Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

М. А. Глецевич, А. А. Егоров, Т. А. Чехменок

Системы линейных уравнений

Учебно-методическая разработка для студентов физического факультета и факультета радиофизики и компьютерных технологий

Минск
2020

УДК 512.664(075.8)
Г 538

Решение о депонировании вынес:
Совет физического факультета БГУ
протокол № 4 от 26.11.2020 г.

Авторы:

старший преподаватель кафедры высшей математики и математической физики БГУ Глецевич Марина Александровна;

доцент кафедры высшей математики и математической физики БГУ канд. физ.-мат. наук, доцент Егоров Андрей Александрович;

старший преподаватель кафедры высшей математики и математической физики БГУ Чехменок Татьяна Александровна.

Рецензенты:

доцент кафедры высшей математики и математической физики БГУ канд. физ.-мат. наук, доцент Филиппова Нелли Константиновна;

заведующий кафедрой физики и общеинженерных дисциплин Учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь», канд. техн. наук, доцент Иващенко Инга Анатольевна.

Глецевич, М. А. Системы линейных уравнений : учебно-методическая разработка для студентов физического факультета и факультета радиофизики и компьютерных технологий / М. А. Глецевич, А. А. Егоров, Т. А. Чехменок ; БГУ, Физический фак., Каф. высшей математики и математической физики. – Минск : БГУ, 2020. – 42 с. – Библиогр.: с. 42.

В данной разработке приведеныосновные теоретические сведения по теме «Системы линейных уравнений», являющейся одной из базовых в дисциплине «Аналитическая геометрия и линейная алгебра». В каждом из разделовданы примеры решения типовых задач, рассматриваемых на практических занятиях по данной дисциплине. Предложены задачи для самостоятельного решения, которые могут быть использованыв качестве индивидуальных заданийпо соответствующим темам.

Учебно-методическая разработка предназначена для студентов, обучающихся на физическом факультете и факультете радиофизики и компьютерных технологий БГУ.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. Системойm линейныхалгебраических уравнений сn неизвестными$x_1, x_2, \ldots, x_n$называется системауравнений вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \qquad (1)$$

где числа $a_{ij}, i = 1, m$, $j = 1, n$, называются***коэффициентамисистемы***, ачисла $b_1, b_2, \ldots, b_m$–***свободными членами***.

Если среди $b_1, b_2, \ldots, b_m$имеются отличные от нуля, то система (1) называется ***неоднородной***.Если свободные члены всех уравнений равны нулю, то система называется ***однородной***.

Определение 2. ***Решениемсистемы линейных уравнений (1)*** называется упорядоченный наборnчисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$,если при подстановке их вместо неизвестных каждое из уравнений системы (1) обращается в верное равенство.

Определение 3. Система уравнений (1) называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение.

Введем обозначения:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix}$$ –матрица системы,

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \ldots & & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{matrix}$$ –расширенная матрица системы,

$$B = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{matrix}$$ – вектор-столбец свободных членов,

$$X = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{matrix}$$ – вектор-столбец неизвестных.

Пусть $m = n$, то есть число уравнений системы равно числу неизвестных:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{gathered} \qquad (2)$$

В этом случае матрица системы (2) является квадратной, поэтому такие системы также называются ***квадратными***.

Определение 4. ***Матричными уравнениями***называются уравнения вида

$$AX = B,\ \ XA = B,\ \ AXB = C,$$

где A, B, C – заданные матрицы, X–искомая матрица таких размеров, что возможны все операции умножения, используемые в уравнениях, и с обеих сторон от знака равенства находятся матрицы одинаковых размеров. ***Решениемматричного уравнения*** называется матрицаX, которая при подстановкев уравнение обращает его в верное матричное равенство.

Если в матричных уравнениях$AX = B$, $XA = B$матрицаAквадратная невырожденная, а в уравнении $AXB = C$ матрицы A, B, C квадратные, причем A, B– невырожденные, тогда:

матричное уравнение	решение матричного уравнения
$AX = B$	$X = A^{-1}B$
$XA = B$	$X = BA^{-1}$
$AXB = C$	$X = A^{-1}CB^{-1}$

ЗдесьA^{-1}, B^{-1} – матрицы, обратные к матрицам A, B соответственно.

