\ A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24,\ A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Принято считать, что $A_n^0 = 1$. Это верно, поскольку существует только одно пустое множество $\varnothing$ и можно считать, что оно может быть упорядочено одним-единственным образом. Кроме того, это логично: есть единственный способ не выбирать ни одного объекта из n имеющихся – «ничего не делать».

Замечание. *Перестановки – это частный случай размещения при* $m = n$, *т. е.* $A_n^{n-1} = P_n = n!$ *Кроме того, для* $m = n - 1$ *в формуле для числа размещений имеем* $A_n^{n-1} = A_n^n = n!$

Последнее равенство справедливо, так как если из n различных объектов выбраны $n - 1$ и расположены в некотором порядке, то на оставшееся место может претендовать только один оставшийся элемент, который можно и не выбирать, т. е. $A_n^{n-1} = A_n^n$.

Пример. Сколько существует в n-буквенном алфавите m-буквенных «слов», состоящих из различных букв?

По формуле для количества размещений искомое число

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Например, из 33 букв русского алфавита можно составить $A_{33}^2 = \frac{33!}{(33-2)!} = 33 \cdot 32 = 1056$ двухбуквенных слов, не содержащих повторений букв.

Пример. Студенту-социологу необходимо срочно до отчисления пересдать 2 экзамена на протяжении 4 дней. Посчитать, сколько вариантов теоретически существует для сдачи этих экзаменов.

Искомое число способов равно числу 2-элементных упорядоченных подмножеств, т. е. дней сдачи экзаменов, 4-элементного множества. По формуле числа размещений оно равно $A_4^2 = 12$.

В некоторых задачах по комбинаторике не имеет значения порядок расположения объектов в той или иной совокупности. Важно лишь то, какие именно элементы ее составляют. Вот интересующий нас сейчас вопрос: сколькими способами можно выбрать из n различных предметов m штук ($m \le n$)?

Например, пусть из 4 корзин, обозначенных буквами А, Б, В и Г, нужно выбрать 2. Сколькими способами это можно сделать? Рассмотрим этот пример, немного изменив условие, а именно: выбранные корзины будем отмечать тем, что положим в них шары. Можно заметить, что каждый выбор пары корзин встречается в списке 12 соответствующих размещений дважды, например АБ и БА. Сейчас для нас несущественно, какой шар первым или вторым оказался в корзине или, другими словами, в каком порядке осуществлялся выбор корзин. Поскольку в нашем случае, т. е. перемен мест, двух выбранных корзин, т. е. перестановок, всего 2, то 2 корзины из 4 можно выбрать 12 : 2 = 6 способами.

Определение сочетания. Конечные неупорядоченные подмножества заданного множества называют ***сочетаниями***.

Отметим, что перестановки и размещения – это упорядоченные множества, а сочетания – это неупорядоченные множества. Сочетание – это такая выборка элементов, при которой их порядок совершенно не важен.

Число всевозможных сочетаний из n элементов по m обозначают C_n^m (C – первая буква французского слова *combinaison* – сочетание). Читается «число сочетаний из эн элементов по эм» или «C из эн по эм».

Утверждение. Число сочетаний C_n^m, где $m \le n$, можно вычислить по формуле

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Формула числа сочетаний интересна уже тем, что дробь, стоящая в ее правой части, равна целому числу, т. е. все числа, стоящие в знаменателе, сократятся с числами, стоящими в числителе. В частности, из формулы числа сочетаний следует, что

$$C_n^1 = n,\ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2},\ C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

$$C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{2!} = 3,\ C_4^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} = 4,\ C_5^4 = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!} = 5.$$

Если в этой формуле для C_n^m положить $m = 0$, то получим, что $C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$, поэтому *принято считать*, что $C_n^0 = 1$. Это равенство имеет содержательный смысл, состоящий в том, что есть только один способ не выбирать ни один элемент (или выбрать 0 элементов) из n-элементного множества.

Замечание. *Обратим внимание на своеобразную симметричность формулы для числа сочетаний: если заменить m на n – m, то получится то же самое выражение, только факториалы в знаменателе поменяются местами:*

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m.$$

Например, пусть в группе из n студентов-социологов надо выбрать m студентов для участия в студенческой факультетской конференции. Выбор m участников конференции равносилен выбору $n - m$ студентов группы, не участвующих в конференции. Поэтому число способов, которым можно выбрать m человек из n, равно числу способов, которым можно выбрать $n - m$ человек из n. Это означает, что $C_n^m = C_n^{n-m}$ или непосредственно $\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-n+m)!}$.

В частности, $C_5^0 = C_5^5 = 1,\ C_4^1 = C_4^3 = 4.$

Пример. Посчитаем, сколькими способами можно выбрать трех человек на три одинаковые должности из десяти кандидатов.

Поскольку должности одинаковые, то порядок в каждой выборке из 3 человек не имеет значения. По формуле для числа сочетаний искомое количество способов выбора на 3 одинаковые должности из 10 кандидатов $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot (7)!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$

Большинство задач этого раздела содержит слово «сколько». Одна из причин, по которой мы затрудняемся ответить на вопросы, начинающиеся с этого слова, состоит в отсутствии универсальной схемы, с помощью которой на них можно было бы ответить. В этом разделе были рассмотрены некоторые общие формулы для подсчета вариантов, использованные при решении отдельных задач.

При решении комбинаторных задач следует ответить на следующие вопросы.

1. Из какого конкретного множества осуществляется выбор, т. е. надо найти n – число элементов этого множества.

2. Что требуется сделать: расставить все в ряд (перестановки) или выбрать часть упорядоченного подмножества?

3. Важен ли при выборе порядок? Если порядок важен, то применяем формулу для размещений, если не важен – формулу для сочетаний.

Примеры решения задач

1. Сколькими способами 7 студенток могут организовать хоровод на студенческом капустнике?

Решение. Для решения отметим одну из девушек, скажем отличницу. Теперь надо указать, где будут располагаться остальные девушки: кто будет первой по кругу от отличницы, кто второй, третьей, ..., шестой. Задача свелась к пересчету способов расположения 6 оставшихся девушек в последовательность, т. е. речь идет о всех перестановках из $n - 1$ элементов, где $n = 7$. Число таких перестановок равно $P_{n-1} = (n-1)! = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

2. Из группы социологов, играющих в шахматы, состоящей из 25 человек, надо выбрать шахматную команду из 4 человек, играющих на I, II, III и IV доске. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как из 25 человек выбираются четверо и порядок важен при распределении их по доскам, то число способов есть число размещений из 25 по 4, т. е.:

$$A_{25}^{4} = 25!\,/\,(25-4)! = 25!\,/\,21! = 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 = 303\,600 \text{ способов.}$$

3. Студенту-социологу необходимо пересдать 2 экзамена на протяжении 6 дней (в один день можно сдавать не более одного экзамена). Сколько вариантов теоретически существует для сдачи этих экзаменов?

Решение. Искомое число способов равно числу 2-элементных упорядоченных подмножеств, т. е. вариантов сдачи экзаменов, 6-элементного множества дней. По формуле числа размещений это число равно $A_6^2 = \dfrac{6!}{(6-2)!} = 6 \cdot 5 = 30$.

4. Возьмем буквы А, Б и Р. Какие перестановки из этих букв можно получить? Сколько таких наборов получится, если буквы в наборе не повторяются?

Решение. Получатся наборы: БАР, БРА, АРБ, АБР, РАБ, РБА и $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ наборов.

5. Возьмем следующие плоды: банан (Б), ананас (А) и киви (К). Какие сочетания из этих плодов, взятых по 2, можно составить любителю экзотических фруктов и сколько всего таких наборов получится?

Решение. Получатся следующие наборы: БА («банан, ананас» и «ананас, банан» – один и тот же набор), АК и КБ. Всего по формуле числа сочетаний получим $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ набора.

6. На факультете философии и социальных наук в танцевальном кружке занимается 10 человек, в кружке художественного слова — 15, в вокальном —12 и в фотокружке — 20 человек. Сколькими способами можно составить студенческую бригаду художественной самодеятельности из 4 чтецов, 3 танцоров, 5 певцов и 1 фотографа?

Решение. Разобьем задачу на подзадачи.

1. Сначала найдем, сколькими способами можно выбрать чтецов: при выборе 4 чтецов из 15 порядок не важен, т. е. используем правило числа сочетаний

$$C_{15}^4 = 15! / (4! \cdot 11!) = (12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15) / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = 1365.$$

2. Найдем, сколькими способами можно выбрать танцоров: при выборе 3 танцоров из 10 порядок не важен, т. е. используем правило числа сочетаний

$$C_{10}^3 = 10! / (3! \cdot 7!) = (8 \cdot 9 \cdot 10) / (1 \cdot 2 \cdot 3) = 120.$$

3. Выбираем певцов: используем правило числа сочетаний 5 из 12

$$C_{12}^5 = 12! / (5! \cdot 7!) = (8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12) / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = 792.$$

4. Выбираем фотографа: используем правило числа сочетаний 1 из 20

$$C_{20}^1 = 20! / (1! \cdot 19!) = 20.$$

Поскольку выбор производится по всем четырем позициям, а не по одной, применяем комбинаторный принцип умножения:

$$C_{15}^4 \cdot C_{10}^3 \cdot C_{12}^5 \cdot C_{20}^1 = 2\,594\,592\,000 \text{ способами.}$$

7. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числах не повторяются?

Решение. Выбираем 3 цифры из 7, порядок важен: $A_7^3 = 7!/4! = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ способов.

8. В студенческой группе 12 девушек и 16 юношей. Сколькими способами можно выбрать 2 студентов одного пола?

Решение. Можно выбрать 2 девушек или 2 юношей. 2 девушек из 12 можно выбрать C_{12}^2 способами, $C_{12}^2 = 12! / (2! \cdot 10!) = (11 \cdot 12) / 2 = 66$, а 2 юношей из 16 – C_{16}^2 способами, $C_{16}^2 = 16! / (2! \cdot 14!) = 120$. Применяя комбинаторный принцип сложения, выбираем 2 девушек или 2 юношей и получаем: $C_{12}^2 + C_{16}^2 = 66 + 120 = 186$.

9. В книжном магазине в гуманитарном отделе продают 9 книг зарубежных авторов по социологии и 7 книг российских авторов по социологии. Сколькими способами можно выбрать: а) 3 книги по социологии; б) 6 книг по социологии зарубежных авторов или российских; в) 4 книги зарубежных авторов и 3 российских?

Решение. а) Так как не указано, книги каких авторов нужно выбирать, то выбрать 3 книги из 16 можно C_{16}^{3} способами. Получаем

$$C_{16}^{3} = 16! / (3! \cdot 13!) = (14 \cdot 15 \cdot 16) / (1 \cdot 2 \cdot 3) = 560 \text{ способами;}$$

б) выбрать 6 книг зарубежных авторов можно $C_{9}^{6} = 84$ способами, а 6 книг российских авторов $C_{7}^{6} = 7$ способами. По комбинаторному принципу сложения выбрать 6 книг по социологии зарубежных авторов или российских авторов можно $C_{9}^{6} + C_{7}^{6} = 84 + 7 = 91$ способом;

в) выбрать 4 книги зарубежных авторов из 9 можно C_{9}^{4} способами, а 3 книги российских авторов из 7 – C_{7}^{3} способами. Поэтому набор из 4 книг зарубежных авторов и 3 книг российских авторов можно составить по комбинаторному принципу умножения

$$C_{9}^{6} \cdot C_{7}^{3} = (9! / (4! \cdot 5!)) \cdot (7! / (3! \cdot 4!)) = 4410 \text{ способами.}$$

10. В группе студентов-социологов 17 девушек и 3 юноши. Выбирают по жребию трех человек в оргкомитет «Дня социолога». Сколько существует способов выбрать 2 девушек и 1 юношу?

Решение. 2 девушек из 17 можно выбрать C_{17}^{2} способами, а 1 юношу из 3 – C_{3}^{1} способами. Тогда по комбинаторному принципу умножения 2 девушек и 1 юношу можно выбрать $C_{17}^{2} \cdot C_{3}^{1} = (17! / (2! \cdot 15!)) \cdot (3! / (1! \cdot 2!)) = ((16 \cdot 17) / 2) \cdot 3 = 8 \cdot 17 \cdot 3 = 408$ способами.

11. Студенты-социологи сдают экзамен по дисциплине «Основы высшей математики». В группе 24 человека, из них формируют 2 подгруппы по 12 человек. Среди студентов есть 5 отличников. Сколько существует способов для формирования подгруппы, чтобы 2 отличника попали в одну подгруппу, а 3 – в другую?

Решение. Сформируем первую подгруппу: в ней должно быть 2 отличника и 10 неотличников. Во-первых, 2 отличников выбираем из 5 всего C_{5}^{2} способами, далее выбираем 10 неотличников из остальных 19 студентов. Так как из 24 студентов 5 отличников нужно исключить, то это можно осуществить C_{19}^{10} способами. По комбинаторному принципу умножения 2 отличников и 15 неотличников можно выбрать

$$C_{5}^{2} \cdot C_{19}^{10} = (5! / (2! \cdot 3!)) \cdot (19! / (10! \cdot 9!)) = 10 \cdot 92\,378 = 923\,780 \text{ способами.}$$

Для второй подгруппы – выбираем 3 отличника из 5 и 9 неотличников из остальных 19 студентов, этот выбор можно осуществить

$$C_{5}^{3} \cdot C_{19}^{9} = (5! / (3! \cdot 2!)) \cdot (19! / (9! \cdot 10!)) = 10 \cdot 92\,378 = 923\,780 \text{ способами.}$$

По комбинаторному принципу сложения способов сформировать подгруппы, чтобы 2 отличника попали в одну подгруппу, а 3 – в другую –

$$C_{5}^{2} \cdot C_{19}^{10} + C_{5}^{3} \cdot C_{19}^{9} = 923\,780 + 923\,780 = 1\,847\,560.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколькими способами 10 студентов могут встать в очередь друг за другом в университетской библиотеке?

2. Сколькими способами можно посадить 7 студентов за круглый стол на семинарском занятии?

3. Верно ли, что вершины нарисованного на плоскости правильного пятиугольника можно буквами А, Б, С, Д, Е обозначить 120 способами?

4. Верно ли, что если есть материи 6 различных цветов, то 3-цветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины можно сделать 120 способами?

5. Студенты-социологи изучают в каждом семестре 8 различных дисциплин. Расписание занятий на понедельник состоит из 4 различных дисциплин. Сколько различных расписаний на понедельник может составить методист факультета?

6. Сколько поединков по борьбе должно быть проведено между 15 спортсменами, если каждый из них должен встретиться с каждым?

7. В книжный магазин привезли новых 20 книг, из них по социологии – 5, по философии – 8, по высшей математике – 4 и по психологии – 3. Сколькими способами можно составить набор для университетской библиотеки, чтобы в него входило 3 книги по социологии, 5 – по философии, 3 – по высшей математике и 2 – по психологии?

8. Сколькими способами можно составить расписание из 4 различных дисциплин на один день, если имеется 10 дисциплин и одна из них – физическая культура – должна быть последней?

9. Возьмем буквы О, Е и Я. Какие перестановки из этих букв можно получить? Сколько таких наборов получится, если буквы в наборе не повторяются?

10. Колода состоит из 36 карт. Сколько всего существует способов извлечь 1 даму и 2 королей без учета их масти?

11. Студенты-социологи сдают экзамен по дисциплине «Философия». В группе 22 человека, из них формируют 2 подгруппы по 11 человек. Среди студентов есть 5 отличников. Сколько существует способов формирования подгруппы, чтобы 2 отличника попали в одну подгруппу, а 3 – в другую?

12. Сколько неудачных попыток можно сделать, чтобы открыть сейф, если код сейфа содержит 4 различные цифры?

13. В библиотеке 30 книг стоит на книжной полке, из них 27 книг различных авторов и 3 книги одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

14. В конкурсе участвовало 8 фирм, 3 из которых жюри должно присудить 1-е, 2-е и 3-е места. Сколько вариантов решения жюри существует?

15. Перед выпуском группа студентов-социологов, состоящая из 19 человек, обменялась фотографиями. Сколько всего фотографий было роздано?

16. Для проведения социологического опроса социологу необходимо выбрать 4 группы студентов выпускных курсов, имеющих гуманитарное направление обучения. Он подобрал 8 одинаково подходящих групп. Сколько существует способов отбора 4 групп из 8 в случайном порядке?

17. В лотерее «Спортлото» игрок должен зачеркнуть 6 из 49 возможных чисел от 1 до 49. Сколько существует всевозможных вариантов выбора для игрока?

18. В хоккейном турнире участвуют 6 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой 1 игру. Сколько игр сыграно в турнире?

19. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в запись числа только 1 раз?

20. Фирма нуждается в организации 4 новых складов. Ее сотрудники подобрали 8 одинаково удобных помещений. Сколько существует способов отбора 4 помещений из 8 в случайном порядке?

21. Правление коммерческого банка выбирает из 8 кандидатов 3 человека на различные должности (все 8 кандидатов имеют равные шансы). Сколькими способами это можно сделать?

22. Из 10 мужчин и 8 женщин набирают состав работников фирмы. Требуется 6 человек, из них 4 мужчин и 2 женщины. Сколькими способами можно выбрать такой состав сотрудников?

4.1.3. Комбинаторика. Выбор с повторениями

Одна из важных особенностей комбинаторики заключается в том, что в ней большую роль играет точная формулировка задачи. Большинство ошибок связано с некорректными постановками задач из-за неопределенности формулировок. Когда речь идет о подсчете числа студентов в группе, никакой неопределенности не возникает. Менее определенная ситуация возникает, когда посчитать нужно число вариантов или способов. Рассмотрим следующие задачи.

Пример. Сколько различных «слов» (анаграмм) можно составить из букв, входящих в слово АНКЕТА?

Решение. Слово АНКЕТА состоит из 6 букв, которые можно переставить $P_6 = 6!$ способами. Однако заметим, что в данном слове буква А встречается 2 раза, и, меняя местами 2 буквы А, мы не получим новых слов. Так как 2 буквы А можно переставить $P_2 = 2!$ способами, то все 6! перестановок букв, входящих в слово АНКЕТА, разбиваются на группы по 2! одинаковых перестановок в каждой группе. Количество таких групп равно $\frac{6!}{2!}$, значит, искомое число «слов» слова АНКЕТА равно

$$\frac{P_6}{P_2} = \frac{6!}{2!} = \frac{(2!)\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2!} = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 360.$$

Пример. Сколько различных «слов» (анаграмм) можно составить из букв, входящих в слово КАРАОКЕ?

Напомним, что комбинаторика позволяет считать *словом* любую комбинацию букв. Математики любят сводить новые задачи к уже решенным. Для того чтобы воспользоваться способом подсчета числа перестановок, применим новый для нас ***прием растождествления***. Он показывает, как можно переходить от одного понятия «различия» к другому. При точном понимании терминов, т. е. при соблюдении *главного правила комбинаторики*, можно открыть дополнительные возможности решения комбинаторных задач. Слово «растождествление» вряд ли есть в словарях, но оно достаточно точно передает суть дела. Суть его в том, чтобы рассматривать одинаковые буквы слова как различные, например с помощью их индексации.

После индексации букв слова КАРАОКЕ, в котором 2 буквы К, 2 буквы А и 1 буква О, 1 буква Е, 1 буква Р, получим $7 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1$ различных букв $К_1$, $А_1$, $Р_1$, $А_2$, $О_1$, $К_2$, $Е_1$. Из них можно составить $P_7 = 7!$ различных 7-буквенных слов, т. е. перестановок из 7 различных букв. Они образуют вспомогательный перечень.

Не трогая остальных букв и меняя местами лишь 2 буквы К всеми возможными способами, а их будет по числу перестановок из 2 букв $К_1$, $К_2$, всего 2!, получим вроде бы новые перестановки, но без индексации букв они будут неразличимы. Поэтому общее число перестановок уменьшится в 2! раз. Аналогичные рассуждения верны и для 2 букв А, и лишь буквы О, Е и Р по одной. В итоге количество анаграмм слова КАРАОКЕ без учета повторов слов, пересчитанных с помощью комбинаторного принципа умножения, окажется равным числу $7! / (2! \cdot 2!) = 1260$. Чтобы не нарушать единообразия, поделим указанное выражение на $1! = 1$, соответствующее числу перестановок одной буквы О, Е и Р в указанных анаграммах, поскольку полученное число анаграмм принято записывать в виде

$$7! / (2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!) = 1260.$$

Для того чтобы частный случай подсчета анаграмм не стал, как сказал бы Козьма Прутков, «пустою забавою», рассмотрим эту задачу в более общей постановке.

Определение перестановок с повторениями. Перестановка элементов конечного набора, состоящего из n элементов таких, что элемент a_1 повторяется n_1 раз, элемент a_2 повторяется n_2 раз, ..., элемент a_k повторяется n_k раз, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, называется ***перестановкой с повторениями***.

Число всевозможных перестановок с повторениями, а именно выборов n объектов $n_1, n_2, \ldots, n_k$ с повторяющимися элементами, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, обозначают $\overline{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. С помощью горизонтальной черты над буквой P отличают случай с повторениями от обычных перестановок. Читается «число перестановок с повторениями из эн-один, эн-два и т. д. до эн-ка» или «пэ с чертой из эн-один, эн-два и т. д. до эн-ка».

Утверждение. Число перестановок с повторениями $\overline{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, можно вычислить по формуле

$$\overline{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

С помощью формулы числа перестановок с повторениями число анаграмм слова КАРАОКЕ, подсчитанное выше, можно записать в виде

$$\overline{P}_{2,2,1,1,1} = 7! \,/\, (2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!) = 1260.$$

Далее дадим обобщение понятия размещения, а именно – рассмотрим задачи, решения которых приводят к понятию размещения с повторениями.

Пример. Сколько двухбуквенных «слов» можно составить из 33 букв алфавита русского языка?

Решение. Двухбуквенное «слово» может быть составлено либо из 2 различных букв, либо из 2 одинаковых. На первое место мы можем поставить любую из 33 букв алфавита русского языка. Независимо от этого, на второе место опять можно поставить любую из 33 букв. Значит, по комбинаторному принципу умножения количество двухбуквенных слов будет равно $33 \cdot 33 = 33^2$.

Определение размещений с повторениями. Упорядоченный набор элементов, содержащий m элементов из данных n, причем один и тот же элемент может повторяться не более m раз, называется ***размещениями с повторениями***.

Число всевозможных размещений с повторениями, а именно выборов m объектов из повторяющихся n элементов, обозначают $\overline{A_n^m}$. С помощью горизонтальной черты над буквой A отличают случай с повторениями от обычных размещений. Читается «число размещений с повторениями из эн по эм» или «A с чертой из эн по эм». Первое название излишне длинное и «торжественное», но в ясности ему не откажешь.

Утверждение. Число размещений с повторениями $\overline{A_n^m}$ можно вычислить по формуле:

$$\overline{A_n^m} = n^m.$$

Пример. Сколько существует пятизначных натуральных чисел, в записи которых используются цифры 1, 2, 3?

Решение. По условию задачи даны три цифры, из которых составляются пятизначные натуральные числа, значит, $n = 3$. Заметим также, что цифры в записи числа будут повторяться. Пятизначное число представляет собой упорядоченный набор из пяти элементов-цифр, поэтому $m = 5$. Тогда по формуле для числа размещений с повторениями количество пятизначных натуральных чисел, в записи которых используются цифры 1, 2, 3 равно $\overline{A_3^5} = 3^5 = 243$.

Замечание. *Обратим внимание на то, что в формуле числа размещений с повторениями* $\overline{A_n^k} = n^k$ *допустим случай, когда* $k > n$.

Например, число размещений с повторениями четырехбуквенных слов, составленных из алфавита, содержащего всего две буквы А и М, равно $\overline{A_2^4} = 2^4 = 16$. Среди этих размещений с повторениями есть, например, слова АААА, АААМ, АММА, МАМА, МААМ, МААА, ММММ.

Пример. Шестизначный велосипедный номер считается «счастливым», если в нем нет ни одной цифры 8, поскольку «восьмерка» – один из дефектов велосипедного колеса. Посчитаем, каких номеров больше: «счастливых» или «несчастливых».

Решение. На первый взгляд кажется, что поскольку 8 – это лишь одна цифра из десяти возможных, то счастливых номеров должно быть в несколько раз больше. Счастливый номер – это шестибуквенное слово в «алфавите», содержащем девять цифр, т. е. все цифры, кроме восьмерки: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Число таких слов по формуле числа размещений с повторениями равно $\overline{A_9^6} = 9^6 = 531\,441$. Если отбросить слово «000000», непригодное в качестве велосипедного номера, то счастливых номеров будет 531 440. Всего шестизначных номеров, за вычетом непригодного, равно $\overline{A_{10}^6} - 1 = 1\,000\,000 - 1 = 999\,999$. Поэтому несчастливых номеров $999\,999 - 531\,440 = 468\,559$, т. е. ненамного меньше, чем счастливых.

Любопытно то, что если бы номера были бы семизначными, то тогда счастливых номеров было бы меньше, чем несчастливых.

Напомним, что *перестановки* – частный случай *размещений* и *формула для числа перестановок* – частный случай *формулы для числа размещений*. А как обстоит дело для перестановок и размещений с повторениями? Являются ли *перестановки с повторениями* частным случаем *размещений с повторениями*?

Замечание. *Формула для числа перестановок с повторениями не является частным случаем формулы для числа размещений с повторениями.*

Разберем, в чем тут дело. Когда речь идет о повторениях в упорядоченном или неупорядоченном наборе объектов, то возможны две противоположные ситуации:

а) каждый объект должен повторяться в наборе строго заданное число раз;

б) нет никаких ограничений на число повторений объектов, кроме общего их числа в наборе.

В этом отличие перестановок с повторениями и размещений с повторениями. *Объединяет их другое*: *это упорядоченные наборы*. Отметим, что для *неупорядоченных наборов* ситуация с фиксированным набором каждого объекта бессодержательна, поскольку в таком случае это один вариант.

Размещение с повторениями – термин достаточно явный и удобный. В случае «сочетаний с повторениями» с ясностью не все благополучно. Хотя, если перестановки и размещения могут быть с повторениями, имеет смысл говорить и о *сочетаниях с повторениями*.

Определение сочетаний с повторениями. Неупорядоченный набор элементов, содержащий m элементов из данных n, причем один и тот же элемент может повторяться не более m раз, называется ***сочетанием с повторениями***.

Число всевозможных сочетаний с повторениями, а именно выборов m объектов из повторяющихся n элементов *обозначают* $\overline{C_n^m}$. Читается: «число сочетаний из эн по эм» или «C с чертой из эн по эм». Для нахождения числа $\overline{C_n^m}$ сочетаний с повторениями из n элементов по m приходится проявить определенную избирательность.

Утверждение. Число сочетаний с повторениями $\overline{C_n^m}$ можно вычислить по формуле:

$$\overline{C_n^m} = C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m} = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Рассмотрим *модельную задачу о голосовании*.

Пример. При принятии решения члены комитета из 7 человек голосуют: «за», «против», «воздержался». Посчитаем, сколько может быть возможных исходов голосования по данному решению.

Если нас интересует, кто и как голосовал, т. е. поименное открытое голосование, то тогда речь идет о *размещениях с повторениями*, что даст $\overline{A_3^7} = 3^7 = 2187$ возможных исходов голосования.

Если нас не интересует, кто и как голосовал, а только общий результат голосования или, например, голосование тайное, тогда речь идет о *сочетаниях с повторениями*. В этом случае подсчитывается число всевозможных сочетаний $m = 7$ голосований членов комитета из повторяющихся $n = 3$ видов голосования: «за», «против», «воздержался», что даст $\overline{C_n^m} =$ $= \overline{C_3^7} = C_{7+3-1}^7 = C_9^7 = 9! / (7! \cdot 2!) = (9 \cdot 8) / 2 = 36$ возможных исходов голосования.

Замечание. *Сочетания с повторениями и размещения с повторениями объединяет то, что нет никаких ограничений на число повторений элементов, кроме их общего числа в наборе, поэтому в формуле числа сочетаний с повторениями* $\overline{C_n^m} = \dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$ *допустим случай, когда* $m > n$.

Отличаются сочетания (с повторениями или без) от размещений (с повторениями или без) тем, что первые – неупорядоченные наборы, а вторые – упорядоченные.

Рассмотрим еще одну *модельную задачу*: сколькими способами могут 4 пирата разделить между собой 8 одинаковых монет?

Рассматриваем два варианта.

Вариант I – пираты с признаками морали, т. е. допускается любой способ дележа монет, при котором каждый пират получает хотя бы 1 монету. Варианты дележа монет между пиратами могут быть разные. Возможен такой вариант, где первому пирату достанется 2 монеты, второму – 1 монета, третьему – 3 монеты и четвертому – 2 монеты. Рассмотрим этот вариант, записывая его в виде множества, где M_i – монета i-го пирата и «перегородки» указывают способ дележа монет среди пиратов: $\{M_1M_1 \mid M_2 \mid M_3M_3M_3 \mid M_4M_4\}$. Три «перегородки-разделителя» делят пиратов на 4 группы по количеству монет. Заметим, что разделители могут находиться только в промежутках между M_i, но не слева и не справа от них и в каждом промежутке должно быть не более одного разделителя, поскольку каждый пират получает хотя бы 1 монету. Таким образом, в задаче речь идет о выборе 3 мест для разделителей из 7 возможных мест (промежутков). Получаем, что в построенной «модели» задачи число способов дележа монет будет равно $C_{8-1}^{4-1} = C_7^3 = 35$.

Вариант II – пираты без признаков морали, т. е. допускаются любые способы дележа, когда, например, некоторые пираты могут остаться без монет или все монеты достанутся одному пирату. Например, первому пирату – 3 монеты, второму – ни одной, третьему – 5 монет и четвертому – ни одной. Получим, что число способов дележа во втором варианте соответствует числу сочетания с повторениями $\overline{C_4^8} = C_{8+4-1}^{4-1} = C_{11}^3 = 165$. А что, собственно, повторяется в варианте II? Это не монеты, поскольку, несмотря на их идентичность, они были и в варианте I. Каждый пират в единственном экземпляре. Что же тогда? Если забыть о способе решения этой задачи, то придется признать, что «повторяются» все-таки пираты.

Замечание. *Мораль из сказанного проста: без особой надобности не следует связываться с термином «сочетания с повторениями».*

Примеры решения задач

1. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 1, 1, 2, 2, 2?

Решение. В задаче нужно найти число перестановок с повторениями – «1» повторяется 3 раза и «2» повторяется 3 раза:

$$\overline{P}_{3,3} = 6! / (3! \cdot 3!) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3) = 20.$$

2. Возьмем буквы А, Б и Р. Какие перестановки из этих букв можно получить, если буква А в наборе повторяется 2 раза? Сколько таких перестановок можно получить?

Решение. Получаются наборы

БАРА, БРАА, БААР, ААРБ, ААБР, АБАР,

АРАБ, АРБА, АБРА, РАБА, РААБ, РБАА.

$$\overline{P}_{2,1,1} = 4! / (2! \cdot 1! \cdot 1!) = 3 \cdot 4 = 12 \text{ наборов.}$$

3. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах «философия», «социология», «математика», «логика»?

Решение. В слове «философия», состоящем из 9 букв, буквы Ф, О и И повторяются дважды:

$$\overline{P}_{2,2,2,1,1,1} = 9! / (2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!) =$$
$$= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) / (1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2) = 45\,360.$$

В слове «социология», состоящем из 10 букв, буква О повторяется трижды, буква И – дважды:

$$\overline{P}_{1,3,1,2,1,1,1} = 10! / (1! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!) =$$
$$= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10) / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2) = 302\,400.$$

В слове «математика», состоящем из 10 букв, буква А повторяется трижды, буквы М, Т – дважды:

$$\overline{P}_{3,2,2,1,1,1} = 10! / (3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!) =$$
$$= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10) / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2) = 151\,200.$$

В слове «логика» все буквы разные:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

4. Группа из 25 студентов сдает экзамен по основам высшей математики. Положительные оценки для сдачи экзамена 4, 5, 6, ..., 10. Сколькими способами может быть заполнена экзаменационная ведомость?

Решение. Для каждого студента выбирается одна оценка из семи, выбор делается 25 раз. Возможны повторения, так как каждая оценка может быть выбрана любое число раз. Порядок важен, так как он показывает, какому студенту достается выбранная оценка. Таким образом, число способов есть число размещений с повторением из 7 по 25, $\overline{A_7^{25}} = 7^{25}$.

5. Возьмем буквы А, Б, Р. Какие размещение из этих букв по 2 можно получить? Сколько таких наборов получится, если: а) буквы не повторяются; б) буквы могут повторяться?

Решение. а) БА, БР, АР, АБ, РБ, РА и $A_3^2 = 3! / 1! = 6$;

б) БА, БР, ББ, АА, АБ, АР, РБ, РА, РР и $\overline{A_3^2} = 3^2 = 9$.

6. Пять студентов вошли в лифт на 1-м этаже 9-этажного университетского корпуса. Сколькими способами студенты могут выйти из лифта на нужных этажах?

Решение. Каждый из 5 студентов может выйти на любом из 8 этажей со 2-го по 9-й включительно. Таким образом, получаем $\overline{A_8^5} = 8^5 = 32\,768$ способов.

7. В магазине имеется 7 видов тортов. Сколькими способами можно составить набор, содержащий 3 торта? А если имеются 3 вида тортов, а нужен набор из 7?

Решение. Поскольку порядок расположения тортов в наборе не играет роли, то искомое число наборов равно числу сочетаний с повторениями из 7 по 3 в каждом.

$$\overline{C_7^3} = (7 + 3 - 1)! / (3! \cdot (7 - 1)!) = 9! / (3! \cdot 6!) = (7 \cdot 8 \cdot 9) / (1 \cdot 2 \cdot 3) = 84.$$

Если имеется 3 вида тортов, а нужен набор из 7 тортов, то число возможных наборов равно

$$\overline{C_3^7} = (3 + 7 - 1)! / (7! \cdot (3 - 1)!) = 9! / (7! \cdot 2!) = (8 \cdot 9) / (1 \cdot 2) = 36.$$

8. Анкета по изучению общественного мнения содержит 10 вопросов, на каждый из которых отвечающий дает один из трех ответов: «да», «нет» и «не знаю». Найдите число всех различных способов заполнения анкеты.

Решение. Каждый вариант заполнения анкеты представляет собой упорядоченный набор из 10 элементов (значит, $m = 10$) трех видов: «да», «нет» и «не знаю», т. е. $n = 3$. Заметим также, что данные элементы, т. е. варианты ответов на вопросы анкеты, в наборе будут повторяться, например, может быть такой способ заполнения анкеты, при котором на все 10 вопросов дан ответ «да». Значит, по формуле для числа размещений с повторениями искомое количество способов заполнения анкеты равно $\overline{A_3^{10}} = 3^{10}$.

9. В магазине продаются булочки 3 видов: с маком, изюмом и повидлом. Староста группы решил купить 6 булочек, чтобы угостить девушек. Сколько возможных вариантов выбора у него есть?

Решение. По условию задачи требуется составить набор из 6 булочек, которые выбираются (возможны повторения наименований булочек) из 3 видов булочек (с маком, изюмом или повидлом). Значит, по формуле для числа сочетаний с повторениями искомое количество возможных наборов булочек будет равно

$$\overline{C_3^6} = C_{6+3-1}^6 = C_8^6 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{6! \cdot 2!} = \frac{56}{2} = 28.$$

10. Сколько трехзначных чисел можно составить из нечетных цифр?

Решение. По условию задачи требуется составить трехзначные числа, т. е. $m = 3$, из 5 нечетных цифр: 1, 3, 5, 7, 9. Так как при составлении чисел порядок следования цифр важен, то по формуле для числа размещений с повторениями получаем количество вариантов, равное $\overline{A_5^3} = 5^3 = 125$.

Задачи для самостоятельного решения

1. На пяти одинаковых карточках написаны буквы: на двух карточках Л, на остальных трех – И. Сколько существует способов составить слово ЛИЛИИ?

2. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах: «баллада», «колокол», «ротор», «карате», «талант»?

3. В цветочном магазине продаются цветы 6 сортов. Сколькими способами можно составить букет из 7 цветов?

4. Группа студентов из 6 человек сдает экзамен по английскому языку. Сколькими способами может быть заполнена экзаменационная ведомость?

5. Возьмем буквы А, О, Е. Какие размещение из этих букв по 2 можно получить? Сколько таких наборов получится, если: а) буквы не повторяются; б) буквы могут повторяться?

6. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах: «психология», «социология», «биология»?

7. Кодовый замок сейфа открывается, если набрана определенная комбинация из 4 цифр. Сколько всего существует кодовых комбинаций цифр замка сейфа?

8. В составе следственной группы из 7 человек должны быть психологи, следователи, эксперты, криминалисты, хотя бы по одному. Сколько различных составов следственных групп может быть?

9. Шесть человек вошли в лифт на 1-м этаже 10-этажного дома. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта на нужных этажах?

10. В кошельке студента находится достаточно большое количество 1-, 2-, 5- и 10-копеечных монет. Сколькими способами студент может извлечь 3 монеты из кошелька?

11. В студенческой столовой из всего ассортимента наибольшим спросом пользуются сосиски в тесте, ватрушки и пончики. Какие варианта покупки 5 «пирожков» (под «пирожками» понимаем ватрушки, сосиски или пончики) могут быть?

12. Номер автомобиля состоит из 2 букв и 4 цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

4.1.4. Использование комбинаторных методов для обработки и анализа социологических данных

Рассмотрим вопрос о том, с кем респондент проводит или предпочитает проводить свободное время. Предлагаются следующие варианты ответов:

1) с друзьями;
2) с коллегами по работе, учебе;
3) с членами своей семьи;
4) с другими родственниками;
5) в одиночестве;
6) с любимым человеком;
7) с домашним питомцем.

Респонденту обычно предлагается один из следующих способов ответа:

1) проранжировать, т. е. упорядочить (например, по важности) позиции;
2) отметить заданное число позиций (например, 3 позиции);

3) отметить заданное число позиций (например, 3 позиции) и проранжировать их;

4) отметить не больше заданного числа позиций.

Нас интересует: сколькими вариантами можно ответить на такой вопрос при каждом способе ответа? Этот вопрос важен, в частности, при статистической обработке данных анкеты.

Переведем эти вопросы на математический язык. Пусть имеется множество X, состоящее из n элементов (в нашем случае из 7). Требуется:

1) проранжировать, т. е. упорядочить (например, по важности), позиции – найти число перестановок из 7 элементов: $P_7 = 7! = 5040$;

2) отметить заданное число позиций (например, 3 позиции) – выбрать из 7-элементного множества подмножество, состоящее из 3 элементов, а это значит найти число сочетаний

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 35;$$

3) отметить заданное число позиций (например, 3 позиции) и проранжировать их – выбрать подмножество из 3 элементов и упорядочить его, а это значит найти

$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 5\cdot 6\cdot 7 = 210;$$

4) выбрать из множества X подмножество, состоящее не более чем из m элементов, – вычислить $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{m-1} + C_n^m$, при этом слагаемое C_n^0 учитывает случай, когда выбирается пустое множество или, применительно к ответам на вопрос анкеты, когда респондент не отмечает ни одной позиции, в нашем случае $C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 = 1 + 7 + 21 + 35 = 64$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько вариантов ответа у следующего вопроса анкеты, т. е. сколькими способами можно на него ответить? Отметьте, пожалуйста, 4 наиболее важных для Вас позиции и проранжируйте их. Расставьте все позиции по важности.

Что бы Вы сделали в первую очередь, оказавшись в сложной жизненной ситуации?

1. Обратился бы в администрацию своего предприятия (учреждения).
2. Обратился бы за помощью к коллегам по работе.
3. Попросил бы помощи у семьи, друзей.
4. Обратился бы в суд.
5. Написал (обратился) бы в международную организацию.

2. Сколько вариантов ответа у следующего вопроса анкеты, т. е. сколькими способами можно на него ответить? Отметьте, пожалуйста, 5 наиболее важных для Вас позиций. Отметьте, пожалуйста, 6 наиболее важных для Вас позиций и проранжируйте их по важности.

Если у Вас появится значительная сумма денег, то на что Вы их потратите в первую очередь?

1. Открою свое дело, вложу в бизнес.
2. Куплю дом, квартиру.
3. Куплю дорогие товары длительного пользования.
4. Вложу в ценные бумаги, положу под проценты.
5. Потрачу на поддержание своего здоровья.
6. Потрачу на собственное образование.
7. Сделаю ремонт квартиры, дома.
8. Помогу родственникам, близким.
9. Потрачу на развлечения.
10. Потрачу на благотворительность.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое комбинаторика? Основные комбинаторные принципы умножения и сложения.

2. Дайте определение перестановок из n элементов. По какой формуле можно найти число всевозможных перестановок из n элементов? Приведите соответствующий пример.

3. Что называют размещениями из n элементов по m элементов? По какой формуле можно найти число всевозможных размещений из n элементов по m элементов? Приведите соответствующий пример.

4. Дайте определение сочетаний из n элементов по m элементов. Чему равно число сочетаний из n элементов по m элементов без повторений? Приведите соответствующий пример.

5. В чем отличие комбинаторных понятий «размещение» и «сочетание»?

6. Как связаны комбинаторные понятия «перестановка» и «размещение»?

7. Каким равенством связаны числа перестановок, размещений и сочетаний?

8. Дайте определение перестановок с повторениями. Чему равно число перестановок с повторениями? Приведите соответствующий пример.

9. Дайте определение размещения с повторениями. Чему равно число размещения с повторениями? Приведите соответствующий пример.

10. Дайте определение сочетания с повторениями. Чему равно число сочетаний с повторениями? Приведите соответствующий пример.

11. Докажите, что $A_n^{n-1} = A_n^n = n!$.

12. Упростите выражения: а) $\dfrac{2}{n+1}C_{n+1}^{n-1}$; б) $C_9^4 + C_9^5$; в) $\dfrac{(A_7^4 \cdot C_6^4)}{P_5}$.

4.2. ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Теория вероятностей возникла в середине XVII в. Первые работы по ней, принадлежащие французским ученым Б. Паскалю и П. Ферма и голландскому ученому Х. Гюйгенсу, появились в связи с подсчетом различных вероятностей в азартных играх. Крупный успех теории вероятностей связан с именем швейцарского математика Я. Бернулли, установившего закон больших чисел для схемы независимых испытаний с двумя исходами.

Следующий период истории теории вероятностей (XVIII – начало XIX в.) связан с именами Абрахама де Муавра (Англия), Пьера Симона Лапласа (Франция), Карла Фридриха Гаусса (Германия) и Симеона Дени Пуассона (Франция). Это период, когда теория вероятностей уже находит ряд весьма актуальных применений в естествознании и технике (главным образом в теории ошибок наблюдений, развившейся в связи с потребностями геодезии и астрономии, и в теории стрельбы).

Третий период истории теории вероятностей (вторая половина XIX в.) связан в основном с именами русских математиков П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова и А. А. Маркова (старшего). Теория вероятностей развивалась в России и раньше (в XVIII в. ряд трудов по теории вероятности был написан работавшими в России Л. Эйлером, Н. Бернулли и Д. Бернулли; во второй период развития теории вероятностей следует отметить работы М. В. Остроградского по вопросам теории вероятностей, связанным с математической статистикой, и В. Я. Буняковского по ее применениям к страховому делу, статистике и демографии).

Наиболее распространенная в настоящее время логическая схема построения основ теории вероятностей разработана в 1933 г. советским математиком А. Н. Колмогоровым.

В Западной Европе во второй половине XIX в. получили большое развитие работы по математической статистике (в Бельгии – А. Кетле, в Англии – Ф. Гальтон) и статистической физике (в Австрии – Л. Больцман), которые наряду с основными теоретическими работами Чебышева, Ляпунова и Маркова создали основу для существенного расширения проблематики теории вероятностей в четвертом (современном) периоде ее развития. Этот период истории теории вероятностей характеризуется чрезвычайным расширением круга ее применений, созданием нескольких систем

Пьер Симон Лаплас
(1749–1827)

Абрахам де Муавр
(1667–1754)

Симеон Дени Пуассон
(1781–1840)

безукоризненно строгого математического обоснования теории вероятностей, новых мощных методов, требующих иногда применения (помимо классического анализа) средств теории множеств, теории функций действительного переменного и функционального анализа.

В нашей стране период развития теории вероятностей тесно связан с деятельностью С. Н. Бернштейна, значительно обобщившего классические предельные теоремы Чебышева, Ляпунова и Маркова.

4.2.1. Случайные события

Основой всех точных исследований является наблюдение за поведением и признаками изучаемых объектов, которое может осуществляться с помощью соответствующего опыта или эксперимента.

Под ***опытом*** будем подразумевать однократное или многократное повторение некоторого действия. Осуществление такого опыта или эксперимента называется ***испытанием***. Различные результаты опыта назовем ***исходами***. Каждое испытание должно удовлетворять следующим условиям:

а) исход (результат) испытания точно неизвестен;

б) конечное множество всех исходов может быть определено до начала испытания;

в) испытание можно повторить неограниченное число раз при тех же условиях.

Игровые модели очень удобны для первоначального рассмотрения элементов теории вероятностей.

Пусть опыт состоит в многократном бросании игральной кости. Каждое отдельное бросание представляет собой испытание, а его результат (выпавшее число очков) – исход этого испытания. В этом случае исходами являются числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. При бросании монеты могут быть два исхода: **О** – выпадение «орла» (герба) и **Р** – выпадение «решки» (цифры).

Определение события. Множество всех исходов испытания называется ***множеством (пространством) элементарных событий***, а ***событием*** – подмножество множества элементарных событий.

Определение случайного события. Событие, наступление или ненаступление которого в некотором испытании зависит от ряда случайных факторов, называется ***случайным событием***.

Пример. Испытание – студент сдает экзамен. Случайное событие – он получил оценку 10. Испытание – бросание монеты. Случайное событие – выпадение герба или цифры.

Множество (пространство) элементарных событий обозначается буквой Ω.

Рассмотрим испытание, которое может окончиться одним из n различных исходов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, тогда

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}.$$

Таким образом, любое подмножество пространства элементарных событий Ω будем называть случайным событием.

Замечание. *В теории множеств аналогом пространства элементарных событий* Ω *является универсальное множество* $\boldsymbol{U}$, *а аналогом событий – множества, которые являются подмножествами* $\boldsymbol{U}$.

Пример. Записать множество (пространство) элементарных событий испытания, состоящего в бросании двух монет.

Решение. Множество элементарных событий данного испытания образуют исходы: (ОО) – на первой монете выпал «орел» и на второй тоже; (ОР) – на первой монете выпал «орел», а на второй «решка», (РО) – на первой монете «решка», а на второй «орел», (РР) – на первой и на второй монетах «решки». Таким образом, $\Omega = \{(OO); (OP); (PO); (PP)\}$.

В дальнейшем случайные события будем называть просто *событиями*. События обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C и т. д. или, когда их много, $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Пример. Испытание – бросание игральной кости. Случайное событие – число очков, выпавшее на верхней грани кубика. Пространство элементарных событий $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Событие A – «выпало четное число» – состоит из трех исходов, т. е. $A = \{2, 4, 6\}$.

В жизни мы постоянно встречаемся со случайными событиями. При многократном наблюдении случайных явлений в них самих можно заметить определенные закономерности.

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений. Это математическая наука, которая применяется к реальным явлениям, обладающим двумя свойствами: случайностью и массовостью.

Событие, которое всегда произойдет в данном опыте, называется ***достоверным***. Достоверное событие совпадает со всем пространством элементарных событий, поэтому обозначается символом Ω.

Пример. Пусть в ящике находятся 5 красных шаров. Тогда событие A – «из ящика извлекли красный шар» – будет достоверным, так как в ящике были только красные шары.

Событие, называется ***невозможным***, если в данном опыте оно заведомо не может произойти ни при одном испытании и обозначается $\varnothing$.

Пример. Пусть в ящике находятся 5 красных шаров. Тогда событие B – «из ящика извлекли синий шар» – будет невозможным, так как в ящике нет шаров синего цвета.

События, которые не могут произойти одновременно в рассматриваемом опыте, называются ***несовместными***.

Пример. При выборе 9 человек из 45 для социологического опроса события A – «выбрали 9 женщин» и B – «выбрали 9 мужчин» – являются несовместными событиями.

Замечание. *В терминах теории множеств события* A *и* B *являются несовместными в данном опыте, если* $A \cap B = \varnothing$.

Два события называются ***противоположными***, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$.

Замечание. *В терминах теории множеств для события A и противоположного ему события $\overline{A}$ верно равенство $A \cup \overline{A} = \Omega$.*

Пример. Пусть испытанием является бросок баскетболиста по корзине, событие A – «баскетболист попал». Тогда $\overline{A}$ – «баскетболист не попал».

Заметим, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

4.2.2. Операции над событиями

Суммой двух событий A и B называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A, B и обозначаемое $A + B$ или $A \cup B$.

Аналогично ***суммой конечного числа событий*** $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_i, $i = 1, 2, ..., n$ и обозначаемое $A_1 + A_2 + ... + A_n$.

Пример. Пусть событие A – «светит солнце», а событие B – «дует ветер», тогда событие $A + B$ состоит из следующих явлений погоды: или светит солнце, но нет ветра; или дует ветер, но не светит солнце; или и светит солнце, и дует ветер.

Рассмотрим *свойства операции суммы событий*.

1) $A + B = B + A$;

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3) $A + \overline{A} = \Omega$;

4) $A + \Omega = \Omega$;

5) $A + \overline{\Omega} = A$;

6) $\overline{\overline{A}} = A$;

7) $A + A = A$.

Произведением двух событий A и B называется событие, состоящее в одновременном наступлении двух событий A и B и обозначаемое AB или $A \cap B$.

Аналогично произведением конечного числа событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события и обозначаемое $A_1A_2 ... A_n$.

Пример. Пусть событие A – «в аудиторию вошел студент», событие B – «в аудиторию вошел человек в очках». Тогда событие AB – «в аудиторию вошел студент в очках».

Рассмотрим *свойства операции произведения событий*:

1) $AB = BA$;

2) $A(BC) = (AB)C$;

3) для несовместных событий A и B имеет место равенство $AB = \varnothing$;

4) $A(B+C)=AB+AC$;
5) $A+BC=(A+B)(A+C)$;
6) $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$;
7) $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$;
8) $AA=A$;
9) $A\Omega=A$.

Разностью событий A и B называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B, и обозначается $A\backslash B$.

Пример. Пусть подбрасывается игральная кость. Событие A – «выпадет четное число очков», т. е. $A=\{2, 4, 6\}$, событие B – «выпадет число очков, меньшее трех», т. е. $B=\{1, 2\}$, тогда событие $A\backslash B$ – «выпадет четное число очков, не меньшее трех», т. е. $A\backslash B=\{4, 6\}$.

Как показывают приведенные примеры, операции над событиями подобны операциям над множествами.

Элементарные события, входящие в подмножество A множества Ω, называют событиями, ***благоприятствующими наступлению событию*** A.

Пример. Пусть подбрасывается игральная кость. Событие A – «выпадет нечетное число очков». Этому событию благоприятствуют элементарные события из подмножества $\{1, 3, 5\}$ множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют ***полную группу событий***, если они попарно несовместны и их сумма является достоверным событием:

1) $A_iA_j=\varnothing,\ \forall i, j=1, 2, \ldots, n;\ i\neq j$;
2) $A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega$.

Заметим, что события A и $\overline{A}$ образуют полную группу событий.

Пример. Примеры полных групп событий: выпадение герба и выпадение цифры при одном бросании монеты; попадание в цель и промах при одном выстреле; выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти, шести очков при одном бросании игральной кости.

4.2.3. Классическое определение вероятности

Каждому случайному событию A ставится в соответствие характеризующее возможность его появления в данном опыте число $P(A)$ (от первой буквы французского слова *probabilite* – вероятность), которое и называется ***вероятностью события*** A.

Вероятность – числовая характеристика степени возможности наступления какого-либо определенного случайного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз испытаниях.

Для определения классической вероятности нам потребуется понятие равновозможных исходов элементарных событий. Понятие равновозможных событий в математике не определяется, оно считается интуитивно ясным. Элементарные события, шансы появления которых одинаковы в данном испытании, будем называть ***равновозможными***.

Обычно понятие классической вероятности иллюстрируется на азартных играх потому, что здесь равновозможность прямо задана внешней или геометрической симметрией объекта – монеты, игральной кости, колоды карт и т. д.

Если монета ровная, неизогнутая, то можно ожидать, что при ее многократном бросании орел и решка будут выпадать одинаково часто, т. е. примерно в половине случаев будет выпадать орел, а в половине случаев – решка. Поэтому в условиях этого опыта принято считать, что для такой монеты вероятность выпадения орла или решки равна $\frac{1}{2}$.

При многократном бросании идеально правильной игральной кости на долю каждого из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 будет приходиться примерно шестая часть общего числа испытаний, т. е. бросаний кости. Поэтому считают, что вероятность выпадения каждой грани, соответствующей числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, равна $\frac{1}{6}$. Какова в таком случае вероятность события A – «выпадение нечетного числа очков»? Поскольку имеется шесть одинаково возможных исходов, причем три из них (выпадение чисел 1, 3, 5) «благоприятствуют» событию A, то вероятность $P(A)$ можно считать равной $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Пусть пространство Ω состоит из конечного числа n равновозможных элементарных событий: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.

Определение. Под ***вероятностью*** $P(A)$ события A понимается отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события, к общему числу всех равновозможных исходов.

Если n – общее число всех равновозможных исходов испытания, а m – число исходов, благоприятствующих наступлению события, то по определению

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Это определение вероятности называется *классическим*.

Из определения вероятности события следуют ее *простейшие свойства*.

1. Вероятность достоверного события Ω равна 1, так как все элементарные события являются благоприятствующими Ω, т. е. $m = n$:

$$P(\Omega) = 1.$$

2. Вероятность невозможного события $\varnothing$ равна 0, так как для невозможного события нет ни одного элементарного события, ему благоприятствующего, т. е. $m = 0$:

$$P(\varnothing) = 0.$$

3. Вероятность любого события удовлетворяет неравенствам

$$0 \le P(A) \le 1,$$

так как $0 \le m \le n$.

При использовании формулы классической вероятности в решении конкретных задач числовые значения m и n, входящих в эту формулу, не всегда очевидны. Их нахождение требует применения основных правил и формул комбинаторики.

В теории вероятностей классическим является эксперимент с урной, из которой надо не глядя извлекать одинаковые шары разных окрасок. Вероятность при этом вводится просто: если в урне находится 30 шаров, 10 из которых белые, то вероятность извлечь белый шар равна $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Пример. В урне находятся 10 одинаковых по размеру шаров, из которых 4 красных и 6 синих. Наудачу извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется синим?

Решение. Обозначим через A событие «извлеченный шар синий». Имеем 10 равновозможных исходов, из которых 6 благоприятствуют событию A. Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$

Пример. Найдите вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет четное число очков.

Решение. Для данного примера имеем: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$. Поэтому $m = 3$, $n = 6$ и $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

Пример. Подбрасываются две симметричные монеты. Чему равна вероятность того, что на верхних сторонах обеих монет оказались «решки»?

Решение. Обозначим через A – «на верхних сторонах обеих монет оказались “решки”». В этом испытании 4 равновозможных элементарных исхода: (О; О); (О; Р); (Р; О); (Р; Р). Событию A благоприятствует 1 элементарный исход (Р; Р). Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$

Рассмотрим, например, задачу о выборке, имеющую практические применения в разных областях знания.

Задача о выборке. В урне всего n шаров, из них m белых и $(n - m)$ черных шаров. Из урны наудачу вынимается k шаров. Какова вероятность того, что среди вынутых k шаров окажется l белых?