Пример 1. Решить матричное уравнение

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} X \begin{matrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}.$$

ΔРешением данного матричного уравнения является матрица

$$X = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}^{-1} \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{matrix}^{-1}.$$

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ нахождение обратной сводится к тому, что элементы, стоящие на главной диагонали, меняются местами, у элементов на побочной диагонали меняется знак на противоположный, и полученная матрица умножается на $\frac{1}{\det A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Находим обратные матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

Лемма 1. *Если A – матрица системы (1), B – столбец ее свободных членов, то система линейных уравнений (1) равносильна матричному уравнению*

$$AX = B, \qquad (3)$$

т.е. если столбец $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$ *– решение матричного уравнения (3), то упорядоченный набор* $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ *– решение системы (1) и наоборот.*

Уравнение (3) называется ***матричной формой записисистемы (1)***.

§ 2. ПРАВИЛО КРАМЕРА

Теорема 1 (правило Крамера).*Если в квадратной системе линейных уравнений(2) определитель*Δ*матрицы Aотличен от нуля, тосистема имеет единственное решение, которое можно вычислить по формулам Крамера*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}, \qquad (4)$$

где определитель $\Delta_j, j = \overline{1, n}$, *получен из* Δ *заменой* j*-го столбца на столбец свободных членов.*

Теорема 2. *Если в квадратной системе линейных уравнений (2)определитель*Δ*матрицы A отличен от нуля, то существует единственное решение матричного уравнения (3), определяемое формулой*

$$X = A^{-1}B. \qquad (5)$$

Способ нахождения решения системы с помощью формулы (5) называется ***матричным методом***.

Пример 2. Решить систему уравнений:а) по правилу Крамера; б) матричным методом:

$$\begin{aligned} 3x + 7y &= -1, \\ -x + 8y &= -10. \end{aligned}$$

Δа)Вычислим:$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 31$;$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -10 & 8 \end{vmatrix} = 62$;

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} = -31$. Следовательно,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{62}{31} = 2; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-31}{31} = -1.$$

б) Поскольку$\Delta = \det A = 31 \neq 0$, то существует матрица A^{-1}, обратная к матрице A. Следовательно,

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 62 \\ -31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x = 2; y = -1$.▲

Пример 3. Решить систему уравнений: а) по правилу Крамера; б) матричным методом:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Δа) Вычислимопределители третьего порядка по ***правилу треугольников***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{33}a_{12} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

или разложив по i-ой строке, или j-му столбцу.

Таким образом, имеем

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-1) + 5\cdot 5\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)\cdot 3 - \left(-1\cdot 1\cdot(-1) + 5\cdot 3\cdot(-1) + 1\cdot 5\cdot(-1)\right) = 48.$$

Разложим определитель Δ_1 по первому столбцу, Δ_2 – по второму столбцу, Δ_3 – по третьему:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 8;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5\cdot\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 48;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 88.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{48}{48} = 1; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{88}{48} = \frac{11}{6}.$$

б) Поскольку $\Delta = \det A = 48 \neq 0$, то существует матрица A^{-1},обратная к матрице A, причем $A^{-1} = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$, A_{ji} – алгебраическое дополнение элементаa_{ji}. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 6 & 0 & 6 \\ 26 & -8 & -14 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 13 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

С помощью формулы (5) находим решение исходной системы

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{24}\begin{matrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 13 & -4 & -7 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} = \frac{1}{24}\begin{matrix} 4 \\ 48 \\ 44 \end{matrix} = \begin{matrix} 1/6 \\ 1 \\ 11/6 \end{matrix}.$$

Следовательно, $x_1 = \frac{1}{6}$;$x_2 = 1$; $x_3 = \frac{11}{6}$.▲

Пример 4. Решить систему уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2. \end{matrix}$$

Δa) Вычислим определители четвертого порядка:

$$\Delta = \det A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{matrix}.$$

Обозначим I_1, I_2, I_3,…–номера строкпервой, J_1, J_2, J_3,…–номера столбцов.Тогда если кI_k-ой строке прибавляем I_l-ую, умноженную на m, то на месте I_k-ой строки будем писать строку$I_k + m \cdot I_l$; если к J_k-ому столбцу прибавляем J_l-ый, умноженный на m, тона месте J_k-ого столбца будем писать столбец$J_k + m \cdot J_l$.