Исход этого испытания состоит в появлении любых k шаров из общего числа n шаров. В данном примере событие A – «среди вынутых k шаров окажется l белых». Поскольку нас не интересует порядок появления этих шаров, то число всех исходов равно числу сочетаний C_n^k. Заметим, что мы извлекаем не только l белых шаров, но и оставшиеся $k - l$ черных. Очевидно, что $0 \le l \le m$ и $0 \le k - l \le n - m$ в противном случае вероятность появления интересующего нас события равна 0. Извлечь l белых шаров из имеющихся в урне m белых шаров можно C_m^l способами. Соответственно извлечь $k-l$ черных шаров из $n-m$ черных шаров можно C_{n-m}^{k-l} способами. По комбинаторному принципу умножения число благоприятных исходов для события A равно произведению $C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}$. Следовательно, искомая вероятность в задаче о выборке по формуле классической вероятности равна

$$P(A)=\frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k}.$$

Пример. В урне 8 шаров (5 белых и 3 черных). Какова вероятность того, что из четырех наугад выбранных шаров ровно один будет черный?

Решение. Так как число всех исходов определяется числом сочетаний из 8 по 4, то $n=C_8^4=\frac{8!}{4!\cdot 4!}=\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70$ (так как мы выбираем 4 шара из 8 по одному, не возвращая их обратно). При благоприятном исходе один шар черный, а остальные три – белые (событие A). Черный шар можно выбрать $C_3^1=\frac{3!}{1!\cdot 2!}=3$ способами, а три белых шара, из оставшихся выбираемых четырех, можно выбрать $C_5^3=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$ способами, так как белых шаров в урне 5. Таким образом, число благоприятных исходов $m = 3 \cdot 10 = 30$. Значит, искомая вероятность $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{30}{70}\approx 0{,}429$.

Примеры решения задач

1. Опыт состоит в извлечении шара из урны, в которой находятся шары трех цветов (черные, белые и красные). Рассмотрим события A – «извлечен шар белого цвета»; B – «извлечен шар красного цвета»; C – «извлечен шар черного цвета». Что представляют собой события: $A + B$, $\overline{A+C}$, AB, $AC + B$?

Решение. Событие $A + B$ – это событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B. Следовательно, $A + B$ – «извлечен шар белого или красного цвета». Так как событие $A + C$ – «извлечен шар белого или черного цвета», то $\overline{A+C}$ – это событие, противоположное событию $A+C$, т. е. $\overline{A+C}$ – «извлечен шар не белого и не черного цвета», а значит, он «красного цвета». Событие AB – невозможное событие, поскольку шар одновременно не может быть белого и красного цвета. Событие $AC + B$ – это сумма невозможного события AC и события B, равная событию B, т. е. $AC + B$ – «извлечен шар красного цвета».

2. Некоторые клиенты банка приходят в банк брать проценты с вклада. Сейчас в банке ожидают своей очереди обслуживания 4 человека. Что собой представляют события – брать проценты будут: а) четыре человека; б) три человека; в) два человека; г) один человек; д) хотя бы два человека; е) хотя бы один человек?

Решение. Обозначим события:

A_1 – «первый клиент пришел брать проценты»;

A_2 – «второй клиент пришел брать проценты»;

A_3 – «третий клиент пришел брать проценты»;

A_4 – «четвертый клиент пришел брать проценты».

Тогда противоположными для каждого из них будут события:

$\overline{A_1}$ – «первый клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_2}$ – «второй клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_3}$ – «третий клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_4}$ – «четвертый клиент не будет брать проценты».

Обозначим также события:

B – «пришли брать проценты с вклада четыре человека», тогда

$$B = A_1A_2A_3A_4;$$

C – «пришли брать проценты с вклада три человека», тогда

$$C = A_1A_2A_3\overline{A_4} + A_1A_2\overline{A_3}A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + \overline{A_1}A_2A_3A_4;$$

D – «пришли брать проценты с вклада два человека», тогда

$$D = A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4} + A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4 + A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4;$$

E – «пришел брать проценты с вклада один человек»

$$E = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4;$$

F– «хотя бы два человека пришли брать проценты с вклада». Событие F означает также, что пришли брать процент с вклада либо два, либо три, либо все четыре человека, т. е.

$$F = D + C + B;$$

H– «хотя бы один человек пришел брать проценты с вклада». Событие H означает также, что пришли брать процент с вклада либо один, либо два, либо три, либо все четыре человека, т. е.

$$H = B + C + D + E \text{ или } H = F + E.$$

3. На трех одинаковых карточках написаны буквы И, М, Р. Карточки тщательно перемешивают, наудачу извлекают три карточки и выкладывают их в порядке появления. Найдите вероятность того, что составится слово МИР.

Решение. Обозначим через A событие, которое состоит в том, что в результате извлечения карточек получится слово МИР. У данного опыта шесть равновозможных исходов: «получено слово ИМР», «получено слово ИРМ», «получено слово МИР», «получено слово МРИ», «получено слово РМИ», «получено слово РИМ». Из них только один исход благоприятствует событию A. Следовательно, число $n = 6$, число $m = 1$. Вычисляем $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{6}$.

4. Какова вероятность появления слова ДВА, если наугад выбираются три карточки из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д и располагаются в ряд в порядке появления?

Решение. Число всех исходов испытания состоит в выборе трех букв из имеющихся пяти, при этом важен порядок появления букв, поэтому по формуле для числа размещений их всего $n = A_5^3 = \dfrac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$ Благоприятный исход для появления слова ДВА всего один. Следовательно, искомая вероятность равна $P(A) = \dfrac{1}{A_5^3} = \dfrac{1}{60} \approx 0{,}02.$

5. Для участия в лотерее на карточке, содержащей 49 чисел, нужно отметить 6 чисел. Затем эти числа сверяются с 6 числами, отобранными случайным образом. В зависимости от числа совпавших номеров выплачивается выигрыш. Какова вероятность угадать в лотерее 6 чисел из 49?

Решение. Число всех элементарных исходов – это число всех сочетаний из 49 чисел по 6. Столько существует различных вариантов заполнения карточки, и каждый из них имеет одинаковый шанс стать выигрышным. Благоприятствует выигрышу только одно событие: «номер на карточке совпал с отобранным номером». Следовательно, $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{C_{49}^6} \approx \dfrac{1}{14\,000\,000}.$

6. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Какова вероятность того, что среди 5 взятых наудачу деталей стандартных будет 4?

Решение. Обозначим A – событие, состоящее в том, что «из 5 взятых наудачу деталей стандартных будет 4». Чтобы определить $P(A)$, надо воспользоваться формулой $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Опыт состоит в извлечении 5 деталей из 10 имеющихся, значит, общее число n возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно выбрать 5 элементов из 10, т. е. $n = C_{10}^5$.

Определим число m исходов, благоприятствующих событию A. Четыре стандартные детали из 8 стандартных можно извлечь $m_1 = C_8^4$ способами. Оставшиеся детали выборки должны быть нестандартными, их будет $5 - 4 = 1$, тогда 1 нестандартная деталь из имеющихся $10 - 8 = 2$ может быть извлечена $m_2 = C_2^1$ способами. Тогда, по комбинаторному принципу умножения, число m благоприятствующих исходов равно $m = m_1 \cdot m_2 = C_8^4 \cdot C_2^1$.

Искомая вероятность равна отношению числа m исходов, благоприятствующих данному событию, к числу n всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n} = \frac{C_8^4 \cdot C_2^1}{C_{10}^5} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \frac{2!}{1! \cdot 1!} : \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{5}{9} \approx 0{,}56.$$

7. На полке стоит 10 книг, из них 6 книг по высшей математике и 4 книги по социологии. Какова вероятность взять книгу по высшей математике, если наудачу берется только 1 книга?

Решение. В этой задаче $n = 10$ — это число всех равновозможных исходов испытания, а именно количество книг, а $m = 6$ — это число исходов, благоприятствующих событию A — «выбрана книга по высшей математике». Поэтому по формуле классической вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

8. Брошены 2 игральные кости. Найдите вероятность следующих событий: а) сумма выпавших очков равна 7; б) сумма выпавших очков равна 8, а разность — 4.

Решение. Для случая а) $n = 36$, так как число равновозможных исходов испытания состоит из числа различных комбинаций очков на одной и второй игральных костях. Для первой кости возможны 6 вариантов от 1 до 6, для второй аналогично 6 вариантов, следовательно, для первой и второй костей, согласно комбинаторному принципу умножения, будет 36 исходов. Число благоприятных исходов m, т. е. когда сумма выпавших очков равна 7, состоит из следующих вариантов: (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3), т. е. $m = 6$, и поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Для случая б), как и в случае а), $n = 36$. Число благоприятных исходов m, т. е. сумма выпавших очков равна 8, а разность 4, состоит из следующих двух вариантов: (2, 6), (6, 2), т. е. $m = 2$, и поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

9. Из колоды, состоящей из 36 карт, наудачу вытаскивается 6 карт. Какова вероятность того, что среди вытянутых карт окажется 1 король и 2 дамы?

Решение. Для решения этой задачи можно применить *общую схему задачи о выборке*. Событие A — «среди вытянутых 6 карт окажется 1 король и 2 дамы». Число всех исходов равно числу сочетаний из 36 по 6, т. е. C_{36}^6. Вытянуть 1 короля из 4 королей, имеющихся в колоде, можно C_4^1 способами, а 2 дам из 4 дам, соответственно, C_4^2 способами. Кроме того, вытягиваются еще 3 карты из $36 - 4 - 4 = 28$ карт, не содержащих ни королей, ни дам, что можно сделать C_{28}^3 способами. Таким образом, согласно комбинаторному принципу умножения, число благоприятных исходов для события A равно произведению $C_4^1 C_4^2 C_{28}^3$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{C_4^1 C_4^2 C_{28}^3}{C_{36}^6} = \left(\frac{4!}{1!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{3!}\right) : \left(\frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{6!}\right) \approx 0{,}04.$$

10. Из урны с шарами, на которых написаны буквы, составляющие слово ФИЛОСОФИЯ, выбирают наугад последовательно 4 шара и выкладывают один за другим в порядке их появления. Какова вероятность того, что при этом получится слово СОЛО?

Решение. Число всех равновозможных исходов этого испытания — это число всех 4-буквенных «слов», составленных из 9 «растождествленных» букв $Ф_1$, $Ф_2$, $И_1$, $И_2$ $Л_1$, $О_1$, $О_2$, $С_1$, $Я_1$, число которых равно числу размещений $A_9^4 = \dfrac{9!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$. Число благоприятных исходов составления слова СОЛО равно числу $A_1^1 A_1^1 A_2^1 = 2,$ где $A_1^1 = 1$ — это число размещений для букв С и Л и $A_2^1 = 2$ — это число размещений для 2 из 2 букв О. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{A_1^1 A_1^1 A_2^1}{A_9^4} = \frac{2}{3024} = \frac{1}{1512}.$$

Это вариант задачи об «упорядоченной» выборке.

Задачи для самостоятельного решения

1. Подбрасываются 2 игральных кубика, подсчитываются суммы выпавших очков. Записать полную группу событий в этом опыте.

2. Являются ли несовместными следующие события: а) опыт — подбрасывание симметричной монеты, события: A — «появление герба», B — «появление цифры»; б) опыт — 2 выстрела по мишени, события: A — «хотя бы 1 попадание», B — «хотя бы 1 промах».

3. Образуют ли полную группу событий следующие события: а) опыт — подбрасывание симметричной монеты, события: A — «появление герба», B — «появление цифры»; б) опыт — подбрасывание 2 симметричных монет, события: A — «появление 2 гербов», B — «появление 2 цифр»?

4. Пусть A, B и C — случайные события. Что означают события: $\overline{A}BC$; $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$?

5. Пусть A, B и C — случайные события. Показать, что:

а) $A + AB + BC + \overline{A}C = A + C$; б) $AB + \overline{A}B + A\overline{B} = A + B$.

6. Пусть A, B и C — случайные события. Записать выражения для следующих событий: а) произошло только событие A; б) произошли события A и B, но не произошло событие C; в) произошли все 3 события; г) произошло по крайней мере 1 из этих событий; д) произошли по крайней мере 2 события; е) произошло 1 и только 1 событие; ж) произошли 2 и только 2 события; з) ни 1 событие не произошло; и) произошло не более 2 событий.

7. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 2 цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

8. Подбрасываются 2 игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее: получить в сумме 7 или 8 очков?

9. Подбрасываются 3 симметричные монеты. Чему равна вероятность того, что на верхних сторонах монет выпало 2 герба?

10. В урне имеется 7 черных и несколько белых шаров. Какова вероятность вытащить белый шар, если вероятность вытащить черный шар равна 1/6? Сколько белых шаров в урне?

11. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу 4 карты. Найдите вероятность следующих событий:

A – «в полученной выборке все карты бубновой масти»;

B – «среди выбранных 4 карт окажутся 2 туза»;

C – «среди выбранных 4 карт окажется бубновый туз».

12. В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу извлекают 6 шаров. Какова вероятность того, что извлечены 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара?

13. Из букв разрезной азбуки составлено слово «ремонт». Карточки с отрезными буквами тщательно перемешивают, затем наугад вытаскивают 4 карточки и раскладывают их в порядке извлечения. Какова вероятность получения при этом слова «море»?

14. Из 30 экзаменационных билетов по дисциплине «Социология» студент может ответить на 24 билета. Какова вероятность его успешного ответа на экзамене при однократном извлечении билета?

15. Среди карточек, из которых составлено слово ДИСПЛЕЙ, случайным образом выбраны 3 карточки и выложены в ряд в порядке их извлечения. Какова вероятность, что они образовали слово ЛЕС?

16. Студент из 30 вопросов к экзамену по дисциплине «Высшая математика» хорошо усвоил 24 вопроса. Какова вероятность того, что студент знает оба из доставшихся ему вопросов при ответе на экзамене?

17. На 9 вакантных мест по определенной специальности претендуют 15 безработных, из них 7 женщин, остальные мужчины, состоящих на учете в службе занятости. Какова вероятность того, что из 9 случайно отобранных безработных окажется 5 женщин?

18. В старинной игре в кости необходимо было для выигрыша получить при бросании 3 игральных костей сумму очков, превосходящую 10. Найдите вероятности: а) при бросании 3 игральных костей выбросить сумму очков, равную 11; б) при бросании 3 игральных костей выбросить сумму очков, равную 12.

19. В урне 15 шаров, из них 5 красных, 8 зеленых и 2 синих. Из урны наудачу извлекают шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар будет зеленым?

20. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе все цифры будут одинаковые?

21. Все натуральные числа от 1 до 20 записаны на одинаковых карточках. Наугад вытаскивают одну карточку. Какова вероятность того, что: а) число на этой карточке будет кратно 5; б) число на этой карточке будет четным?

22. Участник лотереи «Спортлото» из 36 видов спорта должен назвать 5. Какова вероятность того, что будет угадано 3 вида спорта?

23. Из колоды в 52 карты наугад извлекаются 4 карты. Найдите вероятность того, что среди извлеченных карт окажется 2 туза.

24. На 6 одинаковых по форме и размерам карточках написаны буквы А, Л, А, Т, Т, Н. Какова вероятность того, что при случайном расположении карточек в ряд получится слово «ТАЛАНТ»?

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется опытом, испытанием?
2. Что называют событием?
3. Какое событие называют достоверным, невозможным, случайным в данном опыте?
4. Какие события называются несовместными в данном опыте?
5. Какие события считают равновозможными?
6. Какие события образуют полную группу событий?
7. Какие исходы благоприятны для данного события?
8. Что называют суммой двух событий?
9. Что называют произведением двух событий?
10. Что называют разностью двух событий?
11. Что называют вероятностью события?
12. Чему равна вероятность достоверного события?
13. Чему равна вероятность невозможного события?

4.3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4.3.1. Теоремы сложения вероятностей

Теорема сложения вероятностей двух событий. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Доказательство. Используем классическое определение вероятности. Пусть $|\Omega| = n$ — общее число элементарных событий, m_1 — число элементарных событий, благоприятствующих событию A, m_2 — число элементарных событий, благоприятствующих событию B, l – число элементарных событий, благоприятствующих событию AB. Тогда

$$P(A)=\frac{m_1}{n},\ P(B)=\frac{m_2}{n},\ P(AB)=\frac{l}{n},$$

Событию $A+B$ будут благоприятствовать $m_1 + m_2 - l$ элементарных событий. Действительно, складывая числа m_1 и m_2 элементарных событий, благоприятствующих событиям A и B соответственно, мы дважды считаем элементарные события, благоприятствующие событию AB.

Поэтому при подсчете числа элементарных событий, благоприятствующих событию $A + B$, значение l необходимо исключить. Таким образом,

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2-l}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{l}{n}=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Теорема доказана.

Пример. Подбрасывается игральный кубик. Найдите вероятность того, что на верхней грани выпадет четное или кратное трем число.

Решение. Введем обозначения событий: A – «выпало четное число»; B – «выпало число, кратное трем». Тогда AB – событие, состоящее в том, что выпало четное число, кратное трем.

$P(A)=\frac{3}{6}$ (всего исходов в этом испытании 6, исходов, благоприятствующих событию A, – 3: выпало либо 2, либо 4, либо 6 очков).

$P(B)=\frac{2}{6}$ (исходов, благоприятствующих событию B, 2: может выпасть либо 3, либо 6 очков).

$P(AB)=\frac{1}{6}$ (имеем 1 благоприятствующий событию AB исход: так как четное число, кратное трем, то это 6).

По теореме сложения вероятностей двух событий $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ имеем

$$P(A+B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

Если события A и B являются *несовместными*, то $AB = \varnothing$ и тогда $P(AB) = 0$, и имеет место следующая теорема.

Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Пример. Вероятность того, что приобретенный товар произведен в Италии, $P(A) = 0,4$, а того, что он произведен в Турции, – $P(B) = 0,3$. Какова вероятность того, что товар произведен в одной из этих стран: или в Италии, или в Турции?

Решение. События A – «товар произведен в Италии» и B – «товар произведен в Турции» несовместны, так как появление одного исключает другое. По теореме сложения вероятностей двух несовместных событий имеем

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7.$$

Пример. При бросании двух игральных костей событие A – «выпало 5 очков» и событие B – «выпало 10 очков» несовместны. Событие $A + B$ – «выпало число очков, кратное 5» можно вычислить по теореме сложения двух несовместных событий.

Решение. Всего исходов в этом испытании по комбинаторному принципу умножения $6 \cdot 6 = 36$. Благоприятных исходов для события A всего 4 – это выпадение в двух бросаниях очков (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), а для события B всего 3 благоприятных исхода – это (4, 6), (6, 4), (5, 5). Поэтому

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{7}{36}.$$

Теорема сложения вероятностей *n* несовместных событий. Вероятность суммы n попарно несовместных событий (т. е. никакие два из них не могут произойти одновременно) $A_1, A_2, ..., A_n$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Следствие. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, ..., A_n$, образующих полную группу, равна единице.

Действительно, по теореме сложения вероятностей n несовместных событий имеем

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(\Omega) = 1.$$

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Действительно, события A и $\overline{A}$ образуют полную группу событий, откуда в силу предыдущего следствия и вытекает равенство $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Замечание. *Вероятность противоположного события равна разности между единицей и вероятностью события A:*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Пример. Вероятность бесперебойной работы компьютера равна 0,9. Какова вероятность того, что при работе компьютер даст сбой?

Решение. Событие A – «компьютер работает бесперебойно», тогда противоположное ему событие $\overline{A}$ – «при работе компьютер даст сбой». По формуле $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, где $P(A) = 0{,}9$. Тогда $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

4.3.2. Теоремы умножения вероятностей

В ряде случаев приходится рассматривать вероятность некоторого события A, которая зависит от того, произошло или не произошло другое случайное событие B.

Прежде чем давать точное определение условной вероятности, рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть в корзине находится 8 белых и 4 черных шара, вынимается наудачу один за другим 2 шара. B – «первый вынутый шар белый», A – «второй вынутый шар белый».

Решение. Очевидно, что $P(B)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$. Вероятность события A в этом испытании зависит от того, произошло событие B или противоположное событие $\overline{B}$. Если событие B произошло, то среди оставшихся 11 шаров только 7 белых и поэтому вероятность события A будет равна $P(A)=\frac{7}{11}$. Если событие B не произошло, а произошло противоположное событие $\overline{B}$, т. е. первый шар оказался черным, то среди оставшихся 11 шаров будет 8 белых и поэтому вероятность события A равна $P(A)=\frac{8}{11}$.

Таким образом, вероятность события A зависит от того, произошло или не произошло событие B. Это условная вероятность.

Определение условной вероятности. Пусть вероятность события B – положительная величина, т. е. $P(B) > 0$. Вероятность события A при условии, что произошло событие B, называется ***условной вероятностью события*** A и обозначается $P(A|B)$.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, событию A благоприятствуют m элементарных событий, событию B – k элементарных событий, а событию AB – l элементарных событий ($l \le m$, $l \le k$, $m \ne 0$, $k \ne 0$). Если событие B произошло, то в этой ситуации возможны лишь те k элементарных событий, которые благоприятствовали событию B, причем l из них, очевидно, благоприятствуют событию A. Таким образом,

$$P(A|B)=\frac{l}{k}=\frac{\frac{l}{n}}{\frac{k}{n}}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Аналогично

$$P(B|A)=\frac{l}{m}=\frac{\frac{l}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Дадим теперь общее определение условной вероятности события, применимое не только для классической вероятности.

Пусть вероятность события B – положительная величина, т. е. $P(B) > 0$. Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называют число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Аналогично, если $P(A) > 0$, то условной вероятностью события B при условии, что произошло событие A, называют число

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Теорема умножения вероятностей. Пусть $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, тогда вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A)P(B|A);$$

$$P(AB) = P(B)P(A|B).$$

Пример. В читальном зале имеется 6 учебников по социологии, из которых 3 учебника в переплете. Библиотекарь берет наудачу последовательно 2 учебника. Найдите вероятность того, что оба взятых библиотекарем учебника окажутся в переплете.

Решение. Введем обозначение событий: A – «первый учебник в переплете», B – «второй учебник в переплете». Так как эти события зависимые, то по теореме умножения вероятностей вероятность того, что оба учебника в переплете,

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Теорема умножения вероятностей *n* событий. Пусть $P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) > 0$, тогда справедлива формула

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}),$$

т. е. вероятность произведения n событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие события имели место.

Пример. Студент-заочник знает ответы на 10 тестовых вопросов из 15. Пусть они для него будут «счастливые». Предположим, что 4 вопроса задаются лектором последовательно один за другим. Найдите вероятность того, что 4 заданных подряд вопроса «счастливые».

Решение. Введем обозначения событий: A_1 – «первый вопрос счастливый», A_2 – «второй вопрос счастливый», A_3 – «третий вопрос счастливый», A_4 – «четвертый вопрос счастливый». По теореме умножения вероятностей n событий искомая вероятность равна

$$P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3) =$$
$$\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12} = \frac{2}{13} \approx 0{,}154.$$

Если $P(B|A) = P(B)$, то событие B называется ***независимым от события*** A, т. е. вероятность события B не зависит от того, произошло или нет событие A.

Независимость является свойством взаимным, т. е. если справедливо $P(B|A) = P(B)$, то справедливо и $P(A|B) = P(A)$, поэтому можно говорить просто о *независимых событиях* A и B.

Замечание. *Если события A и B независимы, то независимы также будут события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.*

Теорема умножения вероятностей двух независимых событий. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Пример. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд 2 шара. После первого вынимания шар возвращается в урну и шары в урне перемешиваются. Найдите вероятность того, что оба шара белые.

Решение. В данном случае события A – «первый шар белый» и B – «второй шар белый» независимы, а тогда искомая вероятность равна

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0{,}16.$$

События A_1, A_2, ..., A_n называются ***независимыми в совокупности***, если вероятность наступления любого из них не зависит от того, наступила или нет любая комбинация остальных.

Другими словами, события A_1, A_2, ..., A_n называются ***независимыми в совокупности*** или ***независимыми***, если для любого подмножества индексов $\{i_1, i_2, ..., i_n\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ выполняется равенство

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_n}) = P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2})\cdot \dots \cdot P(A_{i_n}).$$

Замечание. *Если независимы события A_1, A_2, ..., A_n, то независимы будут также события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.*

Теорема умножения вероятностей *n* независимых событий. Если события A_1, A_2, ..., A_n независимы в совокупности, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\dots\cdot P(A_n).$$

Замечание. *Вероятность наступления события A, состоящего в появлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, ..., A_n, независимых в совокупности, находится по формуле*

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A_n}),$$

где $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Пример. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом справочнике, равна 0,8, во втором – 0,7, в третьем – 0,6. Найдите вероятность того, что формула содержится хотя бы в одном справочнике.

Решение. Рассмотрим событие A – «формула содержится хотя бы в одном справочнике». Введем независимые события: A_1 – «формула есть в первом справочнике», A_2 – «формула есть во втором справочнике», A_3 – «формула есть в третьем справочнике».

По условию $P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}7$; $P(A_3) = 0{,}6$, тогда $P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 0{,}2$; $P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 0{,}3$; $P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 0{,}4$.

Применим формулу $P(A) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A_n})$ и получим

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}976.$$

Примеры решения задач

1. В урне 15 голубых, 10 зеленых и 25 белых шаров. Найдите вероятность того, что из урны наугад будет извлечен цветной шар.

Решение. Извлечение цветного шара означает появление либо голубого, либо зеленого шара. Пусть событие A означает «появление голубого шара», B – «появление зеленого шара». Тогда

$$P(A) = \frac{15}{15+10+25} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10},\quad P(B) = \frac{10}{15+10+25} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}.$$

Так как события A и B несовместны, то по теореме сложения вероятностей двух несовместных событий имеем

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2}.$$

2. Бросают две игральные кости. Какова вероятность выпадения хотя бы одной шестерки?

Решение. Пусть событие A – «выпадение 6 на первой кости», событие B – «выпадение 6 на второй кости». Очевидно, что $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(AB) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$, поэтому по теореме сложения вероятностей двух событий имеем

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}.$$

3. Студент первого курса факультета философии и социальных наук выучил 10 вопросов из 30 по курсу «Основы высшей математики». Каждый билет состоит из 3 вопросов, распределенных случайным образом. Найдите вероятность того, что студент ответит хотя бы на один вопрос из вытянутого наугад билета.

Решение. Рассмотрим событие A – «студент ответит хотя бы на один вопрос из билета». Тогда противоположное ему событие $\overline{A}$ – «студент не ответит ни на один вопрос из билета», и выполняется равенство $P(A)+P(\overline{A})=1$. Так как порядок вопросов в билетах несущественен, то общее количество исходов такого испытания равно количеству способов выбора 3 из всех 30 вопросов, т. е. $n=C_{30}^3$. Поскольку студент выучил 10 вопросов по курсу «Основы высшей математики», то 30 – 10 = 20 вопросов остались невыученными. Значит, количество благоприятствующих исходов для события $\overline{A}$ равно числу способов выбора 3 из 20 вопросов, невыученных студентом, т. е. $m=C_{20}^3$. Поэтому по классическому определению вероятности имеем

$$P(\overline{A})=\frac{m}{n}=\frac{C_{20}^3}{C_{30}^3}=\frac{20!}{3!\cdot 17!}\cdot\frac{3!\cdot 27!}{30!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{30\cdot 29\cdot 28}=\frac{19\cdot 3}{29\cdot 7}=\frac{57}{203}.$$

Следовательно, вероятность того, что студент ответит хотя бы на один вопрос из вытянутого наугад билета, равна $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{57}{203}=\frac{146}{203}$.

4. 30 экзаменационных билетов по курсу «Основы высшей математики» пронумерованы числами от 1 до 30. Билеты тщательно перемешаны. Какова вероятность вытянуть наудачу студенту-социологу билет с номером, кратным 2 или 3?

Решение. Обозначим события: A – «вытянут билет с четным номером», событие B – «вытянут билет с номером, кратным 3», событие AB – «вытянут билет с четным номером, кратным 3». Найдем вероятность искомого события $A+B$. Поскольку события A и B – это совместные события, то вероятность события $A+B$ находим по теореме сложения вероятностей двух событий $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Событию A благоприятствуют 15 исходов, событию B – всего 10 исходов, а событию AB – только 5 исходов. Поэтому искомая вероятность равна

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{15}{30}+\frac{10}{30}-\frac{5}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}\approx 0{,}667.$$

5. Из урны, в которой 10 черных и 5 белых шаров, вынимают 2 шара. Чему равна вероятность того, что: а) оба шара черные; б) оба шара белые; в) шары разного цвета?