Таким образом, имеем

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{matrix} = I_2 + \ -3 \ \cdot I_1; I_4 + 1 \cdot I_1 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{matrix}.$$

Разложим полученный определитель по первому столбцу.Тогда

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{matrix} = \begin{matrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{matrix} = J_1 + \ -1 \ \cdot J_2 = \begin{matrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{matrix} =$$

$$= \ -1 \ \cdot \begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{matrix} = 3.$$

$$\Delta_1 = \begin{matrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{matrix} = I_3 + \ -1 \ \cdot I; I_4 + \ -2 \ \cdot I = \begin{matrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = J_2 + 1 \cdot J_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$=2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = J_2 + 1 \cdot J_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = J_2 + 1 \cdot J_4; J_3 + 1 \cdot J_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку второй и третий столбцы пропорциональны.

Следовательно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2;$ $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1,$ $x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0.$ ▲

Вывод. Правило Крамера основано на вычислении определителей. Если число уравнений в системе велико, то для нахождения ее решения целесообразно использовать другие методы, поскольку при увеличении числа уравнений в системевозрастает порядок определителей.

§ 3.РАНГ МАТРИЦЫ

Определение 5. ***Рангом матрицы*** называется наибольший из порядков отличных от нуля ее миноров.

Ранг нулевой матрицы принимается равным нулю. Ранг матрицы обозначается $rang\ A$.

Замечание. Если все миноры k-го порядка матрицы A равны нулю, то все ее миноры $(k+1)$-го порядка равны нулю. Таким образом,равенство$rang\ A = r$ означает, что у матрицыAесть отличный от нуля минорr-го порядка, а все ее миноры $r+1$ -гопорядка равны нулю.

Определение 6. ***Элементарными преобразованиями матрицы***называются:

а) перестановка строк (столбцов);

б) умножение какой-либо строки (столбца) на число, отличное от нуля;

в) прибавление к какой-либо строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на число.

Теорема 3. *Элементарные преобразованияне изменяют ранг матрицы.*

Свойства ранга матрицы.

1. $rang\ A_{m\times n} \leq min\ m; n$. Другими словами, ранг матрицы не превосходит ни количества ее строк, ни количества столбцов.
2. $rang\ A = 0$тогда и только тогда, когда $A = 0$.
3. $rang\ A^T = rang\ A$, т.е. транспонирование не меняет ранга матрицы.
4. Если у матрицы вычеркнуть строку (столбец), целиком состоящую из нулей, то ранг матрицы не изменится.
5. Если в матрице вычеркнуть одну из двух пропорциональных строк (столбцов), то ранг матрицы не изменится.
6. Ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей. Если один из сомножителей – невырожденная матрица, то ранг произведения двух матриц равен рангу второго сомножителя.

Определение 7. Матрица $A_{m\times n}$называется ***ступенчатой***, если она удовлетворяет двум условиям:

1. нулевые строки, если они есть, расположены ниже всех ненулевых строк;
2. номера первых слева отличных от нуля элементов ненулевых строк образуют строго возрастающую последовательность, т.е. если a_{1k_1}, a_{2k_2},..., a_{rk_r} – первые слева отличные от нуля элементы ненулевых строк матрицы A, то $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

Примеры ступенчатых матриц:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 20 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 00 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 00 & 0 & 0 \end{matrix}; \qquad \begin{matrix} 5 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{matrix}.$$

Для сравнения

$$A = \begin{matrix} 2 & -2 & 0\,1 & 9 \\ 0 & 0 & 0\,7 & 9 \\ 0 & -5 & 010 & 6 \end{matrix}$$

не является ступенчатой, поскольку нарушено второе условие в определении ступенчатой матрицы. Первые слева ненулевые элементы $a_{24} = 7$и$a_{32} = -5$ имеют номера столбцов $k_2 = 4,\ k_3 = 2$. Следовательно, не выполняется условие$k_2 < k_3$.

Матрица $A_{m\times n}$ называется***трапециевидной***, если $a_{ij} = 0,\ \ i > j$, и существует число r такое, что $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, \dots, r$, а все строки, начиная с $(r + 1)$-й, являются нулевыми.