Решение. Пусть событие A_1 – «первый шар черный», A_2 – «второй шар черный», B_1 – «первый шар белый», B_2 – «второй шар белый». Тогда

$$P(A_1)=\frac{10}{10+5}=\frac{2}{3},\ P(B_1)=\frac{5}{10+5}=\frac{1}{3}.$$

Найдем условные вероятности:

$P(A_2|A_1)=\frac{10-1}{15-1}=\frac{9}{14}$ (второй шар был черным, если первый был черным);

$P(B_2|B_1)=\frac{5-1}{15-1}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$ (второй шар был белым, если первый был белым);

$P(A_2|B_1)=\frac{10}{15-1}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$ (второй шар был черным, если первый был белым);

$P(B_2|A_1)=\frac{5}{15-1}=\frac{5}{14}$ (второй шар был белым, если первый был черным).

Отсюда находим искомые вероятности:

а) $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{14}=\frac{3}{7}$;

б) $P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{2}{21}$;

в) $P(A_1B_2 + B_1A_2) = P(A_1)P(B_2|A_1) + P(B_1)P(A_2|B_1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{14}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{10}{21}$.

6. Брошены последовательно 3 монеты. Определить вероятности следующих событий: A – «выпадение герба на первой монете», B – «выпадение хотя бы одной решки». Проверить, выполняется ли равенство $P(AB) = P(A)P(B)$.

Решение. Найдем вероятности этих событий. Очевидно, что $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(\overline{B})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. Далее воспользуемся формулой о том, что сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е. $P(B) = 1 - P(\overline{B})$. Тогда $P(B) = 1 - \frac{1}{8}=\frac{7}{8}$. Найдем вероятность произведения событий A и B, т. е. $P(AB)$ – вероятность события, состоящего в одновременном появлении герба на первой монете и выпадения хотя бы одной решки:

$$P(AB)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}.$$

Далее $P(A)P(B) = \frac{7}{16}\neq\frac{3}{8}= P(AB)$. Следовательно, равенство $P(AB) = P(A)P(B)$ не выполняется.

7. Вероятность попадания каждого из трех стрелков соответственно равна: 0,8; 0,7; 0,9. Стрелки произвели один залп. Найдите вероятность: а) только одного попадания; б) ровно двух попаданий; в) хотя бы одного попадания.

Решение

Пусть A_i – «попадание в мишень при i-м выстреле», $\overline{A_i}$ – «непопадание в мишень при i-м выстреле», $i = 1, 2, 3$.

Так как $P(A_1) = 0,8$; $P(A_2) = 0,7$; $P(A_3) = 0,9$, то $P(\overline{A}_1) = 1 - 0,8 = 0,2$; $P(\overline{A}_2) = 1 - 0,7 = 0,3$; $P(\overline{A}_3) = 1 - 0,9 = 0,1$;

а) обозначим событие A – «ровно одно попадание в мишень». Оно распадается на три несовместных события: может быть попадание при первом выстреле, промахи при втором и третьем; попадание при втором, промахи при первом и третьем; попадание при третьем, промахи при первом и втором. Тогда

$$A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

Учитывая, что $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ – несовместные события (стрелки производят выстрелы независимо друг от друга), то из теорем сложения и умножения вероятностей следует

$$P(A) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) =$$
$$= 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,9 = 0,092;$$

б) обозначим событие B – «ровно два попадания в мишень». Оно распадается на три несовместных события: может быть попадание при первом и втором выстрелах, промах при третьем; попадание при первом и третьем, промах при втором; попадание при втором и третьем, промах при первом. Тогда

$$B = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3.$$

Учитывая, что $A_1A_2\overline{A}_3$, $A_1\overline{A}_2A_3$, $\overline{A}_1A_2A_3$ – несовместные события (стрелки производят выстрелы независимо друг от друга), то из теорем сложения и умножения вероятностей следует

$$P(B) = P(A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3) =$$
$$= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) =$$
$$= 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,398;$$

в) обозначим событие C – «ровно три попадания в мишень»; событие D – «хотя бы одно попадание в мишень», тогда $D = A + B + C$.

Найдем вероятность события $C = A_1A_2A_3$:

$$P(C) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504.$$

Получаем

$$P(D)=P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=0{,}092+0{,}398+0{,}504=0{,}994.$$

Так как попадания каждого стрелка – независимые в совокупности события, то вероятность события D можем найти:

$$P(D)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=1-0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1=0{,}994.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В фирме 550 работников, 380 из них имеют высшее образование, 412 – среднее специальное образование, 357 – высшее и среднее специальное образование. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет или среднее специальное образование, или высшее образование, или то и другое?

2. Из 20 изделий первого сорта и 10 второго сорта, имеющихся на складе, наугад взято 2 изделия. Найдите вероятность того, что оба эти изделия: а) первого сорта; б) второго сорта.

3. На стеллажах библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь наудачу берет 3 учебника. Найдите вероятность того, что все они будут в переплете.

4. В урне 6 белых, 4 черных и 2 красных шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найдите вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором – черный и при третьем – красный шар.

5. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по каждому из 3 центральных телеканалов, равна 0,05. Предполагается, что эти события независимы в совокупности. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит рекламу: а) по всем 3 каналам; б) по 1 каналу?

6. Студент знает 20 вопросов из 25 вопросов программы дисциплины «Основы высшей математики». Найдите вероятность того, что студент знает предложенные экзаменатором 3 вопроса.

7. Модельер, разрабатывающий новую коллекцию одежды к весеннему сезону, создает модели в зеленой, черной и красной цветовой гамме. Вероятность того, что зеленый цвет будет в моде весной, модельер оценивает в 0,3, черный – в 0,2, а красный – в 0,15. Предполагая, что цвета выбираются независимо друг от друга, найдите вероятность того, что цветовое решение коллекции будет удачным: а) по двум цветам; б) хотя бы по одному из выбранных цветов.

8. В совхозную ремонтную мастерскую поступило 15 тракторов. Известно, что 6 из них нуждаются в замене двигателя, а остальные – в замене отдельных узлов. Случайным образом отбирается 2 трактора. Найдите вероятность того, что замена двигателя необходима: а) в двух тракторах; б) в одном тракторе; в) хотя бы в одном тракторе.

9. Покупатель может приобрести акции 2 компаний *A* и *B*. Надежность 1-й оценивается экспертами на уровне 90 %, а 2-й – 80 %. Чему равна вероятность того, что обе компании в течение года не станут банкротами?

10. В студенческой группе из 20 человек 5 отличников. Наудачу по списку выбирают 2 человек. Чему равна вероятность того, что:

а) оба студента отличники;

б) оба студента не отличники?

11. В городе имеется 3 коммерческих банка. Вероятности того, что банки обанкротятся в течение года, соответственно равны 0,1; 0,2; 0,05. Найдите вероятности того, что в течение года обанкротятся:

а) ровно 2 банка;

б) ровно один банк;

в) все 3 банка;

г) ни одного банка;

д) хотя бы один банк.

12. Подбрасывают игральный кубик. Чему равна вероятность того, что выпадет нечетное число очков?

13. Найдите вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным или 2, или 5, или и тому и другому одновременно.

14. На 30 одинаковых карточках написаны натуральные числа от 1 до 30. Какова вероятность достать карточку с числом, кратным 2 или кратным 3?

15. Вероятность грозы в любой день августа составляет 0,3, вероятность града – 0,2, а вероятность града во время грозы – 0,1. Найдите вероятность того, что в наугад выбранный день будет хотя бы одно из явлений: град или гроза.

16. В коробке лежат 10 яблок и 8 груш. Из коробки последовательно без возвращения извлекают 4 фрукта. Найдите вероятность того, что все 4 – груши.

17. Подбрасывают 2 симметричные монеты. Какова вероятность того, что выпадут 2 решки?

18. В отделе работают 10 человек, среди них 7 мужчин. По табельным номерам наудачу отобраны 3 человека. Какова вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами?

19. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,5. Найти вероятность того, что: а) только один стрелок попадет в мишень; б) хотя бы один из стрелков попадет в мишень?

20. Стрелок попадает в цель с одной и той же вероятностью при каждом выстреле. Какова эта вероятность, если вероятность хотя бы одного попадания при трех выстрелах равна 0,973?

Вопросы для самоконтроля

1. Чему равна вероятность суммы двух событий?
2. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?
3. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей n несовместных событий.
5. Чему равна вероятность произведения двух событий?
6. Сформулируйте теорему умножения вероятностей n событий.
7. Что такое условная вероятность?
8. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?
9. Сформулируйте теорему умножения вероятностей n независимых событий.
10. Как найти вероятность появления хотя бы одного из n независимых событий, имеющих одинаковые вероятности?

4.3.3. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть A – произвольное событие; события $H_1, H_2, ..., H_n$ попарно несовместны и $A \subset H_1 + H_2 + ... + H_n$. Вероятности событий H_i известны, причем $P(H_i) \neq 0$ для всех $i = 1, 2, ..., n$; известны также условные вероятности $P(A|H_i)$. Требуется найти вероятность события A.

Формула полной вероятности. Пусть событие A может осуществиться вместе с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, которые образуют полную группу событий. Пусть известны вероятности $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности $P(A|H_1), P(A|H_2), ..., P(A|H_n)$. Тогда вероятность произвольного события A может быть найдена по формуле

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \\ + \ldots + P(H_n)P(A|H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i).$$

Доказательство. Представим событие A в виде

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n.$$

Поскольку события $H_1, H_2, ..., H_n$ попарно несовместны, то события $AH_1, AH_2, ..., AH_n$ также попарно несовместны. Пользуясь равенством

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

и теоремой умножения вероятностей, получим

$$P(A) = P(AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n) = \\ = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i).$$

Теорема доказана.

События $H_1, H_2, ..., H_n$ иногда называют ***гипотезами***. Заметим, что должно выполняться условие $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1.$

Пример. Грибник, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог соответственно равны 0,4; 0,8; 0,3; 0,2; 0,1. Какова вероятность того, что этот грибник вышел из леса через час, если он с одинаковой вероятностью выбирает дороги?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что «грибник вышел из леса через час», а через H_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) – событие, состоящее в том, что «грибник пошел по i-й дороге». Из условия задачи следует, что $P(A|H_1) = 0,4$; $P(A|H_2) = 0,8$; $P(A|H_3) = 0,3$; $P(A|H_4) = 0,2$; $P(A|H_5) = 0,1$.

Далее $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = P(H_5) = \frac{1}{5}.$

По формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4) +$$
$$+ P(H_5)P(A|H_5) = \frac{1}{5}\cdot 0,4 + \frac{1}{5}\cdot 0,8 + \frac{1}{5}\cdot 0,3 + \frac{1}{5}\cdot 0,2 + \frac{1}{5}\cdot 0,1 = 0,36.$$

Пример. Пусть в коробке есть 3 новых и 3 уже использованных теннисных мяча. Для первой игры берут из коробки любые 2 мяча и после игры возвращают их в коробку. Какова вероятность наудачу вынуть из коробки 2 новых мяча для второй игры?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что «извлечены 2 новых мяча для второй игры». Ситуация перед второй игрой описывается следующими взаимоисключающими возможностями:

H_1 – «в коробке 1 новый мяч», если первую игру играли 2 новыми мячами;

H_2 – «в коробке 2 новых мяча», если играли 1 новым и 1 старым мячами;

H_3 – «в коробке 3 новых мяча», если в первый раз играли 2 старыми мячами.

События H_1, H_2, H_3 – это полная группа событий, так как они несовместны и в сумме составляют все возможные исходы. Находим вероятности этих событий:

$$P(H_1) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5},\ P(H_2) = \frac{3\cdot 3}{C_6^2} = \frac{3}{5},\ P(H_3) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}.$$

Вычисляем условные вероятности:

$$P(A|H_1) = 0,\ P(A|H_2) = \frac{1}{C_6^2} = \frac{1}{15},\ P(A|H_3) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{25}.$$

Формула Байеса. Пусть события H_1, H_2, ..., H_n образуют полную группу событий и их вероятности $P(H_i)$, $i = 1,2, ..., n$ известны до проведения опыта (так называемые *априорные вероятности*). Производится опыт, в результате которого происходит событие A. Каковы будут вероятности событий H_i после опыта, т. е. после того, как событие A уже наступило?

Искомые вероятности $P(H_i|A)$ носят название *апостериорных* и находятся путем использования теоремы умножения вероятностей и формулы полной вероятности.

Имеем

$$P(AH_i)=P(A)P(H_i|A)=P(H_i)P(A|H_i)$$

(здесь предполагается, что $P(A)>0$ и $P(H_i)>0$ для всех $i = 1, 2, ..., n$), откуда

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для $P(A)$ из формулы полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i),$$

получим

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i)},\ i=1,2,\ldots,n.$$

Эту формулу называют **формулой Байеса**. Она отвечает на вопрос: каковы будут вероятности событий H_i после опыта, т. е. после того, как событие A уже наступило?

Пример. Грибник, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог соответственно равны 0,4; 0,8; 0,3; 0,2; 0,1. Грибник вышел из леса через час. Какова вероятность того, что грибник вышел по первой дороге?

Решение. Искомую вероятность найдем по формуле Байеса

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i)},\ i=1,2,\ldots,n.$$

$$P(H_1|A) = \left(P(H_1)P(A|H_1)\right) : \left(P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \right.$$
$$\left. + P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4) + P(H_5)P(A|H_5)\right) =$$
$$= \frac{\frac{1}{5} \cdot 0{,}4}{0{,}36} \approx 0{,}222.$$

Пример. Социолог проводил исследование психологического климата в разных отделах фирмы. При этом было установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на некоторые жизненные обстоятельства. Результаты исследования показали, что 68 % женщин позитивно реагируют на эти ситуации, в то время как 37 % мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполнили анкету, в которой отразили свое отношение к предлагаемым ситуациям. Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Чему равна вероятность, что ее заполнял мужчина?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что «случайно извлеченная анкета будет содержать негативную реакцию», через H_1 – событие, состоящее в том, что «анкету заполнял мужчина», через H_2 – событие, состоящее в том, что «анкету заполняла женщина». Из условия задачи следует, что $P(A|H_1) = 0{,}37$; $P(A|H_2) = 1 - 0{,}68 = 0{,}32$.

Далее $P(H_1) = \frac{5}{15+5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, $P(H_2) = \frac{15}{15+5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

По формуле полной вероятности вероятность того, что случайно извлеченная анкета будет содержать негативную реакцию,

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0{,}37 \cdot \frac{1}{4} + 0{,}32 \cdot \frac{3}{4} = 0{,}093 + 0{,}24 = 0{,}333.$$

Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Вероятность того, что ее заполнял мужчина, найдем по формуле Байеса

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = 0{,}278.$$

Примеры решения задач

1. На фабрике на машинах a, b, c производят соответственно 25, 35 и 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5 %, 4 % и 2 %. Какова вероятность того, что случайно выбранное изделие фабрики дефектно?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что случайно выбранное изделие дефектно, и пусть H_1, H_2, H_3 – события, состоящие в том, что изделие произведено на машинах соответственно. Очевидно, события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу событий.

По условию $P(H_1) = 0,25$; $P(H_2) = 0,35$; $P(H_3) = 0,40$. Аналогично $P(A|H_1) = 0,05$; $P(A|H_2) = 0,04$; $P(A|H_3) = 0,02$ являются условными вероятностями события A при выполнении гипотез соответственно.

Применив формулу полной вероятности, найдем

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) =$$
$$= 0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,40 \cdot 0,02 = 0,0345.$$

2. Пусть выполнены условия задачи **1** и пусть известно, что случайно выбранное изделие оказалось дефектным. Какова вероятность того, что оно было сделано на машинах a, b, c соответственно?

Решение. Пусть A, H_1, H_2, H_3 означает то же, что и в задаче **1**. Тогда задача состоит в нахождении условных вероятностей гипотез H_1, H_2, H_3 при условии, что событие A уже произошло. По условию $P(H_1) = 0,25$; $P(H_2) = 0,35$; $P(H_3) = 0,40$. Аналогично $P(A|H_1) = 0,05$; $P(A|H_2) = 0,04$; $P(A|H_3) = 0,02$.

В задаче **1** найдено

$$P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = 0,0345.$$

Применяя формулу Байеса, имеем

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)} =$$
$$= \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,0345} = \frac{25}{69}.$$

Аналогично получаем $P(H_2|A) = \dfrac{28}{69}$, $P(H_3|A) = \dfrac{16}{69}$.

3. Партия транзисторов, среди которых 10 % дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживается дефект (если он есть) и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Какова вероятность того, что случайно выбранный из партии транзистор будет признан дефектным?

Решение. Из условия задачи очевидно, что с рассматриваемым событием A – «случайно выбранный транзистор оказался дефектным» связаны две гипотезы:

H_1 – «поступивший на проверку транзистор исправный»,

H_2 – «поступивший на проверку транзистор неисправный».

Вероятности этих гипотез легко вычисляются по классической формуле определения вероятности: $P(H_1) = 0,9$, $P(H_2) = 0,1$. Условные вероятности определены в условии задачи: $P(A|H_2) = 0,95$; $P(A|H_1) = 0,03$. Применяя формулу полной вероятности, получим

$$P(A) = 0,1 \cdot 0,95 + 0,9 \cdot 0,03 = 0,122.$$

4. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, для второго 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найдите вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

Решение. До опыта возможны следующие гипотезы: H_1 – «ни первый, ни второй стрелок не попадут»; H_2 – «оба стрелка попадут»; H_3 – «первый стрелок попадет, а второй не попадет»; H_4 – «первый стрелок не попадет, а второй попадет». Вероятности этих гипотез: $P(H_1) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12$; $P(H_2) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32$; $P(H_3) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48$; $P(H_4) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$. Пусть A – событие, состоящее в том, что будет одна пробоина. Условные вероятности наблюдавшегося события A при этих гипотезах равны:

$$P(A|H_1) = P(A|H_2) = 0;\ P(A|H_3) = 1;\ P(A|H_4) = 1.$$

После опыта вероятность гипотезы H_3 такова:

$$P(H_3|A) =$$

$$= \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + P(H_3)\cdot P(A|H_3) + P(H_4)\cdot P(A|H_4)} =$$

$$= \frac{0,48}{0,56} \approx 0,857.$$

5. Медицинский тест дает положительный результат, если пациент болен исследуемой болезнью, с вероятностью 0,99. Если пациент не болен, то с вероятностью 0,95 тест даст отрицательный результат. Данной болезнью страдает 0,1 % населения. Какова вероятность того, что пациент с положительным результатом теста на самом деле не болен?

Решение. Обозначим за A событие – «тест даст положительный результат». В качестве гипотез возьмем следующие H_1 – «пациент болен», гипотеза H_2 – «пациент здоров». По условию задачи $P(H_1) = 0,001$, $P(H_2) = 0,999$. Условные вероятности равны

$$P(A|H_1) = 0,99,\ P(A|H_2) = 1 - 0,95 = 0,005.$$

Тогда по формуле полной вероятности найдем вероятность того, что пациент с положительным результатом теста

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0,001\cdot 0,99 + 0,999\cdot 0,05 = 0,05094.$$

Далее по формуле Байеса найдем вероятность того, что пациент с положительным результатом теста на самом деле не болен:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{0,999\cdot 0,05}{0,05094} \approx 0,981.$$

Как видно, вероятность получить ложноположительный результат в данном случае очень велика. Это связано с тем, что исследуемая болезнь крайне редкая. Выходом в данной ситуации является проведение повторного теста.

Если болезнь не очень редкая и $P(H_1) = 0{,}7$, $P(H_2) = 0{,}3$, то

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}05}{0{,}7 \cdot 0{,}99 + 0{,}3 \cdot 0{,}05} \approx 0{,}021.$$

6. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах, причем деталей первого завода 80 %, а второго – 20 % от общего количества. Вероятность брака на первом заводе равна 0,05, на втором заводе – 0,01. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена первым заводом?

Решение. Пусть гипотеза H_1 – «взятая деталь изготовлена первым заводом», гипотеза H_2 – «взятая деталь изготовлена вторым заводом», событие A – «взятая деталь оказалась бракованной». Тогда согласно условию задачи $P(H_1) = 0{,}8$; $P(H_2) = 0{,}2$; $P(A|H_1) = 0{,}05$; $P(A|H_2) = 0{,}01$.

Вероятность того, что деталь бракованная, равна

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}01 = 0{,}042.$$

Вероятность того, что бракованная деталь изготовлена первым заводом, такова:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = 0{,}952.$$

7. Студент пришел сдавать зачет, зная не все вопросы программы. Что для него выгоднее: идти отвечать первым или вторым?

Решение. Пусть событие A – «студент знает k из n вопросов программы». Если он идет отвечать первым, то вероятность ответить на предложенный ему вопрос равна $\frac{k}{n}$. Если он идет вторым, его успех зависит от того, какой вопрос был выбран перед ним. Рассмотрим две гипотезы: H_1 – «был выбран “хороший” для студента вопрос» (таких вопросов k); H_2 – «был выбран “плохой” для него вопрос» (таких вопросов $n - k$). Тогда $P(H_1) = \frac{k}{n}$, $P(H_2) = \frac{n-k}{n}$. Вероятность ответить на предложенный студенту вопрос, если накануне был извлечен «хороший» для него вопрос, равна $P(A|H_1) = \frac{k-1}{n-1}$, так как «хороших» вопросов стало $k - 1$ и число всех вопросов уменьшилось на 1.

Рассуждая аналогично, получаем: $P(A|H_2) = \frac{k}{n-1}$.

По формуле полной вероятности находим

$$P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) =$$
$$= \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} + \frac{n-k}{n} \cdot \frac{k}{n-1} = \frac{k(k-1+n-k)}{n(n-1)} = \frac{k(n-1)}{n(n-1)} = \frac{k}{n}.$$

Сравнивая найденную вероятность с вычисленной ранее, видим, что успех студента не зависит от того, пойдет он отвечать первым или вторым.

8. На город примерно 165 дней в году дует ветер с севера и 200 дней в году – с запада (считается, что год не високосный и с других направлений ветер дуть не может). Промышленные предприятия, расположенные на севере, производят выброс вредных веществ каждый третий день, а расположенные на западе – в последний день каждой недели. Определить, как часто город подвергается воздействию вредных выбросов. Иными словами, какова вероятность того, что в наугад выбранный день город будет накрыт промышленным смогом?

Решение. Пусть событие H_1 – «ветер дует с севера», событие H_2 – «ветер дует с запада», событие A – «город подвергается воздействию вредных выбросов». Тогда согласно условию задачи

$$P(H_1)=\frac{165}{365}=\frac{33}{73},\ P(H_2)=\frac{200}{365}=\frac{40}{73},\ P(A|H_1)=\frac{1}{3},\ P(A|H_2)=\frac{1}{7}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=\frac{33}{73}\cdot\frac{1}{3}+\frac{40}{73}\cdot\frac{1}{7}\approx 0{,}23.$$

Таким образом, около трех месяцев в году город накрыт промышленным смогом.

Задачи для самостоятельного решения

1. Имеются 3 одинаковые на вид урны. В первой урне 2 белых и 1 черный шар, во второй – 3 белых и 1 черный шар, в третьей – 2 белых и 2 черных шара. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из нее шар. Найдите вероятность того, что этот шар белый.

2. Агент по недвижимости пытается продать участок земли под застройку. Он полагает, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев с вероятностью 0,9, если экономическая ситуация в регионе не будет ухудшаться. Если же экономическая ситуация будет ухудшаться, то вероятность продажи участка составит 0,5. Экономист, консультирующий агента, полагает, что с вероятностью, равной 0,7, экономическая ситуация в регионе в течение следующих 6 месяцев будет ухудшаться. Чему равна вероятность того, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев?

3. Судоходная компания организует средиземноморские круизы в течение летнего времени и проводит несколько круизов в сезон. Эксперт по туризму, нанятый компанией, предсказывает, что вероятность того, что корабль будет полон в течение сезона, будет равна 0,92, если доллар не подорожает по отношению к рублю, и 0,75, если доллар подорожает. По оценкам экономистов, вероятность того, что в течение сезона доллар подорожает по отношению к рублю, равна 0,23. Чему равна вероятность того, что билеты на все круизы будут проданы?

4. В корпорации обсуждается маркетинг нового продукта, выпускаемого на рынок. Исполнительный директор корпорации желал бы, чтобы новый товар превосходил по характеристикам соответствующие товары конкурирующих фирм. Основываясь на предварительных оценках экспертов, он определяет вероятность того, что новый товар более высокого качества по сравнению с аналогичными, в 0,5, такого же качества – в 0,3, хуже по качеству – в 0,2. Опрос рынка показал, что новый товар конкурентоспособен. Из предыдущего опыта проведения опросов следует, что если товар действительно конкурентоспособный, то предсказание такого же вывода имеет вероятность, равную 0,7. Если товар такой же, как и аналогичные, то вероятность того, что опрос укажет на его превосходство, равна 0,4. Если товар более низкого качества, то вероятность того, что опрос укажет на его конкурентоспособность, равна 0,2. С учетом результата опроса оцените вероятность того, что товар действительно более высокого качества и, следовательно, обладает более высокой конкурентоспособностью, чем аналогичные.

5. Сотрудники отдела маркетинга полагают, что в ближайшее время ожидается рост спроса на продукцию фирмы. Вероятность этого они оценивают в 0,8. Консультационная фирма, занимающаяся прогнозом рыночной ситуации, подтвердила предположение о росте спроса. Положительные прогнозы консультационной фирмы сбываются с вероятностью 0,95, а отрицательные – с вероятностью 0,99. Какова вероятность того, что рост спроса действительно произойдет?

6. Среди студентов университета 30 % первокурсники, 35 % учатся на 2-м курсе, на 3-м и 4-м курсе их 20 % и 15 % соответственно. По данным деканата известно, что на первом курсе 20 % студентов сдали сессию только на отличные оценки, на 2-м курсе – 30 %, на 3-м курсе – 35 %, на 4-м курсе – 40 % отличников. Наудачу вызванный студент оказался отличником. Чему равна вероятность того, что он (или она) – третьекурсник?

7. Из числа авиалиний некоторого аэропорта 60 % – местные авиалинии, 30 % – авиалинии по СНГ и 10 % – международные авиалинии. Среди пассажиров местных авиалиний 50 % путешествуют по делам, связанным с бизнесом, на линиях СНГ таких пассажиров 60 %, на международных – 90 %. Из прибывших в аэропорт пассажиров случайно выбирается один пассажир. Чему равна вероятность того, что он: а) бизнесмен; б) прибыл из стран СНГ по делам бизнеса; в) прилетел местным рейсом по делам бизнеса; г) прибывший международным рейсом бизнесмен?

8. Вероятность того, что клиент банка не вернет заем, в период экономического роста равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный кредит?

9. Перед тем как начать маркетинг нового товара по всей стране, компании-производители часто проверяют спрос на него по отзывам случайно выбранных потенциальных покупателей. Методы проведения выборочных процедур уже проверены и имеют определенную степень надежности. Для определенного товара известно, что вероятность его возможного успеха на рынке составит 0,75, если товар действительно удачный, и 0,15, если он неудачен. Из прошлого опыта известно, что новый товар может иметь успех на рынке с вероятностью 0,60. Если новый товар прошел выборочную проверку и ее результаты указали на возможный его успех, то чему равна вероятность того, что это действительно так?

10. Известно, что в некоторой социальной группе 30 % молодых людей, 45 % людей среднего возраста и 25 % пожилых. Из числа молодых некоторый товар покупают 30 %; процент для людей среднего – 15 % и пожилого возраста – 10 %. Из этой группы в ходе анкетного опроса случайным образом выбирается человек. Найдите вероятность того, что этот человек покупает данный товар. Найдите вероятность того, что человек, забывший указать свой возраст, но указавший, что он не покупает данный товар, является человеком среднего возраста.

11. Число государственных банков, имеющихся в городе, относится к числу коммерческих банков как 3 : 2. Вероятность того, что клиент обратится в коммерческий банк, равна 0,2; а того, что он обратится в государственный банк, равна 0,1. Клиент обращается в банк. Найдите вероятность того, что это государственный банк.