Теорема 4. *Любая ненулевая матрица с помощью элементарных преобразований приводитсяк трапециевидной.*

Теорема 5. *Ранг трапециевидной матрицы равен числу ее ненулевых строк.*

Пример 5. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{matrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & -5 \end{matrix}.$$

ΔПервая и третья строки пропорциональны, поэтому одну из них, например, первую, можно вычеркнуть. Согласно свойству 5, ранг матрицы при этом не изменится:

$$rang \begin{matrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & -5 \end{matrix} = rang \begin{matrix} 2 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & -5 \end{matrix} = rang \begin{matrix} 0 & 0 & 10 \\ 1 & -3 & -5 \end{matrix} = 2. \blacktriangle$$

Пример 6. Найти ранг матрицы, используя метод элементарных преобразований:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & -11 & 16 \\ 4 & 12 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Δ

$$rang \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & -11 & 16 \\ 4 & 12 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} = [I_3 + \;\; -1 \;\; \cdot I_1;\; I_4 + \;\; -1 \;\; \cdot I_1;\; I_5 + \;\; -4 \;\; \cdot I_1] =$$

$$= rang \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & -15 & 21 & -27 \end{bmatrix} = [I_4 + 1 \cdot I_3; I_5 + \;\; -5 \;\; \cdot I_3] =$$

$$= rang \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Переставим второй и четвертый столбцы и прибавим к третьей строке вторую, умноженную на (-1):

$$rangA = rang \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3,$$

поскольку матрица A_1 является трапециевидной. Количество ее ненулевых строк равно 3.▲

§ 4. ТЕОРЕМА О БАЗИСНОМ МИНОРЕ. КРИТЕРИЙ СОВМЕСТНОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение 8. Строки матрицы

$$A^1,\ A^2, \dots ,\ A^k \qquad (6)$$

называются ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots ,\ \lambda_k$, не все равные нулю, такие, что

$$\lambda_1 A^1 + \lambda_2 A^2 + \dots + \lambda_k A^k = 0. \qquad (7)$$

Строки (6) называются ***линейно независимыми***,если равенство (7) выполняется только в том случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Пусть A – некоторая матрица. Выделим в ней k строк и k столбцов. Элементы, расположенные на пересечениях выделенных строк и столбцов, образуют определитель k-го порядка, который называется ***минором k-го порядка*** матрицы A и обозначается

$$M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k},$$

где $i_1, i_2, \dots, i_k$– номера выделенных строк, $j_1, j_2, \dots, j_k$ – номера выделенных столбцов.

Определение 9. ***Базисным минором матрицы***называется любой ненулевой минор этой матрицы, порядок которого равен ее рангу.

Строки (столбцы) матрицы, проходящие через базисный минор, называются ***базисными***.

Теорема 6 (о базисном миноре).*Справедливы утверждения:*

1. *Базисные строки (столбцы) линейно независимы.*
2. *Каждая из небазисных строк (столбцов) может быть представлена в виде линейной комбинации базисных.*

Теорема 7 (о линейной независимости строк и столбцов). *Для того чтобы строки (столбцы) были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы равнялся количеству строк (столбцов).*

Следствия.

1. *Для того чтобы строки (столбцы) матрицы были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы ее ранг был меньше количества строк (столбцов).*
2. *Для того чтобы строки (столбцы) определителя были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы он был отличен от нуля.*
3. *Для того чтобы строки (столбцы) определителя были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы он был равен нулю.*

Теорема 8 (Кронекера–Капелли, критерий совместности системы линейных уравнений). *Для того чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы равнялся рангу расширенной матрицы, т.е.* $rang\ A = rang\ A$.

Пример 7. Установить, какие условия должны выполняться, чтобы n различных плоскостей $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0,\ \ i = 1, n,\ \ n \geq 3$, проходиличерез: а) одну точку; б) одну прямую.

Δ Рассмотрим уравнения плоскостей как систему линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{matrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z = -d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = -d_2, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_n x + b_n y + c_n z = -d_n. \end{matrix} \qquad (8)$$

Выпишем матрицу A и расширенную матрицу A системы (8):

$$A = \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ & \dots & \\ a_n & b_n & c_n \end{matrix},\quad A = \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \\ & \dots & & \dots \\ a_n & b_n & c_n & -d_n \end{matrix}.$$

Требование а) эквивалентно существованию единственного решения системы (8). В соответствии с критерием Кронекера-Капелли имеем $rang\ A = rang\ A = 3$. Это соотношение и будет условием прохождения n плоскостей через одну точку.