12. По статистике турист, прибывший накануне на автобусе, поезде или самолете, заказывает утренний экскурсионный тур с вероятностями 0,2, 0,4 и 0,7 соответственно. Найдите вероятность того, что прибывший в отель турист закажет тур, если автобусом приезжает 55 %, поездом – 30 %, а самолетом – 15 % постояльцев.

13. На горнолыжном курорте фуникулер оборудован тремя независимыми предохранительными системами с надежностью срабатывания 0,95, 0,93 и 0,9 соответственно. Известно, что в результате перепада напряжения в сети сработала одна из них. Найдите вероятность того, что не сработала третья система.

14. Предположим, что в группе людей, различающихся по уровню образования, имеется следующее распределение по отношению к некоторому политику.

Группа людей	Уровень образования		
	Низкий (без образования, начальное и среднее образование)	Средний (среднее общее и среднее специальное образование)	Высокий (незаконченное высшее и высшее образование)
Сторонники	4000		
Противники			
Безразличные			

Окончание таблицы

Группа людей	Уровень образования		
	Низкий (без образования, начальное и среднее образование)	Средний (среднее общее и среднее специальное образование)	Высокий (незаконченное высшее и высшее образование)
Затрудняющиеся определить свою позицию			

Остальные клетки таблицы заполните по своему усмотрению.

Производится случайный эксперимент, заключающийся в выборе одного человека из этой группы (например, в ходе случайного опроса). Введем случайные события: A_1 – «человек оказался сторонником политика», A_2 – «человек оказался противником политика», A_3 – «человек оказался безразличен к политику», A_4 – «человек оказался затрудняющимся определить свое отношение к политику»; B_1 – «у человека низкий уровень образования», B_2 – «у человека средний уровень образования», B_3 – «у человека высокий уровень образования». Выразить через вероятность произведения событий и найти вероятность того, что человек окажется высокообразованным сторонником политика. Выразить через условную вероятность и найти вероятность того, что человек с высоким уровнем образования окажется сторонником политика. Выразить через условную вероятность и найти вероятность того, что у сторонника политика окажется высокий уровень образования.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие события образуют полную группу событий?
2. Какие события называются гипотезами?
3. При каких условиях применяется формула полной вероятности? Запишите ее.
4. Как вычисляются вероятности гипотез, если известно, что событие произошло?
5. Запишите формулу Байеса.
6. Как проверить правильность вычисления апостериорных гипотез?
7. Как проверить правильность задания априорных гипотез?

4.3.4. Повторение испытаний. Схема Бернулли

Пусть независимо друг от друга проводятся n испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода: происходит либо событие A («успех»), либо противоположное ему событие $\overline{A}$ («неудача»). Будем считать, что испытания проводятся в одинаковых условиях и вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же. Обозначим эту вероятность через p, а вероятность появления противоположного события $\overline{A}$ через q ($q = 1 - p$). Данная схема носит название ***схемы Бернулли***.

Поставим вопрос о вероятности того, что в данной серии из n испытаний событие A наступило ровно m раз $(0 \le m \le n)$. Искомую вероятность обозначим через $P_n(m)$.

Теорема. Вероятность $P_n(m)$ наступления события A ровно m раз в последовательности из n испытаний схемы Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Доказательство. Событие A в проведенных n испытаниях может наступить m раз в разных вариантах, например в варианте

$$\underbrace{A \ldots A}_{m}\underbrace{\overline{A} \ldots \overline{A}}_{n-m},$$

где событие A занимает m первых мест (произошло в первых m испытаниях), а событие $\overline{A}$ занимает последующие $n - m$ мест (произошло в последующих $n - m$ испытаниях). Всего таких вариантов существует C_n^m, причем все составленные таким образом сложные события являются несовместными. Поскольку все события в каждом из вариантов независимы, то по теореме умножения вероятностей независимых событий вероятность каждого варианта равна $p^m q^{n-m}$. Так как все варианты-события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных событий, т. е. $C_n^m p^m q^{n-m}$, что и доказывает теорему.

Вероятности $P_n(m)$ называются ***биномиальными вероятностями***, а формула $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ – ***формулой Бернулли***.

Рассмотрим частные случаи: $P_n(0) = q^n$, $P_n(1) = npq^{n-1}, \ldots, P_n(n) = p^n$.

Вероятности того, что в n испытаниях событие наступит:

- менее m раз, находят по формуле: $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1)$;
- более m раз, находят по формуле: $P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n)$;
- не менее m раз, находят по формуле: $P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n)$;
- не более m раз, находят по формуле: $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m)$.

Пример. В магазин вошли 9 покупателей. Вероятность сделать покупку для каждого вошедшего одна и та же и равна 0,2. Найдите вероятность того, что 2 покупателя совершат покупку.

Решение. Из условия $n = 9$; $m = 2$; $p = 0{,}2$; $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. По формуле Бернулли искомая вероятность $P_9(2) = C_9^2 p^2 q^7 = 36 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^7 \approx 0{,}302$.

Пример. Найдите вероятность того, что при десятикратном бросании монеты «орел» выпадет ровно 5 раз.

Решение. В данном случае $p = q = \dfrac{1}{2}$, $n = 10$, $m = 5$. Отсюда находим

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} \approx 0{,}246.$$

Пример. В результате наблюдений на некоторой реке установлено, что в течение 20 лет имело место четыре случая пересыхания реки. Найдите вероятность того, что за двадцатилетний период будет наблюдаться:

1) от трех до пяти случаев пересыхания реки (включительно);

2) не более пяти случаев пересыхания реки;

3) более пяти случаев пересыхания реки.

Решение. Вероятность того, что за 20 лет произойдет m случаев пересыхания реки $(0 \le m \le 20)$, равна $P_{20}(m) = C_{20}^m p^m q^{20-m}$, где $p = \dfrac{4}{20} = 0{,}2$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Тогда искомая вероятность составит:

1) $P_{20}(3) + P_{20}(4) + P_{20}(5) = C_{20}^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{17} + C_{20}^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{16} +$
$+ C_{20}^5 \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^{15} \approx 0{,}2054 + 0{,}2182 + 0{,}1746 \approx 0{,}5982;$

2) $P(m \le 5) = \sum\limits_{m=0}^{5} P_{20}(m) = C_{20}^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{20} + C_{20}^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{19} +$
$+ C_{20}^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{18} + C_{20}^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{17} + C_{20}^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{16} + C_{20}^5 \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^{15} \approx$
$\approx 0{,}0115 + 0{,}0576 + 0{,}1369 + 0{,}2054 + 0{,}2182 + 0{,}1746 = 0{,}8042;$

3) $P(m > 5) = 1 - P(m \le 5) = 1 - 0{,}8042 = 0{,}1958.$

Наивероятнейшее число наступления события

Для каждого числа m наступления события мы можем подсчитать биномиальные вероятности $P_n(0)$, $P_n(1)$, ..., $P_n(n)$.

Число m_0, которому при заданном n соответствует максимальная биномиальная вероятность $P_n(m_0)$, называется ***наивероятнейшим числом*** появления события A. При заданных n и p это число удовлетворяет неравенству

$$np - q \le m_0 \le np + p \text{ или } (n+1)p - 1 \le m_0 \le (n+1)p.$$

Замечание. *Если число $np + p$ не является целым, то m_0 равно целой части этого числа, т. е. $m_0 = [np + p]$; если же $np + p$ — целое число, то m_0 имеет два значения: $np - q$ и $np + p$ или $(n+1)p - 1$ и $(n+1)p$.*

Пример. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из лука равна 1/3. Производится шесть выстрелов. Каково наивероятнейшее число попаданий?

Решение. В данном примере число выстрелов $n = 6$. Рассмотрим событие A — «попадание в цель при одном выстреле». Для этого события известна вероятность $p = P(A) = 1/3$ и, следовательно, вероятность противоположного события $q = 1 - p = 2/3$. Для ответа на вопрос вычисляем $np - q = 6 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, $np + p = 6 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Следовательно, $m_0 \in \left[\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right]$. Единственное целое число, принадлежащее этому отрезку – это $m_0 = 2$.

4.3.5. Асимптотические формулы для вычисления биномиальных вероятностей

Следует отметить, что при больших m и n пользоваться формулой Бернулли практически невозможно. В таких случаях пользуются локальной теоремой Лапласа или теоремой Пуассона. Эти формулы тем будут точнее, чем n больше.

Локальная теорема Лапласа

Теорема. Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0 < p < 1)$, а n является достаточно большим, то вероятность $P_n(m)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится ровно m раз, приближенно выражается формулой:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ и $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Значения функции Гаусса $\varphi(x)$ находятся из таблицы (приложение 1) с помощью следующих *свойств функции* $\varphi(x)$:

1) функция $\varphi(x)$ четная, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Поэтому в таблице приведены значения функции лишь для положительных значений аргумента;

2) функция $\varphi(x)$ монотонно убывает, а ее предел при $x \to \infty$ равен нулю;

3) если $x > 4$, то можно считать, что $\varphi(x) \approx 0$.

Пример. Вероятность найти белый гриб среди прочих равна 0,25. Какова вероятность того, что среди 80 грибов белых будет 20?

Решение. По условию $n = 80$, $m = 20$. Следовательно, $x = \frac{20 - 80 \cdot 0{,}25}{\sqrt{80 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = 0$ и $\varphi(0) = 0{,}3989$. Тогда искомая вероятность $P_{80}(20) \approx \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot 0{,}3989 \approx 0{,}103$.

Интегральная теорема Лапласа

Теорема. Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0 < p < 1)$, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно определяется формулой

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1 \le m \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\Phi(x)$ называется **функцией Лапласа**. Ее значения приведены в таблице (приложение 2). При использовании этой таблицы необходимо знать свойства функции $\Phi(x)$:

1) функция $\Phi(x)$ нечетная, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, и поэтому приведены ее значения только для положительного аргумента;

2) предел функции при $x \to \infty$ равен $\frac{1}{2}$, и $\Phi(0) = 0$;

3) для всех значений $x > 5$ $(x < -5)$ можно считать, что $\Phi(x) \approx \frac{1}{2}$, $\left(\Phi(-x) \approx -\frac{1}{2}\right)$. Поэтому в таблице (приложение 2) приведены значения функции только для $0 \le x \le 5$.

Пример. Вероятность реализации одной акции некоторой компании равна 0,8. Брокерская фирма предлагает 100 акций этой кампании. Какова вероятность того, что будет продано: а) не менее 70 и не более 85 акций; б) не менее 70; в) не более 69 акций?

Решение. Событие A – «акция продана», $P(A) = p$:

а) по условию $n = 100$, $p = 0,8$, $q = 0,2$, $k_1 = 70$, $k_2 = 80$. Воспользуемся формулой

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

По условию

$$P_{100}(70, 80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{70 - 80}{\sqrt{16}} = -\frac{10}{4} = -2,5,$$

$$x_2 = \frac{85 - 80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{5}{4} = 1,25,$$

$$P_{400}(70, 85) \approx \Phi(1,25) - \Phi(-2,5).$$

По таблице значений функции Лапласа (приложение 2) и учитывая нечетность этой функции, находим $\Phi(1,25) = 0,3944$, $\Phi(-2,5) = -\Phi(2,5) = -0,4938$.

Тогда $P_{400}(70, 85) \approx \Phi(1,25) - \Phi(-2,5) = 0,3944 + 0,4938 = 0,8882$;

б) требование того, что фирма продает не менее (больше либо равно) 70 акций, означает, что будет продано либо 70, либо 71, либо 72 и т. д., либо 100 акций. Значит, в данном случае $k_1 = 70$, а $k_2 = 100$. Тогда

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{70 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -\dfrac{10}{4} = -2,5$, $x_2 = \dfrac{100 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \dfrac{20}{4} = 5.$

По таблице значений $\Phi(x)$ (приложение 2) находим

$$\Phi(-2,5) = -\Phi(2,5) = -0,4938,\ \ \Phi(5) = 0,5,\ \text{тогда}$$

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi(5) - \Phi(-2,5) = 0,5 + 0,4938 = 0,9938;$$

в) событие A — «появилось не менее 70 раз» — противоположно событию B — «появилось не более 69 раз», потому $P_{100}(0,69) \approx 1 - P_{100}(70,100) = 1 - 0,9938 = 0,0062.$

Значит, вероятность того, что будет продано либо 69, либо 68, либо 67 и т. д., либо ноль (ни одной) акций $P_{100}(0,69) \approx 0,0062.$

Формула Пуассона

Теорема. Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна, но близка к нулю, а число независимых испытаний n достаточно велико и произведение $np = \lambda = \text{const}$, то вероятность того, что во всех этих испытаниях событие A появится ровно m раз, приближенно выражается формулой

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Обычно формулу используют если $p < 0,01$, а $n > 100$ и $np \le 10$.

Пример. На базу отдыха прибыли 1000 подростков. Какова вероятность того, что среди этих отдыхающих окажется 5 детей, страдающих клаустрофобией, если в среднем 0,1 % подростков страдают данной болезнью?

Решение. Имеем: $n = 1000$, $m = 5$, $p = \dfrac{0,1\,\%}{100\,\%} = 0,001.$

Так как n велико, а p мало, то воспользуемся формулой Пуассона:

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0,001 = 1,$$

$$P_{1000}(5) \approx \frac{1^5 \cdot e^{-1}}{5!} = \frac{1}{120e} \approx 0,003\,086 \approx 0,0031.$$

Пример. Вероятность появления фальшивой банкноты в банке равна 0,002. В течение дня банк оперирует 500 банкнотами. Найдите вероятность того, что в течение дня в ходе обработки встретиться менее 3 фальшивых банкнот.

Решение. Из условия следует, что $n = 500$, $p = 0{,}002$. Так как n велико, а p мало, то воспользуемся формулой Пуассона. Имеем $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1$.

Тогда

$$P_{500}(m<3) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) =$$
$$= \frac{1^0 \cdot e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 \cdot e^{-1}}{1!} + \frac{1^2 \cdot e^{-1}}{2!} = 2{,}5e^{-1} \approx 0{,}919.$$

Примеры решения задач

1. Монета бросается 5 раз. Найдите вероятность того, что герб выпадет: а) 2 раза; б) менее 2 раз; в) не менее 2 раз; г) более 2 раз.

Решение. Обозначим через A событие «при однократном бросании монеты выпал герб». Тогда противоположным событием $\overline{A}$ будет событие «выпала цифра», при этом считаем, что монета симметрична, поэтому $p = P(A) = \frac{1}{2}$ и $q = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$. Монета при неизменных условиях бросается 5 раз. Вероятность появления герба в каждом единичном испытании постоянна и равна $\frac{1}{2}$, поэтому здесь применима формула Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}:$$

а) при пяти бросках герб выпал два раза:

$$n=5,\ m=2,\ P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16};$$

б) событие B – «при 5 бросках монеты герб выпадает менее 2 раз» – означает, что герб или выпадает 1 раз или вообще не выпадает. Поэтому $P(B) = P_5(0) + P_5(1)$.

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5!}{1!4!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{32},$$

$$P_5(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{32},$$

$$P(B) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}.$$

в) событие C – «при 5 подбрасываниях монеты герб выпал не менее 2 раз» – означает, что герб выпал или 2, или 3, или 4, или 5 раз. Потому

$P(C)=P_5(2)+P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)$. Противоположное ему событие $\overline{C}$ означает, что герб выпал менее 2 раз, а это событие B. Тогда

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-(P_5(0)+P_5(1))=1-P(B)=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16},\ P(C)=\frac{13}{16};$$

г) событие D – «при 5 подбрасываниях монеты герб выпал более 2 раз» – означает, что герб выпал либо 3, либо 4, либо 5 раз. Тогда $P(D)=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)$. Противоположным событию D будет событие $\overline{D}$ – «герб выпал не более двух раз», $P(\overline{D})=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)$. А так как эти вероятности нам уже известны, то можно найти, используя вероятность события $\overline{D}$:

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-(P_5(0)+P_5(1)+P_5(2))=1-\frac{1}{32}-\frac{5}{32}-\frac{10}{32}=1-\frac{16}{32}=\frac{1}{2}.$$

2. Для того чтобы проверить точность своих финансовых счетов, компания регулярно пользуется услугами аудиторов для проверки бухгалтерских проводок счетов. Служащие компании при обработке входящих счетов допускают примерно 5 % ошибок. Аудитор случайно отбирает 20 входящих документов. Найдите наивероятнейшее число документов, в которых будет обнаружена ошибка.

Решение. По условию $n=20,\ p=0{,}05,\ q=0{,}95$. Найдем наивероятнейшее число m_0 из двойного неравенства:

$$np-q\le m_0\le np+p.$$

Подставим данные задачи:

$$20\cdot 0{,}05-0{,}95\le m_0\le 20\cdot 0{,}05+0{,}05,$$

получаем $1-0{,}95\le m_0\le 1+0{,}05$, или $0{,}05\le m_0\le 1{,}05$. Так как m_0 – целое число, заключенное между 0,05 и 1,05, то $m_0=1$, поэтому наивероятнейшее число ошибочных счетов, обнаруженных аудитором, будет равно 1.

3. Вероятность того, что изделие, сошедшее с конвейера, первого сорта, равна 0,9. Какова вероятность того, что из 400 сошедших с конвейера деталей 356 окажутся первого сорта?

Решение. По условию $n=400,\ m=356,\ p=0{,}9,\ q=0{,}1$, т. е. n велико, $npq=400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1=36>10$. Тогда

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\ x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

$$P_{400}(356)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\varphi(x)=\frac{1}{6}\varphi(x),$$

где $x=\dfrac{356-400\cdot 0{,}9}{\sqrt{400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\approx -0{,}67.$

Используя значения функции Гаусса (приложение 1) и учитывая, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$, находим $\varphi(-0{,}67) = 0{,}3188$.

Тогда $P_{400}(356) \approx \dfrac{0{,}3188}{6} = 0{,}0531.$

4. Завод отправил на базу 500 изделий, вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найдите вероятность того, что в пути будет повреждено 2 изделия.

Решение. По условию $n = 500,\ p = 0{,}002$, а $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1 < 10$. Для нахождения вероятности $P_{500}(2)$ воспользуемся формулой Пуассона, так как условия ее применения выполнены. Тогда

$$P_{500}(2) \approx \frac{1^2 \cdot e^{-1}}{2!} \approx \frac{0{,}36788}{2} \approx 0{,}18394.$$

5. Вероятность того, что студент не прошел медицинский осмотр, равна $p = 0{,}2$. Найдите вероятность того, что среди 400 случайно выбранных студентов окажутся не прошедшими медицинский осмотр от 70 до 100 студентов.

Решение. По условию $k_1 = 70$; $k_2 = 100$; $n = 400$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$. Следовательно,

$$x_1 = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}02}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25,\quad x_2 = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}02}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5,$$

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}49 + 0{,}39 = 0{,}88.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Прибор состоит из четырех узлов. Вероятность безотказной работы прибора в течение смены для каждого узла равна 0,8. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что за смену откажут: а) два узла; б) не менее трех узлов; в) по крайней мере один узел.

2. Что более вероятно: выиграть у равносильного противника три партии из пяти или четыре партии из шести?

3. Сколько следует сыграть партий в шахматы с вероятностью победы в одной партии, равной 1/3, чтобы наивероятнейшее число побед было равно 5?

4. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,15. Какова вероятность того, что по крайней мере один из четырех билетов выиграет?

5. Вероятность сбоя в работе банкомата при каждом запросе равна 0,0019. Банкомат обслуживает 2000 клиентов за неделю. Определите вероятность того, что при этом число сбоев не превзойдет 3.

6. Вероятность дождливого дня на курортах Средиземноморья в августе равна 0,08. Найдите вероятность того, что из 9 дней отдыха будет не более 2 дождливых.

7. В семье пять детей. Найдите вероятность того, что в этой семье не менее двух девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

8. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найдите вероятность того, что среди 200 новорожденных будет 95 девочек.

9. По мишени производятся шесть выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что будет: а) два попадания; б) не менее двух попаданий; в) более двух попаданий.

10. Из студентов старших курсов ФФСН доля отличников составляет 31 %. Для оценки остаточных знаний была протестирована группа студентов старших курсов. Сколько студентов было отобрано в группу проверки, если наивероятнейшее число отличников в группе равно 23?

11. Страховой агент работает с 20 потенциальными клиентами. Вероятность того, что клиент заключит договор на страхование имущества, постоянна для каждого клиента и равна $\frac{3}{5}$. Вычислите наивероятнейшее число клиентов, которые заключат договор с агентом.

12. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 40 %. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 120 изделий?

13. Страховая компания изучает вероятность дорожных происшествий для юношей, имеющих мотоциклы. Было установлено, что вероятность попасть в дорожное происшествие для юноши в течение года равна 0,35. Найдите вероятность того, что из 700 юношей имеющих мотоцикл, в дорожное происшествие попадут: а) точно 270 юношей; б) более чем 230 и менее чем 270 юношей; в) более чем 270 юношей.

14. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью $\frac{1}{200}$. Найдите вероятность того, что среди 200 соединений произойдет: а) точно 1 неправильное соединение; б) менее 3 неправильных соединений; в) более 2 неправильных соединений.

15. Вероятность отказа каждого прибора при испытании не зависит от отказов остальных приборов и равна 0,2. Испытано 9 приборов. Какова вероятность того, что откажут: а) 2 прибора; б) 1 прибор; в) менее 3 приборов?

16. В партии из 100 изделий 10 % бракованных. Контролер для проверки наугад выбирает 8 изделий. Какова вероятность того, что бракованными будут: а) все изделия; б) хотя бы 1 изделие; в) менее 2 изделий?

17. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найдите вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) ровно 75 раз.

18. Анализ работы кредитного отдела банка выявил, что 12 % фирм, бравших кредит в банке, обанкротились и не вернут кредиты. Найдите наивероятнейшее число фирм, которые не вернут кредит, если в банке взяли кредит 25 фирм.

19. Устройство состоит из 500 независимо работающих элементов. Вероятность отказа любого элемента за время t равна 0,002. Найдите вероятность того, что за время t откажут: а) ровно 3 элемента; б) менее 3; в) более 3; г) хотя бы 1.

20. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется поврежденной, равна 0,003. Найдите вероятность того, что магазин получит поврежденных бутылок: а) ровно 2; б) более 2; в) хотя бы 1.

21. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,005. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

Вопросы для самоконтроля

1. Какая схема называется схемой Бернулли?
2. Какой вид имеет формула Бернулли?
3. Что называется наивероятнейшим числом наступления события в n независимых испытаниях?
4. Чему равна вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится: а) менее m раз; б) более m раз; в) не менее m раз; г) не более m раз?
5. Когда применяются локальная и интегральная теоремы Лапласа?
6. Сформулируйте локальную теорему Лапласа.
7. Как определяется функция Гаусса. Каковы ее свойства?
8. Сформулируйте интегральную теорему Лапласа.
9. Как определяется функция Лапласа? Каковы основные свойства функции Лапласа?
10. В каких случаях нужно пользоваться приближенной формулой Пуассона?

4.4. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим простейшие примеры: например, при бросании игральной кости мы случайным образом получаем одно из чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6 или при каких либо измерениях получаются случайные ошибки и т. п. В таких случаях мы имеем дело со случайными величинами. На примере с бросанием игральной кости мы видим, что каждому исходу опыта ставится в соответствие единственное число $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – значение случайной величины. Поэтому естественно рассматривать случайную величину как функцию, заданную на множестве исходов данного опыта.

Определение случайной величины. Пусть Ω – пространство элементарных событий. Числовую функцию от элементарного события $\omega \in \Omega$ назовем ***случайной величиной***.

Таким образом, если каждому элементарному событию ω можно поставить в соответствие некоторое число, то говорят, что задана случайная величина.

Случайные величины будем обозначать *прописными латинскими буквами* X, Y, Z и т. д., а их возможные *значения* – соответствующими *строчными латинскими буквами* x, y, z и т. д. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены x_1, x_2, x_3.

Определение дискретной случайной величины. Случайная величина, принимающая значения, которые можно записать в виде конечного набора или счетной последовательности чисел, называется ***дискретной***, т. е. дискретная случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения, число которых конечно или счетное.

Примеры дискретных случайных величин:

- оценка, которую студент может получить на экзамене;
- число несчастных случаев на улицах города Минска;
- число вызовов, поступивших на телефонную станцию за сутки;
- число родившихся мальчиков среди десяти новорожденных (0, 1, ..., 10).

Определение непрерывной случайной величины. Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка, называется ***непрерывной случайной величиной***.

Примеры непрерывных случайных величин:

- рост человека от 150 до 200 см;
- температура воздуха в случайно выбранный день;
- скорость самолета в момент выхода на заданную высоту;
- время ожидания транспорта.

Каждому значению x_n дискретной случайной величины отвечает определенная вероятность p_n, каждому промежутку $(a; b)$ из области значений непрерывной случайной величины также отвечает определенная вероятность P того, что значение x, принятое случайной величиной, попадет в этот промежуток.

Определение закона распределения случайной величины. Соотношение, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется ***законом распределения случайной величины***.

Закон распределения дискретной случайной величины обычно задается в следующем виде:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n	...
P	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-1}	p_n	...

В верхней строке записывают возможные значения x_i случайной величины X, а в нижней – их вероятности $p_i = P(X = x_i)$. Так как события $A_i = \{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, образуют полную группу событий, то $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = 1.$ В случае конечного числа значений случайной величины, равного n, справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически: построить точки (x_i, p_i) в декартовой прямоугольной системе координат и соединить их отрезками прямых. Полученная фигура называется ***многоугольником распределения***.

Пример. Даны вероятности значений случайной величины X: вероятность появления значения 10 равна 0,3; значения 2 – 0,4; соответственно для значения 8 вероятность равна 0,1 и для значения 4 – 0,2. Запишем эти значения в таблицу и построим многоугольник распределения (рис. 4.1).

X	2	4	8	10
P	0,4	0,2	0,1	0,3

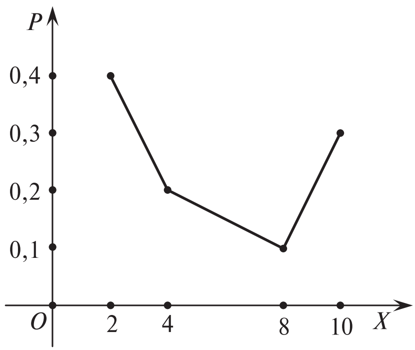


Рис. 4.1. Многоугольник распределения случайной величины

Следует отметить, что закон распределения случайной величины полностью задает дискретную случайную величину. Существенно важным является то, что случайную величину изучают по ее числовым характеристикам, основными из которых являются *математическое ожидание*, *дисперсия* и *среднее квадратическое отклонение*. Далее рассмотрим эти числовые характеристики.

4.4.1. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Определение математического ожидания. ***Математическим ожиданием*** $M(X)$ дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности.

Если дискретная случайная величина X принимает конечное число значений $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$ соответственно, то по определению

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n .$$

Пример. Подбрасывается игральная кость. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины X, равной числу выпавших очков.

Решение. Закон распределения случайной величины X имеет следующий вид:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Следовательно, по определению математического ожидания имеем:

$$M(X)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=3{,}5.$$

Замечание. *Отметим, что постоянную величину C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение $X = C$ с вероятностью $P = 1$. Поэтому $M(C) = C \cdot 1 = C$, т. е. математическое ожидание постоянной величины равно самой этой величине.*

Далее рассмотрим без доказательства важнейшие ***свойства математического ожидания для дискретных случайных величин***.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т. е.

$$M(CX)=CM(X).$$

2. Математическое ожидание суммы двух случайных величин X и Y равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Определение независимых случайных величин. Две случайные величины X и Y называют ***независимыми***, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. Несколько случайных величин независимы, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные случайные величины.

Критерием независимости двух случайных величин X и Y служит выполнение равенства

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$$

для любых $x, y \in \boldsymbol{R}$.

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Замечание. *Свойства 2 и 3 имеют место для любого конечного числа случайных величин.*

Пример. Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = 2X + 3Y + 7$, если $M(X) = 4$, $M(Y) = 1$.

Решение. Используя свойства математического ожидания, имеем

$$M(Z) = M(2X + 3Y + 7) = M(2X) + M(3Y) + M(7) =$$
$$= 2M(X) + 3M(Y) + 7 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 7 = 18.$$

Пример. Независимые случайные величины заданы законами распределения.

X	1	2
P	0,6	0,4

Y	4	6
P	0,2	0,8

Найдите математическое ожидание случайной величины XY.

Решение. Найдем математические ожидания каждой из данных случайных величин:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}4 = 1{,}4, \quad M(Y) = 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}8 = 5{,}6.$$

В силу независимости случайных величин X и Y искомое математическое ожидание

$$M(XY) = M(X)M(Y) = 1{,}4 \cdot 5{,}6 = 7{,}84.$$

Замечание. *Математическое ожидание случайной величины называют также ее* ***средним значением****.*

Следует заметить, что математическое ожидание характеризует случайную величину не полностью. Зная математическое ожидание, нельзя сказать, какие значения принимает случайная величина и как они отклоняются от среднего значения. Чтобы знать, как рассеяны значения случайной величины вокруг ее математического ожидания, вводят такую числовую характеристику, как дисперсия.

Определение отклонения случайной величины. Если X – дискретная случайная величина, $M(X)$ – ее математическое ожидание, тогда величина $X - M(X)$ называется ***отклонением случайной величины*** X от ее математического ожидания.

Отклонение является случайной величиной и его математическое ожидание равно нулю:

$$M(X-M(X))=M(X)-M(M(X))=M(X)-M(X)=0.$$

Из полученного равенства следует, что с помощью отклонения невозможно определить среднее отклонение возможных значений случайной величины X от ее математического ожидания, т. е. степень рассеяния случайной величины X. Это объясняется взаимным погашением возможных положительных и отрицательных значений отклонения. Данного недостатка можно избежать, если рассматривать квадрат отклонения случайной величины X.

Определение дисперсии. ***Дисперсией*** $D(X)$ дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X)=M((X-M(X))^2).$$

Дисперсия случайной величины постоянна, т. е. является числовой характеристикой этой величины.

Если дискретная случайная величина X принимает конечное число значений $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$ соответственно, то закон распределения случайной величины $(X-M(X))^2$ имеет следующий вид.

$(X-M(X))^2$	$(x_1-M(X))^2$	$(x_2-M(X))^2$	...	$(x_n-M(X))^2$
P	p_1	p_2	...	p_n

Исходя из определения математического ожидания, получаем

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i.$$

Дисперсия дискретной случайной величины обладает следующими свойствами.

1. Дисперсия – величина неотрицательная, т. е. $D(X) \geq 0$.

2. Дисперсия случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

Покажем это:

$$D(X)=M((X-M(X))^2)=M(X^2-2XM(X)+(M(X))^2)=$$
$$=M(X^2)-2M(X)M(X)+(M(X))^2=$$
$$=M(X^2)-2(M(X))^2+(M(X))^2=M(X^2)-(M(X))^2.$$

3. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C)=0.$$

Покажем это:

$$D(C) = M((C - M(C))^2) = M((C - C)^2) = M(0) = 0.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Покажем это.

Из определения дисперсии и свойств математического ожидания следует, что

$$D(CX) = M((CX - M(CX))^2) = M((CX - CM(X))^2) =$$

$$= M(C^2(X - M(X))^2) = C^2 M((X - M(X))^2) = C^2 D(X).$$

5. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Покажем это.

Применяя свойство дисперсии 2 и свойства математического ожидания, имеем

$$D(X + Y) = M((X + Y)^2) - (M(X + Y))^2 =$$

$$= M(X^2 + 2XY + Y^2) - (M(X) + M(Y))^2 =$$

$$= M(X^2) + 2M(XY) + M(Y^2) - ((M(X))^2 + 2M(X)M(Y) + (M(Y))^2) =$$

$$= M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - (M(X))^2 - 2M(X)M(Y) - (M(Y))^2 =$$

$$= M(X^2) - (M(X))^2 + M(Y^2) - (M(Y))^2 = D(X) + D(Y).$$

Замечание. *Отметим, что свойство 5 распространяется на случай любого конечного числа случайных величин.*

Если C – постоянная, то

$$D(X + C) = D(X).$$

Покажем это:

$$D(X + C) = M(((X + C) - M(X + C))^2) =$$

$$= M((X + C - (M(X) + C))^2) = M((X - M(X))^2) = D(X).$$

Определение среднего квадратического отклонения. Квадратный корень из дисперсии случайной величины X называется ее ***средним квадратическим отклонением*** и обозначается $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Введение среднего квадратического отклонения объясняется тем, что дисперсия измеряется в квадратных единицах относительно размерности самой случайной величины. Например, если возможные значения некоторой случайной величины измеряются в метрах, то ее дисперсия – в квадратных метрах. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений той же размерности, что и сама случайная величина, используется среднее квадратическое отклонение.

Пример. Дисперсия случайной величины X равна 2. Найдите дисперсию случайной величины $Y = 5X + 3$.

Решение. Согласно свойствам дисперсии имеем

$$D(Y) = D(5X + 3) = D(5X) = 5^2 \cdot D(X) = 25 \cdot 2 = 50.$$

Пример. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения.

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

Решение. Находим

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}9.$$

Запишем закон распределения квадрата отклонения случайной величины X, т. е. величины $(X - M(X))^2$.

$(X - M(X))^2$	$(0 - 0{,}9)^2$	$(1 - 0{,}9)^2$	$(2 - 0{,}9)^2$
P	0,3	0,5	0,2

По формуле для дисперсии дискретной случайной величины, принимающей конечное число значений, находим

$$D(X) = (0 - 0{,}9)^2 \cdot 0{,}3 + (1 - 0{,}9)^2 \cdot 0{,}5 + (2 - 0{,}9)^2 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 0{,}81 \cdot 0{,}3 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 + 1{,}21 \cdot 0{,}2 = 0{,}49.$$

Отсюда

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$$

Отметим, что дисперсию случайной величины X можно было найти и по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Запишем закон распределения случайной величины X^2.

X^2	0	1	4
P	0,3	0,5	0,2

Находим

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2 = 1,3,$$

откуда

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1,3 - 0,9^2 = 1,3 - 0,81 = 0,49.$$

Примеры решения задач

1. Подбрасываются две монеты и подсчитывается количество выпавших «орлов» на обеих верхних сторонах монет. Рассматривается дискретная случайная величина X – число выпадения «орлов» на обеих монетах. Записать закон распределения этой случайной величины.

Решение. В данном испытании пространство элементарных событий равно $\Omega = \{(O, O), (P, P), (O, P), (P, O)\}$, где О означает, что выпал «орел», Р – выпала «решка». «Орел» может выпасть 1 раз, 2 раза или не появиться ни разу. Следовательно, случайная величина X может принимать только три значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Вероятности этих значений равны соответственно

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad p_2 = P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad p_3 = P(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет следующий вид.

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

2. Стрелок производит по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Случайная величина X – число попаданий по мишени. Записать закон распределения случайной величины.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли. В данном случае $p = 0,3$; $q = 0,7$; $n = 3$, откуда получаем

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^3 = 0,343,$$

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^2 = 3 \cdot 0,3 \cdot 0,49 = 0,441,$$

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^1 = 3 \cdot 0,09 \cdot 0,7 = 0,189,$$

$$P_3(3) = C_3^3 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^0 = 0,027.$$

Закон распределения случайной величины X имеет следующий вид.

X	0	1	2	3
P	0,343	0,441	0,189	0,027

3. Двое студентов играют в интересную игру: первый студент загадывает число от 1 до 6, второй должен угадать это число. Пусть случайная величина X – число попыток, сделанных вторым игроком при угадывании числа:

а) составить закон распределения случайной величины X;

б) найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение: а) дискретная случайная величина X может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6 (студент угадает либо с первой, либо со второй и т. д. до шестой попытки), $P(x = 1) = 1/6$ (с первой попытки угадано нужное число, тогда число благоприятных исходов равно 1, а всех исходов – 6). Если $x = 2$, то число угадано со второй попытки: $P(x = 2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$. Если событие состоит в том, что первые две попытки были неудачные и только третья оказалась удачной, то вероятность такого события $P(x = 3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$. Далее $P(x = 4) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Аналогично $P(x = 5) = \frac{1}{6}$, $P(x = 6) = \frac{1}{6}$.

Закон распределения числа сделанных попыток будет иметь следующий вид:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

б) $M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6}$.

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = 15{,}17 - 12{,}25 \approx 2{,}92,$$

где

$$M(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} =$$
$$= \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6}.$$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2{,}92} \approx 1{,}7$.

4. Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = 3X - 4Y$, если $M(X) = 2$, $M(Y) = 3$.

Решение. Используем свойство – математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий; постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания – имеем

$$M(Z) = 3M(X) - 4M(Y) = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 6 - 12 = -6.$$

5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

X	-1	0	2
P	p_1	p_2	p_3

Найдите p_1, p_2, p_3, если известны величины: математическое ожидание этой случайной величины $M(X) = 0,1$ и математическое ожидание ее квадрата $M(X^2) = 0,9$.

Решение. Пользуясь тем, что сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна 1, имеем $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Принимая во внимание, что $M(X) = 0,1$, получаем соотношение

$$-1p_1 + 0p_2 + 2p_3 = 0,1.$$

Составим ряд распределения для случайной величины X^2.

X^2	1	0	4
P	p_1	p_2	p_3

Запишем выражение

$$M(X^2) = 1p_1 + 0p_2 + 4p_3.$$

Используя условие задачи $M(X^2) = 0,9$, имеем

$$1p_1 + 4p_3 = 0,9,$$

откуда получается система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$
$$-1p_1 + 0p_2 + 2p_3 = 0,1,$$
$$1p_1 + 4p_3 = 0,9.$$

Решив эту систему, найдем искомые вероятности:

$$p_1 = \frac{3}{5},\ p_2 = \frac{7}{30},\ p_3 = \frac{1}{6}.$$

6. Дискретная случайная величина задана законом распределения.

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдите математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ этой случайной величины.

Решение. Находим $M(X)$ по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i$.

$$M(X) = -5 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 = -0,3.$$

Дисперсию $D(X)$ будем искать по формуле $D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2$. Напишем закон распределения случайной величины X^2.

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдем $M(X^2)=25\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}3+9\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}2=15{,}3$. Тогда

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=15{,}3-(-0{,}3)^2=15{,}21.$$

Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{15{,}21}=3{,}9$.

7. Монету бросили 7 раз. Сколько раз в среднем появится герб?

Решение. Случайная величина X – выпадение герба. Она сможет принимать значения. Запишем закон распределения случайной величины X.

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{128}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{1}{128}$

Здесь вероятности найдены по формуле Бернулли

$$P(X=m)=P_m(m)=C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $n=7,\ p=\frac{1}{2},\ q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 7.$

$$P(X=0)=\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128};\ P(X=1)=C_7^1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{7}{128};$$

$$P(X=2)=C_7^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{21}{128};\ P(X=3)=C_7^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{128};$$

$$P(X=4)=C_7^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{35}{128};\ P(X=5)=C_7^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{128};$$

$$P(X=6)=C_7^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{128};\ P(X=7)=\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{128}.$$

Найдем $M(X)$:

$$M(X)=0\cdot\frac{1}{128}+1\cdot\frac{7}{128}+2\cdot\frac{21}{128}+3\cdot\frac{35}{128}+4\cdot\frac{35}{128}+$$

$$+5\cdot\frac{21}{128}+6\cdot\frac{7}{128}+7\cdot\frac{1}{128}=\frac{448}{128}=3{,}5.$$

То есть герб в среднем появится 3–4 раза.

Задачи для самостоятельного решения

1. В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причем 2 из них выигрывают по 100 рублей, а остальные – по 10 рублей. Составить закон распределения случайной величины X – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

2. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до первого появления белого шара. Построить закон распределения случайной величины X – числа извлеченных шаров.

3. В урне 5 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу извлекли 3 шара. Построить закон распределения случайной величины X – числа извлеченных белых шаров.

4. Дан ряд распределения случайной величины X. Найдите $M(X)$:

а)

X	–1	5	6
P	0,2	0,4	0,4

б)

X	1,2	2,3	4,1
P	0,35	p_2	0,24

5. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения:

а)

X	4,3	5,1	10,6
P	0,2	0,3	0,5

б)

X	131	140	160	180
P	0,05	0,1	0,25	0,6

6. Случайная величина X задана своим законом распределения.

X	–1	0	x_3	5
P	0,3	0,2	0,1	0,4

Найдите x_3, если известно, что $M(X) = 1{,}9$.

7. Организована беспроигрышная лотерея. Имеется 1000 выигрышей, из них 400 – по 10 руб., 300 – по 20 руб., 200 – по 100 руб. и 100 – по 200 руб. Каков средний размер выигрыша для купившего один билет?

8. Найдите математическое ожидание случайной величины Z, если известны математические ожидания случайной величины X и случайной величины Y:

а) $Z = 3X + 2Y$, $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$;

б) $Z = X - Y$, $M(X) = 2$, $M(Y) = 2{,}8$.

4.4.2. Функция распределения вероятностей случайной величины

Заметим, как говорилось ранее, дискретная случайная величина может быть задана законом распределения, представляющим собой перечень всех возможных значений этой случайной величины и их вероятностей. Однако такой способ задания не является общим: он неприменим, например, для непрерывных случайных величин. Введение понятия функции распределения вероятностей случайной величины устраняет этот недостаток.

Введем следующие обозначения. Пусть x – действительное число, т. е. $x \in \boldsymbol{R}$. Обозначим через $F(x)$ вероятность события A, состоящего в том, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т. е. $A = \{X < x\}$. Очевидно, что мы получили функцию $F(x)$ от переменной x.

Определение функции распределения. ***Функцией распределения*** вероятностей случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что X примет значение, меньшее x: $F(x) = P(X < x)$.

Функция распределения содержит в себе всю информацию, заложенную в случайной величине. Поэтому считается, что случайная величина (дискретная либо непрерывная) задана, если задана ее функция распределения.

Свойства функции распределения любой случайной величины

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Это свойство следует из того факта, что функция $F(x)$ есть вероятность.

2. Функция распределения $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

Покажем это.

Действительно, пусть $x_1 < x_2$. Событие «случайная величина X примет значение, меньшее x_2» можно представить в виде суммы двух несовместных событий: «X примет значение, меньшее x_1» и «X примет значение, удовлетворяющее неравенствам $x_1 < X < x_2$». Обозначим вероятности последних двух событий через $P(X < x_1)$ и $P(x_1 \le X < x_2)$ соответственно. По теореме о вероятности суммы двух несовместных событий имеем

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2),$$

откуда

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Поскольку вероятность любого события – число неотрицательное, то $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$ и, следовательно, $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. Вероятность попадания значений случайной величины X в полуинтервал $[a; b)$ равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах этого интервала:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x \le a, \\ 1 \text{ при } x \ge b.\end{cases}$

Покажем это.

Действительно, если $x \le a$, то событие $A=\{X<x\}$ является невозможным (случайная величина X таких значений не принимает) и, следовательно, его вероятность равна нулю. Если $x \ge b$, то событие $A=\{X<x\}$ является достоверным и, следовательно, его вероятность равна единице.

5. Для случайной величины X

$$\lim_{x \to -\infty} F(x)=F(-\infty)=0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x)=F(+\infty)=1.$$

6. Функция распределения $F(x)$ непрерывна слева для любого $x_0 \in \boldsymbol{R}$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0-0} F(x)=F(x_0).$$

Последние два свойства 5 и 6 рассмотрены без доказательства.

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x \le -1, \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \text{ при } -1<x \le 2, \\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания случайная величина X принимает значения из полуинтервала $[0; 1)$.

Решение. Так как на полуинтервале $[0; 1)$ функция распределения задается формулой $F(x) = \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$, то

$$P(0 \le X<1)=F(1)-F(0)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Функция распределения дискретной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\sum_{x_k<x} P(X=x_k),$$

где суммируются вероятности тех значений случайной величины X, которые меньше x. График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид.

Пример. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей.

X	0	1	2
P	0,1	0,4	0,5

Найдите функцию распределения случайной величины X и постройте график функции распределения.

Решение. Если $x \le 0$, то событие $A = \{X < x\}$ является невозможным (случайная величина не принимает значений, строго меньших нуля) и, следовательно, $F(x) = 0$.

Если $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X) = 0{,}1$. Действительно, в данной ситуации случайная величина X может принять только одно значение, находящееся левее 1, – значение 0 с вероятностью 0,1.

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$. Действительно, $F(x)$ равно вероятности события $A = \{X < x\}$, которое может быть осуществлено, когда случайная величина X примет значение 0 или 1. Поскольку два этих события несовместны, то по теореме сложения вероятность события $A = \{X < x\}$ равна сумме вероятностей событий $A_1 = \{X = 0\}$ и $A_2 = \{X = 1\}$.

Если $x > 2$, то $F(x) = 1$, так как событие $A = \{X < x\}$ является достоверным.

Таким образом, получаем функцию распределения вида

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ 0{,}1 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 0{,}5 \text{ при } 1 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

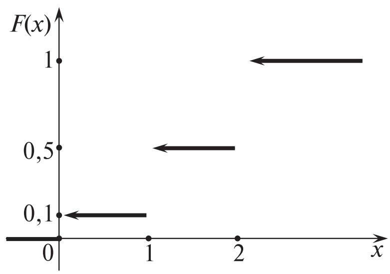


Рис. 4.2. График функции распределения

График функции $F(x)$ приведен на рис. 4.2.

Как видно из рис. 4.2, функция $F(x)$ является разрывной, причем точками разрыва являются значения x_k, принимаемые случайной величиной X. Величины скачков функции равны вероятностям $p_k = P(X = x_k)$.

Примеры решения задач

1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения.

X	2	3	5
P	0,5	0,2	0,3

Найдите функцию распределения $F(x)$. Найдите вероятность попадания случайной величины X на полуинтервал [2; 3).

Решение.

1. Если $x \le 0$, то $F(x) = 0$. Действительно, значений меньше $x = 2$ случайная величина не принимает. Значит, при $x \le 2$ функция $F(x) = P(X < x) = 0$.

2. Если $2 < x \le 3$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 2) = 0{,}5$. Действительно, случайная величина X может принять только значение $x = 2$ с вероятностью 0,5.

3. Если $3 < x \le 5$, то $F(x) = 0{,}7$. Действительно, X может принять значение $x = 2$ с вероятностью 0,5 и значение $x = 3$ с вероятностью 0,2. Следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, случайная величина X может принять с вероятностью $P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$ (по теореме сложения вероятностей несовместных событий), т. е. $F(x) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$.

4. Если $x > 5$, то $F(x) = 1$. Действительно,

$$F(x) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 5) = 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}3 = 1.$$

Итак, искомая функция распределения принимает вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 2, \\ 0{,}5 \text{ при } 2 < x \le 3, \\ 0{,}7 \text{ при } 3 < x \le 5, \\ 1 \text{ при } x > 5. \end{cases}$$

Далее найдем вероятность $P(2 \le X < 3)$ попадания случайной величины X на полуинтервал [2; 3). По формуле $P(a \le X < b) = F(a) - F(b)$ получаем

$$P(2 \le X < 3) = F(3) - F(2) = 0{,}5 - 0 = 0{,}5.$$

2. Стрелок ведет стрельбу по мишени до первого попадания, имея только 4 патрона. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6:

а) найдите закон распределения числа патронов, оставшихся неизрасходованными, постройте многоугольник распределения этой случайной величины;

б) найдите функцию распределения $F(x)$ и постройте график той же случайной величины. Найдите вероятность того, что случайная величина X примет значения, принадлежащие интервалу [1; 3).

Решение:

а) обозначим A_i – попадание стрелком при i-м выстреле, $i = 1, 2, 3, 4$. Пусть X – число оставшихся патронов. Если $X = 0$, то стрелок израсходовал все патроны. Это может произойти только в двух случаях: либо стрелок первые три раза промахнулся, а на четвертый попал либо промахнулся все четыре раза, причем оба исхода являются событиями несовместными. Поэтому

$$P(X = 0) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 =$$
$$= 0{,}4^3 \cdot 0{,}6 + 0{,}4^4 = 0{,}0384 + 0{,}0256 = 0{,}064.$$

Для того чтобы после стрельбы остался 1 патрон, стрелок должен попасть в мишень после первых двух промахов, т. е. происходит событие $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$, $P(X = 1) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096.$ Если $X = 2$, то произошло событие $\overline{A_1}A_2$ – «первый раз стрелок промахнулся, а второй попал» и $P(X=2)=P(\overline{A_1}A_2)=0,4\cdot 0,6=0,24.$ Если $X=3$, то у стрелка осталось 3 патрона, значит, он попал с первого выстрела, т. е. $P(X=3)=P(A_1)=0,6.$

Закон распределения имеет следующий вид:

X	0	1	2	3
P	0,064	0,096	0,24	0,6

Проверка: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0,064+0,096+0,24+0,6=1.$

Многоугольник распределения имеет следующий вид (рис. 4.3):

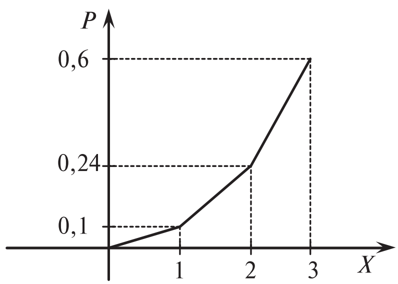


Рис. 4.3. Многоугольник распределения

б) для нахождения функции распределения дискретной случайной величины воспользуемся формулой

$$F(x)=\sum_{x_i<X} P(X=x_i).$$

1. При $x\le 0$ $F(x)=\sum_{x_i<0} P(X=x_i)=0.$

2. При $0<x\le 1$ $F(x)=\sum_{x_i<1} P(X=x_i)=P(X=0)=0,064.$

3. При $1<x\le 2$ $F(x)=\sum_{x_i<2} P(X=x_i)=P(X=0)+P(X=1)=$
$=0,064+0,096=0,16.$

4. При $2<x\le 3$ $F(x)=\sum_{x_i<3} P(X=x_i)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$
$=0,064+0,096+0,24=0,4.$

5. При $x>3$ $F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$
$=0,064+0,096+0,24+0,6=1.$

Итак, искомая функция распределения принимает вид

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ 0{,}064 \text{ при } 0<x\le 1,\\ 0{,}16 \text{ при } 1<x\le 2,\\ 0{,}4 \text{ при } 2<x\le 3,\\ 1 \text{ при } x>3.\end{cases}$$

Таким образом, график $F(x)$ имеет следующий вид (рис. 4.4):

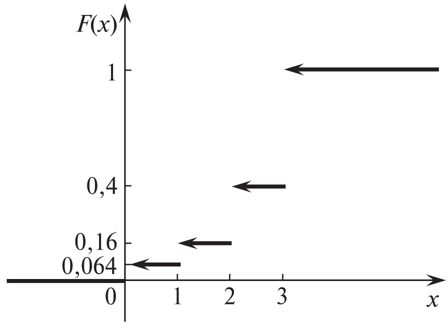


Рис. 4.4

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значения, принадлежащие интервалу [1; 3): $P(1 \le X < 3) = F(3) - F(1) = 0{,}4 - 0{,}064 = 0{,}336$.

3. Двое студентов играют в интересную игру: первый студент загадывает число от 1 до 6, второй студент должен угадать это число. Пусть случайная величина X – число попыток, сделанных вторым игроком при угадывании числа. Найдите функцию распределения случайной величины X и постройте ее график.

Решение. Закон распределения числа сделанных попыток будет иметь следующий вид:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Построим функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины.

Так как x не принимает значений, меньших 1, то при $x \le 1$, $F(x)=0$.

При $1<x\le 2$ только одно значение случайной величины меньше x, а именно $x = 1$, и вероятность этого значения равна 1/6, тогда $1<x\le 2$, $F(x) = 1/6$.

При $2<x\le 3$ два значения случайной величины X, а именно $x = 1$ и $x = 2$, удовлетворяют неравенству $X<x$, тогда $F(x)=P(x=1)+P(x=2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$.

При $3 < x \leq 4$ три значения случайной величины X удовлетворяют неравенству $X < x$, а именно $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, следовательно

$$F(x) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}.$$

Аналогично при $4 < x \leq 5$ $F(x) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}.$

При $5 < x \leq 6$, $F(x) = \frac{5}{6}$; и наконец, если $x > 6$, то $F(x) = \frac{6}{6} = 1$. Таким образом, аналитическое выражение функции распределения будет иметь вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 1, \\ \frac{1}{6} \text{ при } 1 < x \leq 2, \\ \frac{2}{6} \text{ при } 2 < x \leq 3, \\ \frac{3}{6} \text{ при } 3 < x \leq 4, \\ \frac{4}{6} \text{ при } 4 < x \leq 5, \\ \frac{5}{6} \text{ при } 5 < x \leq 6, \\ 1 \text{ при } x > 6. \end{cases}$$

Построим график функции распределения (рис. 4.5).

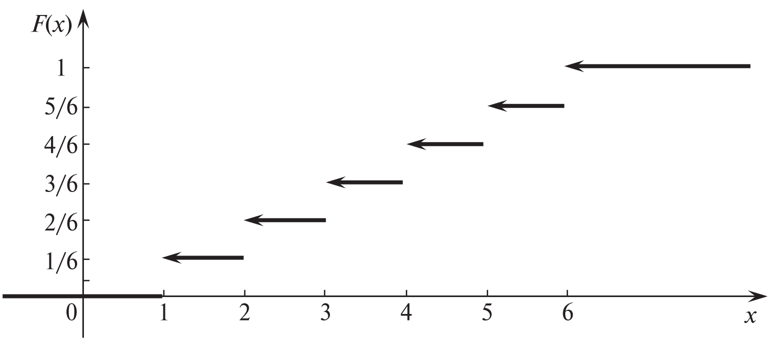


Рис. 4.5

Задачи для самостоятельного решения

1. В партии из 15 телефонных аппаратов 5 неисправных аппаратов. Случайная величина X – число неисправных аппаратов среди 3, случайным образом отобранных. Записать закон распределения случайной величины X. Вычислите $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. Найдите $F(x)$ и постройте ее график.

2. Вероятность того, что необходимая студенту книга в библиотеке свободна, равна 0,3. В городе 4 библиотеки. Случайная величина X – число библиотек, которые посетит студент в поисках книги. Вычислите $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. Найдите $F(x)$ и постройте ее график.

3. При установившемся технологическом процессе предприятие выпускает 2/3 своих изделий первым сортом. Случайная величина X – число изделий первого сорта из взятых наугад 4. Запишите закон распределения случайной величины X. Вычислите $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. Найдите $F(x)$ и постройте ее график.

4. Из 25 работ, из которых 5 имеют оценку «отлично», выбирают 3 работы. Определить функцию распределения случайной величины X – количества «отличных» работ среди выбранных. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

5. В группе туристов из 25 человек – 10 мужчин. Определите функцию распределения случайной величины X – количества мужчин среди 4 выбранных. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

6. В экзаменационном билете три задачи. Вероятность того, что студент правильно решит первую задачу, равна 0,9, вторую – 0,8, третью – 0,7. Составьте закон распределения числа правильно решенных задач в билете, вычислите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Постройте график функции распределения.

4.5. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4.5.1. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Используя понятие функции распределения вероятностей, можно дать более точное определение непрерывной случайной величины.

Определение непрерывной случайной величины. Случайная величина X называется ***непрерывной***, если существует функция $p(x)$ такая, что при любом $x \in \boldsymbol{R}$

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt.$$

Функция $p(x)$, входящая в последнее равенство, называется ***плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины*** X. График функции $p(x)$ называется ***кривой распределения***.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[a; b)$.

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[a; b)$, равна определенному интегралу от ее плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a \le X < b) = \int_a^b p(x)\,dx.$$

Доказательство. Действительно, на основании свойства 3 функции распределения имеем

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Из определения непрерывной случайной величины имеем

$$F(b) = \int_{-\infty}^{b} p(x)\,dx, \quad F(a) = \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx,$$

откуда

$$F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} p(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx + \int_a^b p(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,dx.$$

Замечание. *Доказанная формула геометрически означает тот факт, что вероятность попадания значений непрерывной случайной величины X в полуинтервал $[a; b)$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, осью Ox и отрезками прямых $x = a$, $x = b$* (рис. 4.6).