Требование б) равносильно тому, что система (8) имеет бесконечное множество решений, а значит, $rang\ A = rang\ A < 3$. Тогда согласно теореме о базисном миноре матрицы A по крайней мере $n-2$ строки (для определенности – с третьей по последнюю) линейно зависимы. Вычеркивая эти строки (элементарными преобразованиями их можно сделать нулевыми), приходим к трапециевидной матрице

$$A \to A_1 = \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \end{matrix},$$

которой соответствует система уравнений

$$\begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2. \end{matrix}$$

Каждое из уравнений этой системы представляет собой общее уравнение плоскости. Как известно, две плоскости пересекаются тогда и только тогда, когда коэффициенты a_1, b_1, c_1 не пропорциональны коэффициентам a_2, b_2, c_2. Из этого утверждения вытекает, что хотя бы один из миноров второго порядка матрицы A_1 отличен от нуля, т.е. $rang\, A = rang\, A = 2$. Последнее равенство является искомым условием прохождения n плоскостей через одну прямую. ▲

Справедливы следующие выводы относительно системы линейных уравнений (1):

1. *если* $rang\, A \neq rang\, A$, *то неоднородная система (1) несовместна;*
2. *если* $rang\, A = rang\, A = n$, *где* n *– число неизвестных, то неоднородная система (1) имеет единственное решение;*
3. *если* $rang\, A = rang\, A < n$, *где* n *– число неизвестных, то неоднородная система (1) имеет бесконечное множество решений.*

В примере 3 $rang\, A = rang\, A = 3$ (в качестве минора, определяющего ранг матрицыA (базисного минора), можно взять определитель матрицы A). Поскольку $rang\, A = rang\, A$, то система совместна. Число неизвестных в системе три, и оно совпадает с рангом матрицы A. Следовательно, система имеет единственное решение. Мы его уже получили с помощью правила Крамера.

Пусть ранг матрицы системы линейных уравнений равен r. ***Базиснымineизвестными***называются неизвестныеx_1, x_2,…, x_r, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Остальные неизвестные системы называются ***свободными неизвестными***.

Множество всех решений системы линейных уравнений, выраженное через свободные неизвестные, называется ***общим решением***. Решение, полученное при фиксированных значениях свободных неизвестных, называется ***частным решением*** системы.

Пример 8. Исследовать на совместность и найти общее решение системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 &= -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 &= 0, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 &= 3. \end{aligned}$$

ΔЗапишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{matrix} \sim [I_2 + \ -1 \ \cdot I_1;\ I_2 + \ -1 \ \cdot I_1] \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \end{matrix} \sim$$

$$\sim [I_3 + \ -2 \ \cdot I_2] \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

Поскольку $rang\ A = rang\ A = 2$, то базисных неизвестных будет два, а свободных также два (4-2=2). В нашем случае базисными являются x_1 и x_2:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_4 - 3, \\ x_1 &= -2x_2 - x_3 + 6x_4 - 3 = 3 - x_3 + 2x_4, \end{aligned} \qquad \text{где } x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$3 - x_3 + 2x_4;\ 2x_4 - 3;\ x_3;\ x_4 \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}\ .\blacktriangle$$

§ 5. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим однородную систему линейных:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

В этом случае уравнение

$$AX = 0 \tag{10}$$

представляет собой матричную форму записи системы (9).

Однородная система всегда совместна, поскольку она имеет, по крайней мере, решение $x_i = 0,\ i = 1, n$, которое называется ***тривиальным***.

Пусть $rang\ A_{m\times n} = r$. Не ограничивая общности, будем считать, что базисный минор расположен в верхнем левом углу (если это не так, то можно поменять местами уравнения, перенумеровать неизвестные). По теореме о базисном миноре последние$m - r$ строк являются линейными комбинациями первых r базисных строк.

Тогда $m - r$ уравнений можно отбросить как линейно зависимые. Неизвестные, коэффициенты прикоторых образуют базисный минор, являютсябазисными неизвестными, а остальные – свободными. Базисные неизвестные оставим в левой части уравнений, а свободные перенесем в правую часть.В результате исходная система преобразуется к равносильной системе

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n, \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n. \end{gathered} \tag{11}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $r = n$. В этом случае в системе (11) количество неизвестных совпадает с количеством уравнений. Определитель матрицы системы отличен от нуля, поскольку совпадает с базисным минором. Следовательно, по правилу Крамера система (10) имеет единственное решение и оно тривиальное.
2. Пусть $r < n$.Придавая свободным неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$произвольные значения $c_{r+1},\ c_{r+2}, \dots$, c_n,получим

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}c_{r+1} - \cdots - a_{1n}c_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}c_{r+1} - \cdots - a_{2n}c_n, \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}c_{r+1} - \cdots - a_{rn}c_n. \end{gathered} \tag{12}$$

Система (12) является квадратной и по правилу Крамера эта система имеет единственное решение $c_1,\ c_2, \dots,\ c_r$. Тогда упорядоченный набор $c_1,\ c_2, \dots,\ c_r, c_{r+1}, c_{r+2}, \dots,\ c_n$ является решением системы (11), а, следовательно, и равносильной ей исходной системы.

Поскольку свободным неизвестным можно придатьпроизвольные значения бесчисленным числом способов, то при$r < n$ однородная система имеет бесконечное множество решений.

Множество всех решений системы линейных уравнений (9), выраженное через параметры (свободные неизвестные), представляет собой***общее решение однородной системы***.

Чтобы найти какое-либо частное решение, следует в общем решении придать свободным неизвестным какие-то конкретные значения.

Пример 9.Найти общее и какое-либо частное решения системы:

$$
\begin{gathered}
2x - 4y + z = 0, \\
5x + y - z = 0, \\
-4x + 8y - 2z = 0.
\end{gathered}
$$

Δ Запишем матрицу системы

$$
\begin{matrix} 2 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ -4 & 8 & -2 \end{matrix}.
$$

В данной матрице первая и третья строки пропорциональны. Поэтому одну из них, например, третью, вычеркнем. Таким образом, получим

$\begin{matrix} 2 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{matrix} \sim I_2 + I_1 \sim \begin{matrix} 2 & -4 & 1 \\ 7 & -3 & 0 \end{matrix}$. Из последней строки следует, что $x_1 = \frac{3x_2}{7}$. Тогда, подставив полученное выражение в первое уравнение, имеем $x_3 = \frac{22x_2}{7}$.

Следовательно, общее решение исходной системы имеет вид:

$$
\frac{3x_2}{7};\ x_2;\ \frac{22x_2}{7} \quad x_2 \in \mathbb{R}\ .
$$

Для нахождения частного решения положим $x_2 = 7$. Тогда частное решение исходной однородной системы $3; 7; 22$.▲

Определение 10. Любая система из $n - r$ линейно независимых решений системы (9) называется ***фундаментальной системой решений однородной системы (9)***.

Свойства решений однородной системы.

1. *Сумма решений однородной системы также является решением этой системы.*
2. *Если решение однородной системы умножить на некоторое число, то также получим ее решение.*
3. *Если* $rang\, A = r < n$, *то во множестве всех решений однородной системы существуетфундаментальная система решений, состоящая из* $n - r$ *решений.*
4. *Любое решение однородной системы представимо в виде линейной комбинации решений ее фундаментальной системы.*

Для того чтобы построить фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений, следует в общем ее решении придать значения свободным неизвестным по столбцам единичной (или любой невырожденной) матрицы и найти соответствующие значения базисных неизвестных.

Замечание. Пусть A – квадратная матрица. Для того чтобы однородная система $AX = 0$ имела нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы $\det A = 0$.

Пример 10.Записать фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений, если ее общее решение выглядит следующим образом:

$$x_1; 2x_1 - 3x_2 + 4x_4; x_3; x_4; x_3 - 4x_4; x_1 - x_3 + 3x_4 \quad x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \ .$$

ΔФундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений при данном общем решении содержит три решенияX_1, X_2,X_3, поскольку$n - r = 6 - 3 = 3$. Для нахожденияX_1придадим следующие значения свободным неизвестным:$x_1 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$. Тогда $X_1 = (1; 2; 0; 0; 0; 1)$.