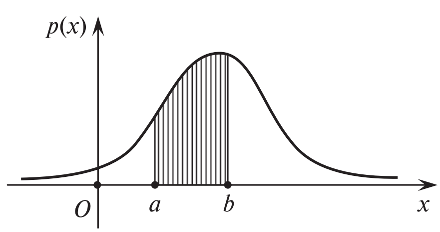


Рис. 4.6

Из определения непрерывной случайной величины следует, что функция $F(x)$ непрерывна. Поэтому вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю:

$$P(X = c) = 0.$$

Действительно, положив в формуле

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt,$$

$a = c$, $b = c + \Delta x$, имеем $P(c \le X \le c + \Delta x) = F(c + \Delta x) - F(c)$.

Устремим Δx к нулю. В силу непрерывности $F(x)$ в точке c разность $F(c + \Delta x) - F(c)$ также стремится к нулю, откуда и получаем требуемое.

Используя равенство $P(X = c) = 0$, нетрудно получить равенства

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b).$$

Например, равенство

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

доказывается так:

$$P(a \le X < b) = P(X = a) + P(a < X < b) = 0 + P(a < X < b) = P(a < X < b).$$

Свойства плотности распределения

1. $p(x) \ge 0$ (следует из того, что $F(x)$ – неубывающая функция).

2. В точках дифференцируемости функции распределения $F(x)$ ее производная равна плотности распределения: $F'(x) = p(x)$.

3. Интеграл по бесконечному промежутку $(-\infty; +\infty)$ от плотности распределения $p(x)$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

Это следует из того, что $F(+\infty) = 1$. Это свойство имеет следующую геометрическую интерпретацию: площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения и осью Ox, равна единице.

В частности, если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат отрезку $[a; b]$, то

$$\int_{a}^{b} p(x)dx = 1,$$

так как $p(x) = 0$ вне этого отрезка.

Пример. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{1}{2}\sin x \text{ при } 0 < x \le \pi, \\ 0 \text{ при } x > \pi. \end{cases}$$

Найдите функцию распределения $F(x)$ и вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Если $x \le 0$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Если $0 < x \le \pi$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} p(t)\,dt + \int_{0}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\sin t\,dt =$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\cos t\Big|_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x.$$

Если $x > \pi$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} p(t)\,dt + \int_{0}^{\pi} p(t)\,dt + \int_{\pi}^{x} p(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\sin t\,dt + \int_{\pi}^{x} 0\,dt = 0 - \frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi} + 0 = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x \text{ при } 0 < x \le \pi, \\ 1 \text{ при } x > \pi; \end{cases}$$

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_{0}^{\pi/4} \frac{1}{2}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

4.5.2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Определение математического ожидания. ***Математическим ожиданием непрерывной случайной величины*** X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a; b]$, а плотностью распределения вероятностей является функция $p(x)$, называют определенный интеграл

$$M(X) = \int_{a}^{b} xp(x)\,dx.$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx$$

при условии, что несобственный интеграл сходится абсолютно, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,p(x)\,dx.$$

Определение дисперсии. ***Дисперсией непрерывной случайной величины*** X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X)=M((X-M(X))^2).$$

Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a; b]$, а плотностью распределения вероятностей является функция $p(x)$, то

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2\,p(x)\,dx.$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат всей оси Ox, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-M(X))^2\,p(x)\,dx$$

при условии, что интеграл сходится.

Для вычисления дисперсии можно получить более удобные формулы:

$$D(X)=\int_a^b x^2\,p(x)\,dx-(M(X))^2,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,p(x)\,dx-(M(X))^2.$$

Замечание. *Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины обладают теми же свойствами, что и математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.*

Для непрерывной случайной величины X *среднее квадратическое отклонение* $\sigma(X)$ определяется, как и для дискретной случайной величины, формулой

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Пример. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2} \text{ при } 0<x\le 2,\\ 0 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

***Решение*.** Имеем

$$M(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\frac{4}{3},$$

$$D(X)=\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{16}{9}x\right)dx=$$

$$=\left.\left(\frac{1}{8}x^4-\frac{4}{9}x^3+\frac{4}{9}x^2\right)\right|_0^2=2-\frac{32}{9}+\frac{16}{9}=\frac{2}{9},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Примеры решения задач

1. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{9} \text{ при } 0<x\le 3,\\ 1 \text{ при } x>3.\end{cases}$$

Найдите: а) плотность распределения вероятностей $p(x)$; б) математическое ожидание $M(x)$; в) дисперсию $D(x)$; г) вероятность попадания случайной X на интервал [0; 1); д) постройте графики $p(x)$ и $F(x)$.

Решение: а) по определению $p(x) = F'(x)$, тогда

$$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{2x}{9} \text{ при } 0<x\le 3,\\ 0 \text{ при } x>3;\end{cases}$$

б) найдем математическое ожидание по формуле $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$,

$$M(X)=\int\limits_0^3 \frac{2x}{9}\cdot x dx=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x^2 dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^3=\frac{2}{9}\cdot\frac{3^3}{3}=\frac{2\cdot 27}{27}=2;$$

в) вычислим дисперсию: $D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2$, где

$$M(X^2)=\int\limits_0^3 \frac{2x}{9}\cdot x^2 dx=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x^3 dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^3=\frac{x^4}{18}\bigg|_0^3=\frac{3^4}{18}=\frac{9}{2}.$$

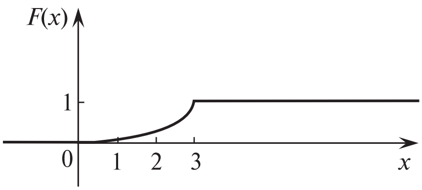
Тогда $D(X)=\frac{9}{2}-2^2=\frac{9}{2}-4=\frac{9-8}{2}=\frac{1}{2}=0{,}5;$

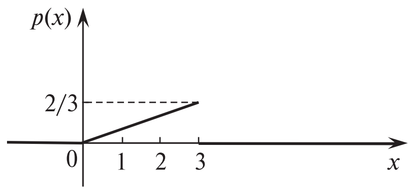
г) исходя из свойства функции распределения, имеем

$$P(\alpha\le x<\beta)=F(\beta)-F(\alpha),\ \text{тогда}$$

$$P(0\le x<1)=F(1)-F(0)=\frac{x^2}{9}\bigg|_{x=1}-\frac{x^2}{9}\bigg|_{x=0}=\frac{1}{9}=0{,}111;$$

д) строим графики функций $F(x)$ и $p(x)$:





2. Дана функция распределения непрерывной случайной величины

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ ax^2 \text{ при } 0<x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

Найдите коэффициент a.

Решение. Из непрерывности функции $F(x)$ следует, что

$$\lim_{x\to 2-0} F(x)=\lim_{x\to 2-0} ax^2=\lim_{x\to 2+0} F(x)=1,$$

таким образом,

$$a\cdot 2^2=1,\ a\cdot 4=1,\ a=\frac{1}{4},\ \text{тогда}\ F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4} \text{ при } 0<x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

3. Задана плотность распределения случайной величины X

$$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -1,\\ a(x+1) \text{ при } -1<x\le 2,\\ 0 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

Найдите коэффициент a.

Решение. Из свойства плотности распределения вероятностей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \text{ следует, что}$$

$$\int_{-1}^{2} a(x+1)dx=1;\ a\int_{-1}^{2}(x+1)dx=1;\ a\left(\int_{-1}^{2}xdx+\int_{-1}^{2}dx\right)=1;\ a\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{2}+x\bigg|_{-1}^{2}\right)=1;$$

$$a\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}+2+1\right)=1;\ a\left(\frac{3}{2}+3\right)=1;\ a\cdot\frac{9}{2}=1,\ a=\frac{2}{9}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4} \text{ при } 0<x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

Найдите плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

2. По данной функции распределения $F(x)$ случайной величины X найдите плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность попадания случайной величины X на интервал (0,5; 1,5) и постройте графики функций $F(x)$ и $p(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^3}{8} \text{ при } 0<x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ ax^2 \text{ при } 0\le x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>3.\end{cases}$$

Найдите коэффициент a, плотность распределения вероятностей $p(x)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок [1; 2].

4. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $p(x)$, причем

$$p(x)=\begin{cases}0,\ x\notin[0;3],\\ a(3x-x^2),\ x\in[0;3].\end{cases}$$

Найдите коэффициент a и вероятность попадания случайной величины X в промежуток (1; 2).

5. Определите параметры функции $p(x)=\begin{cases}0,\ x\notin[1;4],\\ ax^3+bx,\ x\in[1;4],\end{cases}$ чтобы она являлась плотностью непрерывной случайной величины с математическим ожиданием, равным 2.

6. Электропоезда в метро движутся с постоянными интервалами в 2 минуты:

а) найдите функцию распределения и плотность случайной величины X – времени ожидания поезда пассажиром. Постройте графики;

б) с помощью найденных функций найдите вероятность того, что пассажир будет ожидать поезд в пределах от 30 до 100 секунд.

4.6. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СОЦИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

4.6.1. Биномиальное распределение

Случайная величина X, которая принимает значение m с вероятностью $C_n^m p^m q^{n-m}$, где $m=0,1,2,\ldots,n;\ 0\le p\le 1,\ q=1-p,$ называется распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p.

Рассмотрим n независимых испытаний, в каждом из которых наступает либо событие A с вероятностью p, либо противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $q=1-p$. Пусть X – случайная величина, равная числу появлений события A в n испытаниях.

Понятно, что событие A может не наступить вообще, наступить один раз, два раза, ..., n раз. Следовательно, возможными значениями случайной величины X будут числа $0,1,2,\ldots,n$ (дискретная случайная величина с конечным числом значений). По формуле Бернулли можно найти вероятности этих значений:

$$P_n(0)=C_n^0 p^0 q^n=q^n,\quad P_n(1)=C_n^1 p^1 q^{n-1},$$
$$P_n(2)=C_n^2 p^2 q^{n-2},\ \ldots,\ P_n(n)=C_n^n p^n q^0=p^n.$$

Биномиальный закон распределения может быть представлен в следующем виде:

X	0	1	2	...	m	...	n
P	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Замечание. *Для случайной величины* X, *имеющей биномиальное распределение, имеем*

$$M(X) = np, \;\; D(X) = npq.$$

Пример. Проводится 3 независимых социологических испытания. При каждом испытании событие A появляется с одной и той же вероятностью $p = 0{,}6$. Записать в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа появлений события A при этих испытаниях.

Решение. Это биномиальное распределение, для которого закон распределения имеет следующий вид.

X	0	1	2	3
P	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Тогда

X	0	1	2	3
P	0,064	0,288	0,432	0,216

Контроль: $0{,}064 + 0{,}288 + 0{,}432 + 0{,}216 = 1$.

4.6.2. Распределение Пуассона

Рассмотрим n независимых испытаний, в каждом из которых наступает либо событие A с вероятностью p, либо противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $q = 1 - p$. Пусть X – случайная величина, равная числу появлений события A в n испытаниях. Если n является достаточно большим, а p – достаточно малым, причем $np = \lambda$, где λ – некоторое число ($\lambda > 0$), то

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \;\; m = 0, 1, \ldots$$

Говорят, что случайная величина X имеет *распределение Пуассона*, если ее закон распределения задается следующим образом:

X	0	1	...	k	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	...	$\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	...

Это дискретная случайная величина, характеризующая возможность появления редких событий.

Замечание. *Для случайной величины, распределенной по закону Пуассона, имеют место равенства* $M(X) = D(X) = \lambda$.

Таким образом, *необходимым условием* того, что случайная величина распределена по закону Пуассона, является равенство $M(X)$ и $D(X)$.

Пример. При введении вакцины против полиомиелита иммунитет создается в 99,99 % случаев. Какова вероятность того, что из 10 000 вакцинированных детей заболеет соответственно 1, 2, 3, 4 ребенка?

Решение. Вероятность заболеть $p = 0{,}0001$, число испытаний $n = 10\,000$, поэтому $\lambda = np = 1$. По формуле $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ находим

$$P(1) = \frac{1 \cdot e^{-1}}{1!} = 0{,}3679,$$

$$P(2) = \frac{1^2 \cdot e^{-1}}{2!} = \frac{1}{2} P(1) = 0{,}1839,$$

$$P(3) = \frac{1^3 \cdot e^{-1}}{3!} = \frac{1}{3} P(2) = 0{,}0613,$$

$$P(4) = \frac{1^4 \cdot e^{-1}}{4!} = \frac{1}{4} P(3) = 0{,}0153.$$

Пример. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью, равной 0,001. Какова вероятность того, что при 2000 испытаний событие A появится не менее 2 и не более 4 раз?

Решение. Из условия $n = 2000$, $p = 0{,}001$, $np = 0{,}001 \cdot 2000 = 2$, $2 \le k \le 4$. Тогда

$$P(2 \le k \le 4) = P_n(2) + P_n(3) + P_n(4) = \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} + \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} + \frac{2^4 \cdot e^{-2}}{4!} \approx 0{,}541.$$

4.6.3. Показательное распределение

Показательным (***экспоненциальным***) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \ge 0, \end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина.

Найдем функцию распределения вероятностей данной случайной величины. При $x < 0$ имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Если $x > 0$, тогда

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} p(t)dt + \int\limits_{0}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt =$$

$$= -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = -(e^{-\lambda x} - e^0) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Следовательно, функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$$

Замечание. *Числовые характеристики случайной величины, распределенной по показательному закону*:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda},\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Необходимым условием того, что случайная величина распределена по показательному закону, является равенство $M(X) = \sigma(X)$.

Пример. По показательному закону распределено время обслуживания, продолжительность ремонта, время простоя в очереди и др.

Замечание. *Вероятность попадания значений непрерывной случайной величины X в заданный интервал* $(\alpha; \beta)$, $\alpha \geq 0$ *может быть вычислена по формуле*

$$P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} p(x)dx = F(\beta) - F(\alpha) = e^{-\alpha\lambda} - e^{-\beta\lambda}.$$

Пример. Среднее время обслуживания покупателя 10 минут. Чему равна вероятность простоя в очереди от 10 до 20 минут?

Решение. По условию $M(X) = \frac{1}{\lambda} = 10,$ тогда $\frac{1}{\lambda} = 10.$ Если X — время обслуживания, то

$$P(10 \leq X \leq 20) = F(20) - F(10) = e^{-\frac{1}{10}\cdot 10} - e^{-\frac{1}{10}\cdot 20} = e^{-1} - e^{-2} \approx 0{,}2326.$$

Если T — непрерывная случайная величина, выражающая продолжительность времени безотказной работы какого-либо элемента, а λ — среднее число отказов в единицу времени, то продолжительность времени t безотказной работы этого элемента можно считать случайной величиной, распределенной по показательному закону с функцией распределения $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$, которая определяет вероятность отказа элемента за время t.

4.6.4. Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X называется ***равномерно распределенной*** с параметрами a и b, если плотность распределения этой случайной величины постоянна на отрезке $[a;\, b]$ и равна нулю вне этого отрезка.

Функция плотности распределения определяется равенством

$$p(x)=\begin{cases} c, \text{ если } a\le x\le b,\\ 0, \text{ если } x<a \text{ или } x>b.\end{cases}$$

Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=\int\limits_a^b cdx=c(b-a)=1,$ то $c=\dfrac{1}{b-a}.$

Следовательно, $p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{ если } a\le x\le b,\\ 0, \text{ если } x<a \text{ или } x>b.\end{cases}$

Вероятность попадания значений случайной величины X в интервал $(\alpha;\, \beta)$, принадлежащий отрезку $[a;\, b]$, пропорциональна длине этого интервала:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_\alpha^\beta p(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta \frac{dx}{b-a}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Непосредственно из определений находятся функция распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ при } a<x<b,\\ 1 \text{ при } x\ge b.\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример. Цена товара X может быть в равной степени любой в пределах от 15 до 25 тыс. у. е. Найдите $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. Случайная величина X распределена равномерно, следовательно,

$$M(X)=\frac{15+25}{2}=20,\ D(X)=\frac{(25-15)^2}{12}=\frac{100}{12}=8{,}33,\ \sigma(X)=\sqrt{8{,}33}\approx 2{,}89.$$

4.6.5. Нормальное распределение

В социологических исследованиях чаще всего ссылаются на нормальное распределение, которое играет важнейшую роль в применении численных методов в социологии. Нормальное распределение лежит в основе измерений, методов проверки гипотез.

Продолжительность жизни, возраст вступления в брак и появления первого ребенка и т. д. подчиняются строгой закономерности. Распределение частот встречаемости любого демографического (продолжительность жизни и пр.) или антропометрического (рост, вес и пр.) показателя, измеренного на большом количестве людей, имеет одну и ту же колоколообразную форму.

Нормальное распределение характеризуется тем, что крайние значения признака в нем встречаются довольно редко, а значения, близкие к средней величине, – довольно часто. И продолжительность жизни, и рост человека, и психологические особенности, например способности, – это случайные проявления, частота встречаемости которых подчинена закону нормального распределения.

Непрерывная случайная величина X называется ***распределенной по нормальному закону***, если плотность ее распределения определяется по формуле

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a и σ – параметры распределения, $\sigma>0$ (положительное действительное число), a – любое действительное число. Записывается это так: $\mathrm{N}(a, \sigma)$.

Рассмотрим вероятностный смысл параметров случайной величины X. Параметр a совпадает с математическим ожиданием случайной величины X: $a=M(X)$, а параметр σ является средним квадратическим отклонением случайной величины X: $\sigma=\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$

Нормальное распределение с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$ называется ***нормированным*** или ***стандартным***.

График плотности распределения вероятностей нормального распределения называют ***нормальной кривой*** или кривой Гаусса. Он симметричен относительно прямой $x=a$, имеет асимптоту – ось Ox и схематически изображен на рис. 4.7.

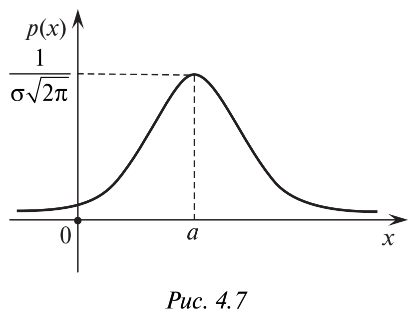


Рис. 4.7

На рис. 4.8 показаны нормальные кривые при различных σ.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X, рас-

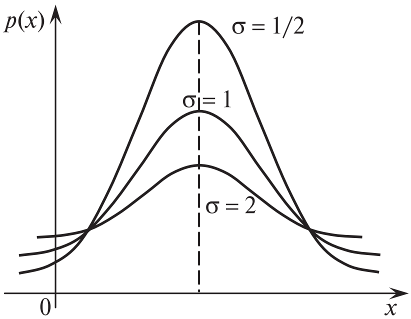


Рис. 4.8

пределенной по нормальному закону с параметрами распределения α и σ, на промежуток $(\alpha;\ \beta)$ определяется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – *функция Лапласа*, определяемая формулой

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt.$$

Свойства функции $\Phi(x)$ рассмотрены в п. 4.3.5, а ее значения приведены в приложении 2.

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше заданного положительного числа ε, находится по формуле

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Что же общего у всех нормальных кривых? Чтобы ответить на этот вопрос, положим в последнем равенстве $\varepsilon = 3\sigma$, тогда получим

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi(3) = 0{,}9973 \approx 1.$$

В социально-психологических исследованиях нормальное распределение используется в первую очередь при разработке и применении тестов интеллекта и способностей. Психометрические тесты общих и специальных умственных способностей часто дают приблизительно нормальное распределение оценок. Значения IQ интеллектуального теста распределены приблизительно нормально.

Пример. Спортсмен каждое утро взвешивается на напольных весах. Случайные ошибки измерения X веса подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 10 мг. Найдите вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, меньше 15 мг по абсолютной величине, если известно, что математическое ожидание случайных ошибок X равно нулю.

Решение. По формуле $P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$ находим

$$P(|X - 0| < 15) = 2\Phi\left(\frac{15}{10}\right) = 2\Phi(1{,}5).$$

По таблице приложения 2 находим $\Phi(1,5) = 0,4332.$ Тогда искомая вероятность

$$P(|X| < 15) = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664.$$

Примеры решения задач

1. Проверкой качества установлено, что из каждых 100 деталей не имеют дефектов 75 штук в среднем. Составить биномиальный закон распределения вероятностей числа пригодных деталей из взятых наугад 6 деталей.

Решение. Из условия задачи следует, что $p = 0,75,\ q = 1 - p = 0,25,\ n = 6.$ В соответствии с формулой Бернулли находим:

$$P(X = 0) = 1 \cdot (0,25)^6 \approx 0,0002;$$

$$P(X = 1) = 6 \cdot (0,75) \cdot (0,25)^5 \approx 0,0044;$$

$$P(X = 2) = 15 \cdot (0,75)^2 \cdot (0,25)^4 \approx 0,033;$$

$$P(X = 3) = 20 \cdot (0,75)^3 \cdot (0,25)^3 \approx 0,132;$$

$$P(X = 4) = 15 \cdot (0,75)^4 \cdot (0,25)^2 \approx 0,297;$$

$$P(X = 5) = 6 \cdot (0,75)^5 \cdot (0,25)^1 \approx 0,356;$$

$$P(X = 6) = 1 \cdot (0,75)^6 \approx 0,178.$$

Закон распределения данной случайной величины X – числа стандартных деталей из 6 взятых наудачу – запишем в следующем виде:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,0002	0,0044	0,033	0,132	0,297	0,356	0,178

Проверка: 0,0002 + 0,0044 + 0,033 + 0,132 + 0,297 + 0,356 + 0,178 = 1.

2. Телевизионный канал рекламирует новый вид детского питания. Вероятность того, что телезритель увидит рекламу, оценивается в 0,002. В случайном порядке выбраны 500 телезрителей. Найдите вероятность того, что рекламу увидят: а) ровно 3 телезрителя; б) менее 3 телезрителей.

Решение. По условию $p = 0,002,\ n = 500,\ k = 3.$ Найдем $\lambda = np = 500 \times$ $\times 0,002 = 1.$ Имеет место формула Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}:$$

а) найдем вероятность того, что рекламу увидят ровно 3 телезрителя:

$$P_{500}(3) = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0,0613;$$

б) найдем вероятность того, что рекламу увидят менее 3 телезрителей:

$$P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)=e^{-1}+e^{-1}+\frac{e^{-1}}{2}=\frac{5}{2}e^{-1}=\frac{5}{2e}\approx 0,9197.$$

3. Продолжительность жизни (в днях) растений данного вида в определенной среде представляет собой непрерывную случайную величину X, имеющую показательное распределение с параметром $\lambda=\frac{1}{140}$. Определить, какая доля растений данного вида погибает за период 100 дней.

Решение. Находим

$$P(0\le X\le 100)=\int_0^{100}\frac{1}{140}e^{-\frac{x}{140}}dx=-e^{-\frac{x}{140}}\Big|_0^{100}=1-e^{-\frac{5}{7}}\approx 0,51.$$

4. Известно, что температура водоема в течение месяца является равномерно распределенной случайной величиной на отрезке [6; 10]. Найдите среднюю температуру водоема в данном месяце.

Решение. Пусть X – температура водоема в течение месяца. Тогда ее среднее значение равно $M(X)=\frac{6+10}{2}=8.$

5. Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 30 у. е., и средним квадратическим отклонением, равным 10. Определить вероятность того, что в случайно выбранный день обслуживаемого периода цена за акцию была между 10 и 50 у. е.

Решение. Воспользуемся формулой $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$. По условию $\alpha=10, \beta=50, a=30, \sigma=10,$ тогда

$$P(10<X<50)=\Phi\left(\frac{50-30}{10}\right)-\Phi\left(\frac{10-30}{10}\right)=\Phi(2)+\Phi(2)=2\Phi(2).$$

По таблице приложения 2 находим $\Phi(2)=0,4772.$ Отсюда искомая вероятность

$$P(10<X<50)=2\cdot 0,4772=0,9544.$$

6. Вес тропического грейпфрута, выращенного в Краснодарском крае, – случайная величина, подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием 0,5 кг и средним квадратическим отклонением 0,09 кг. Установить: а) вероятность того, что наудачу взятый грейпфрут имеет вес в пределах от 0,4 до 0,7 кг; б) вероятность того, что вес наудачу взятого грейпфрута отличается от математического ожидания не более чем на 0,2 кг; в) в каких границах следует ожидать вес грейпфрута, чтобы вероятность не выйти за эти границы была равна 0,95.

Решение:

а) $P(0,4 < X < 0,7) = \Phi\left(\frac{0,7-0,5}{0,09}\right) - \Phi\left(\frac{0,4-0,5}{0,09}\right) = \Phi(2,22) + \Phi(1,11) =$

$= 0,4867 + 0,3664 = 0,8531;$

б) $P(|X-0,5| < 0,2) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{0,2}{0,09}\right) = 2\Phi(2,22) = 2\cdot 0,4867 = 0,9734;$

в) $P(|X-0,5| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,09}\right) = 0,95,$ тогда $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,09}\right) = \frac{0,95}{2} = 0,475.$

По таблице приложения 2 имеем $\frac{\varepsilon}{0,09} = 1,96,$ откуда $\varepsilon = 1,96\cdot 0,09 = = 0,1764$ (кг).

Значит, границы, в которых следует ожидать вес грейпфрута, чтобы вероятность не выйти за эти границы была равна 0,95, будут

$$(a-\varepsilon; a+\varepsilon) = (0,5-0,1764; 0,5+0,1764) = (0,3236; 0,6764).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Производится 9 независимых испытаний. При каждом испытании событие A появляется с одной и той же вероятностью $p = \frac{2}{3}$. Запишите в виде таблицы закон распределения случайной величины X — числа появлений события A при этих испытаниях.

2. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность того, что герб при этом выпадет ровно 4 раза?

3. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на 1 веретене в течение 1 мин равна 0,002. Найдите вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет не более чем на 3 веретенах.

4. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найдите вероятность следующих событий: а) «в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию»; б) «в течение часа не более 4 абонентов позвонят на станцию»; в) «в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию».

5. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с функцией плотности $p(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ 7e^{-7x} \text{ при } x > 0. \end{cases}$

Найдите вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X попадет в интервал (0,15; 0,6), математическое ожидание, дисперсию случайной величины X.

6. Найдите среднее квадратическое отклонение случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке [–2; 7].

7. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения – 5 мин. Найдите вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

8. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час 300 вызовов. Найдите вероятность того, что за данную минуту она получит ровно 2 вызова.

9. Среди семян имеется 0,4 % семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 500 семян обнаружить 5 семян сорняков?

10. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найдите вероятность того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно 3; б) менее 3; в) более 3; г) хотя бы одно.

11. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным 12,5. Вероятность попадания случайной величины X в интервал (10; 15) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания случайной величины X в интервал (35; 40)?

12. Среднее время обслуживания покупателя – 20 мин. Чему равна вероятность простоя в очереди от 20 до 40 мин?

13. Испытывают два независимо работающих электроприбора. Длительность работы первого элемента имеет показательное распределение с параметром 0,02, второго – 0,04. Найдите вероятность того, что за 50 ч оба элемента откажут.

14. Поезда данного маршрута городского трамвая идут с интервалом в 5 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через минуту после ухода предыдущего поезда, но не позднее чем за 2 мин до отхода следующего поезда?

15. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = 375$ г, $\sigma = 25$ г. Найдите вероятность того, что вес одной рыбы будет: а) от 300 до 425 г; б) не более 450 г; в) больше 300 г.

16. Нефтеразведывательная компания получила финансирование для проведения 6 нефтеразработок. Вероятность успешной нефтеразведки равна 0,5. Предположим, что нефтеразведку осуществляют независимые друг от друга разведывательные партии. Составьте закон распределения случайной величины X – числа успешных нефтеразведок. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое распределение вероятностей называется биноминальным?
2. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по биноминальному закону с параметрами n и p?
3. При каких условиях можно применять закон Пуассона? Каковы общие условия, необходимые для применения законов распределения Пуассона и биномиального распределения?

4. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона?

5. Как определяется показательное распределение случайной величины?

6. Напишите функцию распределения для показательного закона.

7. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей показательное распределение?

8. Как находится вероятность попадания в заданный интервал $(a; b)$ значений случайной величины X, имеющей показательное распределение?

9. Как определяется вероятность отказа элемента за время t?

10. Что такое функция надежности?

11. Какое распределение вероятности называют равномерным на отрезке $[a; b]$?

12. Какой вид имеет функция распределения $F(x)$ случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a; b]$?

13. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a; b]$?

14. Запишите плотность распределения $p(x)$ случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a; b]$.

15. Чему равны математическое ожидание и дисперсия нормальной случайной величины?

16. Как вычислить вероятность отклонения нормальной случайной величины от ее математического ожидания?

17. Сформулируйте правило трех сигм.

РАЗДЕЛ V

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СОЦИОЛОГИИ

5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Объекты социальных процессов представляют собой, как правило, элементы живой природы, что существенно отличает методы их изучения от методов, применяемых в естественных науках. Так, в частности, прямое взаимодействие исследователя с изучаемым объектом часто оказывается нежелательным, поскольку может привести и приводит к изменению характеристик этого объекта. Иногда размеры и масштабы социальных процессов делают такое взаимодействие просто невозможным. В результате этого приходится заменять исследуемый объект его моделью. Понятие *модели* является первичным и поэтому неопределяемым.

Существуют различные понимания модели.

Первый тип: модель – это такой образ, который разум делает более полным, более богатым, чем действительность.

Второй тип: модель схематически характеризует оригинал, замещая его, создавая его «рабочую гипотезу», которая после уточнения, углубления, проверки становится образом этого оригинала. Модель создается для удобства тех или иных операций, для имитации таких процессов, которые не могут быть непосредственно воспроизведены. В ней должны отражаться самые существенные свойства объекта, главные внутренние и внешние связи.

Моделирование – это построение модели, воспроизводящей особенности структуры, поведения, а также свойства оригинала, и последующее ее экспериментальное или мысленное исследование. В дальнейшем будем говорить исключительно о математических моделях, имея в виду, что нами будет использоваться язык математики.

Математическая модель – это приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики.

Научная ценность этих моделей состоит в том, что они позволяют понимать поведение системы лучше, чем если бы оно было изложено словами. Это объясняется тем, что математический язык обладает очень высокой степенью общности, так что у ученого, владеющего этим языком, появляется множество аналогий с уже известными ему ситуациями, описываемыми такими же уравнениями.

Изучение явления с помощью математической модели называется математическим моделированием. Анализируя богатый опыт моделирования, накопленный в социологии, нельзя не отметить, что его общая положительная сторона состоит в том, что эта наука стала отходить от описательности, выявлять регулярность и законы развития различных пространственных систем и их подсистем, а в еще большей степени структур. Математическое моделирование нанесло удар эмпиризму в социологической науке, направило социологию по пути поиска закономерностей (в том числе пространственных), по пути расчета, эксперимента, сравнения вариантов.

Широкое использование математики (в ее современном понимании) становится необходимым условием успешной разработки содержательных аспектов социологических теорий.

Существует два вида моделей:

1) *материальные*, которые конструируются из материальных элементов и функционируют по объективным законам природы. В этом случае изучаемый подлинный объект представлен моделью;

2) *идеальные* (*мысленные*) модели. Операции над ними конструируются в уме, и последующие действия носят мысленный характер и опираются на определенные логические средства, математический аппарат, специальные утверждения теории.

Практическими задачами математического моделирования являются:

- анализ социальных объектов и процессов;
- социологическое прогнозирование;
- социальное управление.

Типы математических моделей

Рассмотрим классификацию математических моделей. Единой системы классификации не существует. Мы выделим несколько основных признаков.

По общему целевому назначению математические модели делятся:

1) на *теоретико-аналитические*, которые используются при изучении общих свойств и закономерностей социологических явлений;

2) *прикладные*, которые использующиеся в решении конкретных социологических задач.

По типу информации различают модели:

1) *аналитические*, построенные на доопытной информации;

2) *идентифицируемые*, построенные на послеопытной информации.

По учету фактора времени:

1) *статические* (зависимости отнесены к одному моменту времени);

2) *динамические* (описывают социологическую систему во времени).

По фактору неопределенности:

1) *детерминированные* (результат на выходе однозначно определяется управляющими воздействиями);

2) *стохастические*, или вероятностные (на выходе могут получать различные результаты в зависимости от действия случайного фактора).

Этапы математического моделирования

Процесс моделирования включает в себя *три структурных элемента*: 1) объект исследования; 2) субъект (исследователя); 3) модель отношения между познающим субъектом и познаваемым объектом.

Рассмотрим общую схему процесса математического моделирования в социологии, состоящую из четырех этапов.

I этап – ***этап формализации***, перевод рассматриваемой задачи с естественного языка на язык математических терминов и обозначений. При этом осуществляется переход от реальной ситуации к математической модели.

Применение математики в социологии предполагает предварительную разработку социологического материала. Должны быть сформулированы цели и задачи исследования; уточнены исходные, промежуточные, итоговые понятия; выделены важнейшие черты и особенности связи исследуемого объекта с другими объектами.

Построение модели также имеет несколько стадий:

- определяется тип модели;
- изучаются возможности ее применения в данной задаче;
- уточняется перечень переменных и параметров.

Этот этап завершается записью в математических и социологических терминах текста. Это может быть как простая, так и сложная модель.

Так как модель отображает лишь некоторые существенные черты исходного объекта, то для одного объекта может быть построено несколько моделей, отражающих определенные стороны исследуемого объекта.

II этап – ***этап исследования построенной математической модели***. На этом этапе выбирается наиболее подходящий метод решения поставленной математической задачи. Исследование математических задач сводится к получению выходных данных для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений.

Конечным результатом является совокупность знаний о модели в отношении существенных сторон объекта-оригинала.

III этап – ***этап интерпретации***, т. е. анализ полученных результатов и объяснения их в терминах исходной задачи.

Здесь выясняется, удовлетворяет ли принятая модель критерию практики, проверяется, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели.

IV этап – ***этап анализа и проверки***, т. е.последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели. Осуществляется практическая проверка полученных с помощью модели знаний и построение обобщающей теории реального объекта.

Перечисленные этапы находятся в тесной взаимосвязи.

5.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В СОЦИОЛОГИИ

Сегодня математические методы широко используются в социологии, экономике, медицине, лингвистике. Делаются попытки их применения при изучении истории. В настоящее время можно выделить два основных направления применения математики: обработка больших объемов данных (массивов гипотез и собранных фактов, зачастую разрозненных) и математическое моделирование. Используемые в гуманитарных науках математические модели охватывают лишь небольшую часть задач, поэтому необходимы как модели, так и инструмент, позволяющий строить и анализировать их. Математические модели давно и успешно применяются в исследовании многих социальных процессов. Хорошо известна модель Ричардсона (гонки вооружений), вероятностные цепочки для описания процессов распределения ресурсов. В настоящее время широко применяются гендерные системы, модели социальных групп, социальных институтов, модели поведения отдельных индивидов и межличностных взаимодействий.

Наиболее широким классом математических моделей для описания процессов различной природы являются динамические системы. Поэтому и при описании процессов, изучаемых в социологии, мы тоже встречаемся с этими системами, как с дискретными, так и непрерывными. Разнообразие таких моделей велико: от линейных систем до сложных с большим количеством параметров. Хорошо известно, что даже системы с достаточно простыми функциями, задающими правые части, могут обладать весьма сложным поведением. Успешное исследование поведения любой такой модели основано на сочетании как аналитических, так и численных методов и построении качественных портретов при различных сочетаниях значений параметров.

Пример. Модель социальной диффузии. Диффузия – распространение черт, культуры (например, религиозных убеждений, технологических идей, форм языка и т. д.) или социальной практики одного общества (группы) другому.

Математическую модель социальной диффузии можно записать в следующем виде:

$$x_n = k_n(N_n - x_{n-1}) + x_{n-1},$$

где x_n – количество элементов на шаге n; n – порядковый номер шага; k_n – коэффициент на шаге n; N_n – размер генеральной совокупности на шаге n.

Пример. Модель социогенеза. Социогенез – процесс исторического и эволюционного формирования общества. В основе модели социогенеза лежит разделение общества на подсистемы по Т. Парсонсу: экономическая и политическая системы, социетальное сообщество – единый коллектив, подчиняющийся заданным нормам (обеспечивает единство общества), система поддержания институциональных этнических образцов.

В качестве управляющего параметра взят уровень пассионарного напряжения. По определению Л.Н. Гумилева «пассионарное напряжение» – пассионарность, приходящаяся на одного члена общества. Пассионарность – способность и стремление этнического сообщества к изменению окружения; уровень активности этнического сообщества. Внутренняя энергетика этноса является движущей силой культурного, политического и геополитического созидания.

Предполагается, что динамика системы описывается следующими составляющими: $G(t)$ моделирует развитие политической системы, $E(t)$ – экономической, $K(t)$ – социетального общества и $D(t)$ – системы поддержания институциональных этнических образцов. Основным управляющим параметром является пассионарное напряжение P.

Таким образом, рассматривается система

$$\begin{cases} \dfrac{dG}{dt} = a_{11}(P,u)G + a_{12}(u,E)E + a_{13}(P,u)(K+D)G, \\ \dfrac{dE}{dt} = a_{21}(P,u)E - a_{22}(u,G)G - a_{23}(P,u)(K+D)E, \\ \dfrac{dK}{dt} = a_{31}(u)(G^2+E^2) - a_{32}(P,u,K)K - a_{33}(u)D^2, \\ \dfrac{dD}{dt} = a_{41}(u)G^2 - a_{42}(P,u,D)D - a_{43}(u)K^2. \end{cases}$$

Пример. Модели включенности в малую дискуссионную группу. В моделях включенности в малую дискуссионную группу единицей анализа являются коммуникативные действия. Действие определяется как наименьший сегмент поведения. Он может быть отнесен к одной из 12 категорий, таких как «проявляет солидарность» (поднимает статус других, оказывает помощь, поощряет), «советует» (руководит, учитывает автономию других), «ориентирует» (рассказывает, вносит ясность, подтверждает), «не соглашается» (саботирует, проявляет педантизм, не помогает), а также ряда других. Все группы ранжируются по частоте их действий. Для большого числа групп одинакового размера n на основе опытных данных вычисляется $N_n(r)$ – частота действий индивида r-го ранга в группе размера n. Если бы $N(r)$ была близка к постоянной величине, то это бы означало «равенство» в количестве действий индивидов. Однако многочисленные исследования социальных психологов показывают, что в частоте действий индивидов наблюдаются значительные различия. В реальных группах действия распределены неравномерно среди их членов. Зависимость частоты действий индивида от его ранга имеет вид

$$N_n(r) = \frac{c_n}{r},$$

где c_n – эмпирический коэффициент для группы размера n. Эта зависимость в социальной психологии носит название «закон Ципфа».

Пример. Модель групповой продуктивности. Обыденная точка зрения на связь между научной продуктивностью и размером научной группы такова: чем меньше группа, тем меньше «бездельников», тем более группа продуктивна. По мнению большинства людей, уменьшение группы, ее дробление способствует большей продуктивности каждого члена группы. Однако многочисленные исследования социологов не подтверждают это мнение. Обыденное мнение верно «с точностью до наоборот». Увеличение научных групп способствует их большей продуктивности.

А. И. Яблонским была предложена следующая модель:

$$p(n) = p(1)e^{\alpha(n-1)},$$

где n – число индивидов в научном коллективе; $p(n)$ – его продуктивность; $p(1)$ – продуктивность при $n = 1$. В этой модели продуктивность группы измерялась отношением c/n, где c – число ссылок на работы организации, в которой работает данная группа. Вопреки традиционной точке зрения эта модель предсказывает, что продуктивность является возрастающей функцией размера группы.

Пример. Математическая модель конфликтной ситуации. Ни одно из многочисленных определений конфликта не является корректным. Дело в том, что рациональные действия часто позволяют избежать возникновения конфликта. Поэтому будем говорить только о конфликтной ситуации, понимая под этим наличие у взаимодействующих сторон несовпадающих интересов. Рассмотрим и формализуем основные элементы конфликтной ситуации.

1. Это прежде всего сами участники конфликтной ситуации, которых будем рассматривать как некоторое конечное множество N. При этом n – число участников конфликтной ситуации. С каждым участником можно сопоставить его номер, тогда множество N примет вид $N = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Заметим, что в качестве участников могут выступать не только отдельные индивиды, но также и команды, фракции, классы, государства и т. п.

2. Каждый из участников может осуществлять некоторые действия или выбирать определенную линию поведения, влияющие на течение и исход конфликтной ситуации. Обозначим через X_i множество стратегических возможностей отдельного участника и через $x_i \in X$ его стратегию, т. е. конкретный выбранный им способ действий. Если каждый из участников выберет свою стратегию, то будем говорить, что сложилась ситуация $x = (x_1; x_2; ... ; x_n)$, которая и определяет исход конфликтной ситуации, так как действия участников уже фиксированы.

3. Для качественной оценки последствий принятых решений введем множество исходов конфликтной ситуации I. Так как любой исход однозначно определяется ситуацией x, то в дальнейшем часто будем отождествлять множество исходов со всем множеством ситуаций $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

4. Естественно, что каждый из участников конфликтной ситуации оценивает тот или иной исход с точки зрения реализации своих интересов. Для формализации этого процесса введем функцию выигрыша для каждого из участников $H_i(x)$, определенную на множестве ситуаций. При этом будем считать, что каждый из участников стремится максимизировать свой выигрыш.

Пример. Моделирование социальных процессов с помощью графов. ***Граф*** – это множество точек, называемых ***вершинами***, и соединяющих их линий, которые называются ***ребрами***. Точнее говоря, любые две вершины могут либо соединяться, либо не соединяться ребром. Графы делятся на *ориентированные* и *неориентированные*. В ориентированном графе каждое ребро имеет направление (рис. 5.1), а в неориентированном – нет (рис. 5.2).

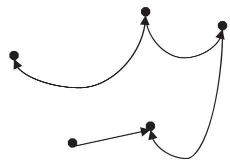


Рис. 5.1

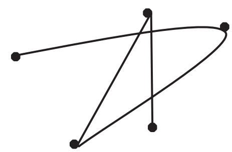


Рис. 5.2

Ребра ориентированного графа называются также ***дугами***. Таким образом, в неориентированном графе любые две вершины могут быть либо соединены, либо не соединены ребром. В ориентированном графе любые две вершины x, y могут быть не соединены, соединены дугой в одном направлении или соединены двумя дугами в обоих направлениях: от x к y и от y к x. Подчеркнем, что в графе важен лишь факт наличия ребра между теми или иными вершинами и направления ребер (в ориентированном графе). Форма ребер (прямые, кривые) роли не играет. Например, графы, изображенные на рис. 5.3, эквивалентны, т. е. представляют собой один граф.

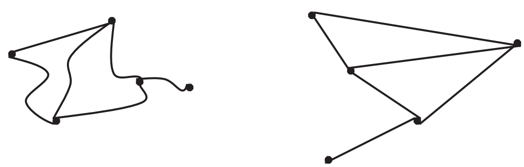


Рис. 5.3

Неориентированный граф называется *связным*, если из каждой вершины по ребрам можно добраться до любой другой вершины, и *несвязным* в противном случае. Таким образом, несвязный граф состоит из нескольких отдельных частей (рис. 5.4).

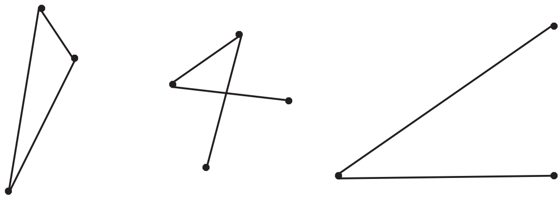


Рис. 5.4

Циклом в неориентированном графе называется замкнутый путь (контур) из ребер. Цикл называется *простым*, если каждая вершина в нем встречается один раз. Например, в графе, изображенном на рис. 5.5, цикл 1-5-2-1 простой, а цикл 1-5-6-3-5-2-1 – нет.

Древовидный граф (*дерево*) – это неориентированный связный граф без циклов. Если в дереве выделена одна вершина, то она называется *корнем*. Можно наглядно показать, что при выборе любой вершины в качестве корня древовидный граф можно изобразить так, что он будет напоминать обычное дерево или куст – в обычном положении или корнем вверх (рис. 5.6).

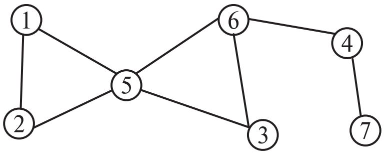


Рис. 5.5

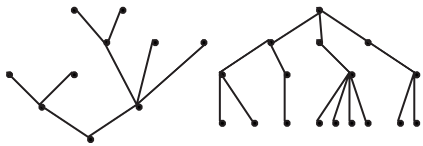


Рис. 5.6

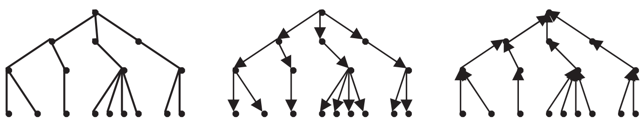


Рис. 5.7

Древовидный граф с корнем можно некоторым естественным способом превратить в ориентированный, а именно направить все ребра от корня либо наоборот (рис. 5.7).

Использование графов как наглядного способа описания социальных отношений

Рассмотрим некоторые применения графов. Неориентированные графы могут быть использованы для изображения симметричных (двусторонних) отношений между объектами, например отношения сотрудничества между людьми. Ориентированные графы удобны для изображения несимметричных (т. е. могущих быть односторонними) отношений, например любви, зависти, заботы, подчиненности.

Ориентированные графы могут быть использованы для изображения отношения порядка. Если $x > y$, то мы соединяем x и y ребром, идущим в направлении от x к y, а если x к y несравнимы, то ребра между ними нет. Таким образом, любые две вершины либо соединены ребром лишь в одном направлении, либо не соединены вовсе.

Древовидным графом может быть описана любая строго иерархическая система, например система административной подчиненности. Важная разновидность такой системы – иерархическая классификация. Например, разделим сельское население нашей страны по областям, затем – по районам, далее – по сельсоветам и, наконец, по деревням. Введем следующее расстояние $d(x, y)$ между сельскими жителями x и y. Положим это расстояние равным единице, если эти люди живут в одной деревне, двум – если они живут в разных деревнях одного сельсовета, трем – в разных сельсоветах одного района, четырем – в разных районах одной области и, наконец, пяти, если они проживают в разных областях.

Открытое задание
«УДИВИТЕЛЬНАЯ КРАСОТА ГРАФОВ»

Графы находят применение в социологии, антропологии, экономике, теории коммуникаций, социальной психологии и многих других сферах, где анализируются социальные сети. Элементы социальной структуры (люди, сообщества, группы) представляются в виде узлов графа, а отношения между ними (организационные, экономические зависимости, уровни принятия решений, коммуникации) – в виде ребер, соединяющих вершины графа.

- Приведите три примера использования графов в повседневной жизни.
- Представьте родословную своей семьи с помощью графа одним из двух способов. Дерево графа может быть нисходящим и изображать всех потомков одной супружеской пары или восходящим, на котором будут представлены все предки конкретного человека. Выбор способа обоснуйте.
- Вы хотите спланировать путешествие. Постройте граф, отображающий сроки, затраты, переезды. Что еще вы бы включили в данный граф?
- Изобразите в виде графа схему проезда от вашего дома к месту учебы.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое математическая модель?
2. Какие виды математических моделей Вы знаете?
3. Какие структурные элементы включаются в процесс моделирования?
4. Опишите каждый этап математического моделирования.
5. Дайте определение графа.
6. Что называется циклом в неориентированном графе?
7. Приведите примеры использования графов в социологических исследованиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Абчук, В. А. Экономико-математические методы / В. А. Абчук. – СПб. : Союз, 1999.

Агапов, Г. И. Задачник по теории вероятностей / Г. И. Агапов. – М. : Высш. шк., 1986.

Ахтямов, А. М. Математика для социологов и экономистов : учеб. пособие / А. М. Ахтямов. – М. : Физматлит, 2004.

Белько, И. В. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование : учеб. пособие для студентов учреждений высш. образования по экон. спец. / И. В. Белько, И. М. Морозова, Е. А. Криштапович. – Минск : Новое знание ; М. : ИНФРА-М, 2016.

Велько, О. А. Основы высшей математики. Учебная программа УВО для специальности 1-23 01 05 Социология [Электронный ресурс] / О. А. Велько, Н. А. Моисеева ; Белорус. гос. ун-т. – Минск, 2019. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/233274. – Дата доступа: 12.07.2019.

Гайшун, Л. Н. Теория вероятностей : учеб. пособие для студентов экон. спец. / Л. Н. Гайшун, Г. К. Игнатьева, О. А. Велько. – Минск : МИУ, 2002.

Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 7-е изд., доп. – М. : Высш. шк., 2003.

Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1997.

Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск : Выш. шк., 1984.

Гусак, А. А. Высшая математика / А. А. Гусак. Т. 2. – Минск : Университетское, 1998.

Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: теория вероятностей / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск : ТетраСистем, 1999.

Еровенко, В. А. Избранные главы курса «Основы высшей математики» для философов : метод. пособие для студентов-заочников / В. А. Еровенко, М. В. Мартон. – Минск : БГУ, 2009.

Еровенко, В. А. Основы высшей математики: типовая учебная программа для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» [Электронный ресурс] / В. А. Еровенко, М. В. Мартон, О. А. Велько. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/218164.

Еровенко, В. А. Основы высшей математики для филологов: методические замечания и примеры : курс лекций / В. А. Еровенко. – Минск : БГУ, 2006.

Индивидуальные задания по высшей математике: учебное пособие. В 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – 4-е изд. – Минск : Выш. шк., 2008. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Карасев, А. И. Курс высшей математики для экономических вузов / А. И. Карасев, З. М. Аксютина, Т. И. Савельева. – М. : Высш. шк., 1982. Ч. 2.

Лавров, И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. – М. : Физматлит, 2001.

Леонов, Н. Н. Математическая социология: структурно-аппроксимационный подход / Н. Н. Леонов. – Минск : ФУАинформ, 2002.

Малыхин, В. И. Математика в экономике / В. И. Малыхин. – М. : Инфра-М, 2001.

Малыхин, В. И. Социально-экономическая структура общества: Математическое моделирование : учеб. пособие для вузов / В. И. Малыхин. – М. : Юнити-Дана, 2003.

Матейко, О. М. Высшая математика для географов : учеб. пособие : в 2 ч. / О. М. Матейко, А. Н. Таныгина. – Минск : БГУ, 2012. – Ч. 1.

Матейко, О. М. Высшая математика для географов : учеб. пособие : в 2 ч. / О. М. Матейко, А. Н. Таныгина. – Минск : БГУ, 2013. – Ч. 2.

Математические методы в психологии / И. П. Мацкевич [и др.]. – 3-е изд. – Минск : МИУ, 2009.

Мацкевич, И. П. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид, Г. М. Булдык. – Минск : Выш. шк., 1996.

Ниворожкина, Л. И. Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов / Л. И. Ниворожкина, З. А. Морозова. – Ростов н/Д : Феникс, 1996.

Петров, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб.-метод. комплекс / В. А. Петров, Г. К. Игнатьева, О. А. Велько. – Минск : МИУ, 2007.

Путькина, Л. В. Информатика и математика для гуманитарных вузов : учеб. пособие / Л. В. Путькина, Т. Г. Пискунова, Т. Б. Антипова. – СПб. : СПбГУП, 2014.

Робертс, Ф. С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам / Ф. С. Робертс. – М. : Наука, 1986.

Руэ, Х. Мир математики: Искусство подсчета. Комбинаторика и перечисление. В 45 ч. Ч. 34 / Х. Руэ. Пер. с испан. – М. : Де Агостини, 2014.

Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Айрис-пресс, 2004.

Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике / под ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 1992.

Статистические методы в психологии : учеб.-метод. комплекс / И. П. Мацкевич [и др.]. – 2-е изд. – Минск : МИУ, 2012.

Суходольский, Г. В. Лекции по высшей математике для гуманитариев : учеб. пособие / Г. В. Суходольский. – Харьков : Гуманитар. Центр, 2001.

Теория вероятностей и математическая статистика : сб. задач / О. А. Велько [и др.] ; под общ. ред. И. П. Мацкевича. – Минск : МИУ, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	5637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3261	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3064	3011	2989-	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732-	2709-	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,054	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2. Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,19	0,0753	0,38	0,1480	0,57	0,2157	0,78	0,2823
0,01	0,0040	0,20	0,0793	0,39	0,1517	0,58	0,2190	0,79	0,2852
0,02	0,0080	0,21	0,0832	0,40	0,1554	0,59	0,2224	0,80	0,2881
0,03	0,0120	0,22	0,0871	0,41	0,1591	0,60	0,2257	0,81	0,2910
0,04	0,0160	0,23	0,0910	0,42	0,1628	0,61	0,2291	0,82	0,2939
0,05	0,0199	0,24	0,0948	0,43	0,1664	0,62	0,2324	0,83	0,2967
0,06	0,0239	0,25	0,0987	0,44	0,1700	0,63	0,2357	0,84	0,2995
0,07	0,0279	0,26	0,1026	0,45	0,1736	0,64	0,2389	0,85	0,3023
0,08	0,0319	0,27	0,1064	0,46	0,1772	0,65	0,2422	0,86	0,3051
0,09	0,0359	0,28	0,1103	0,47	0,1808	0,66	0,2454	0,87	0,3078
0,10	0,0398	0,29	0,1141	0,48	0,1844	0,67	0,2486	0,88	0,3106
0,11	0,0438	0,30	0,1179	0,49	0,1879	0,68	0,2517	0,89	0,3133
0,12	0,0478	0,31	0,1217	0,50	0,1915	0,69	0,2549	0,90	0,3159
0,13	0,0517	0,32	0,1255	0,51	0,1950	0,70	0,2580	0,91	0,3186
0,14	0,0557	0,33	0,1293	0,52	0,1985	0,71	0,2611	0,92	0,3212
0,15	0,0596	0,34	0,1331	0,53	0,2019	0,72	0,2642	0,93	0,3238
0,16	0,0636	0,35	0,1368	0,54	0,2054	0,73	0,2673	0,94	0,3264
0,17	0,0675	0,36	0,1406	0,55	0,2088	0,76	0,2764	0,95	0,3289
0,18	0,0714	0,37	0,1443	0,56	0,2123	0,77	0,2794	0,96	0,3315

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,97	0,3340	1,25	0,3944	1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934
0,98	0,3365	1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
0,99	0,3389	1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,00	0,3413	1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,01	0,3438	1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,02	0,3461	1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,03	0,3485	1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,04	0,3508	1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,05	0,3531	1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,06	0,3554	1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,07	0,3577	1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,08	0,3599	1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,09	0,3621	1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,10	0,3643	1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,06	0,3554	1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,07	0,3577	1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,08	0,3599	1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,09	0,3621	1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,10	0,3643	1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,11	0,3665	1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,12	0,3686	1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,13	0,3708	1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,14	0,3729	1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,15	0,3749	1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,16	0,3770	1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,17	0,3790	1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,18	0,3810	1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,19	0,3830	1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,20	0,3849	1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,21	0,3869	1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,49984
1,22	0,3883	1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0.49992
1,23	0,3907	1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,49996
1,24	0,3925	1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,49999
								5,00	0,49999

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Велько Оксана Александровна
Мартон Марина Владимировна
Моисеева Наталья Александровна

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СОЦИОЛОГОВ

Учебно-методическое пособие

Ответственный за выпуск *Е. А. Логвинович*
Художник обложки *Т. Ю. Таран*
Технический редактор *Л. В. Жаборовская*
Компьютерная верстка *С. Н. Егоровой*
Корректор *Н. А. Ракуть*

Подписано в печать 22.10.2020. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 17,67. Уч.-изд. л. 19,7. Тираж 100 экз. Заказ 6541.

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск.

Издательско-полиграфическое частное унитарное предприятие «Донарит».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/289 от 17.04.2014.
Ул. Октябрьская, 25, офис 2, 220030, г. Минск, Республика Беларусь.