Для нахожденияX_2придадим следующие значения свободным неизвестным:$x_3 = 1$, $x_1 = x_4 = 0$. Тогда $X_2 = (0; -3; 1; 0; 1; -1)$.

Для нахожденияX_3придадим следующие значения свободным неизвестным:$x_4 = 1$, $x_1 = x_3 = 0$. Тогда $X_3 = (0; 4; 0; 1; -4; 3)$.▲

Пример 11. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 = 0,\\
2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0,\\
-2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0.
\end{aligned}
$$

Δ Матрица системы имеет вид:

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim [I_2 + (-2) \cdot I_1;\ I_3 + 2 \cdot I_1] \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim [I_3 + 1 \cdot I_2] \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

В данном случае $rang\, A = 3$. Следовательно, фундаментальная система решений однородной системы содержит $6 - 3 = 3$ решения X_1, X_2, X_3. Запишем общее решение системы:

$$
(14x_4 - 4x_5 + x_6;\, 11x_4 - 3x_5;\ -2x_4 + x_6;\ x_4;\ x_5;\ x_6)\quad x_4;\ x_5;\ x_6 \in \mathbb{R}\ .
$$

Для нахождения X_1 придадим следующие значения свободным неизвестным: $x_4 = 1$, $x_5 = x_6 = 0$. Тогда $X_1 = (14; 11; -2; 1; 0; 0)$.

Для нахождения X_2 придадим следующие значения свободным неизвестным: $x_5 = 1$, $x_4 = x_6 = 0$. Тогда $X_2 = (-4; -3; 0; 0; 1; 0)$.

Для нахождения X_3 придадим следующие значения свободным неизвестным: $x_6 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$. Тогда $X_3 = (1; 0; 1; 0; 0; 1)$. ▲

Пример 12. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы

$$
\begin{aligned}
2x + 4y = 0,\\
-3x + y = 0.
\end{aligned}
$$

Δ Поскольку определитель матрицы системы $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 14$, отличен от нуля, то исходная система имеет единственное решение $x = y = 0$. Следовательно, фундаментальной системы решений не существует. ▲

§ 6. НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Наряду с неоднородной системой линейных уравнений

$$
AX = B \qquad (13)
$$

рассмотрим однородную систему

$$AX = 0 \qquad (14)$$

с той же матрицей. Система (14) называется ***союзной к системе (13)***.

Свойства решений неоднородной системы линейных уравнений.

1. *Разность двух решений неоднородной системы является решением союзной с ней однородной системы, т.е. если X_1 иX_2 – решения системы (13), то $X_1 - X_2$ – решение системы (14).*
2. *Сумма решения неоднородной системы и решения союзной с ней однородной системы есть решение исходной неоднородной системы.*
3. *Если система (13) имеет решение X_*, то для любого ее решения X существует X_0 – решение союзной однородной системы такое, что*

$$X = X_* + X_0. \qquad (15)$$

Вывод. Из равенства (15) следует, что если система (13) имеет решения, то между множеством ее решений и множеством решений союзной к ней однородной системы устанавливается взаимнооднозначное соответствие.

Таким образом, если неоднородная система линейных уравнений имеет решения, то она имеет их столько, сколько их имеет союзная к ней однородная система. Если $rang\ A \neq rang\ A$, то неоднородная система (13) не имеет решений. Если $rangA = rang\,\tilde{A} = n,$ то неоднородная система (13) имеет единственное решение. Если $rangA = rang\,\tilde{A} < n,$ то неоднородная система (13) имеет бесконечное множество решений. Из равенства (15) следует, что общее решение неоднородной системы есть сумма ее некоторого частного решения и общего решения союзной к ней однородной системы.

Пример 13. Исследуйте на совместность систему линейных уравнений. Если система совместна, найдите ее общее и какое-либо частное решение. Сделайте проверку частного решения.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = -1. \end{cases}$$

ΔЗапишем матрицу системы

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 7 & -1 \end{array}\right] \sim [I_1 + \;\; -1 \;\; \cdot I_2] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 7 & -1 \end{array}\right].$$

Поскольку первая и четвертая строки совпадают, то последнюю строку можно вычеркнуть. Тогда получим матрицу:

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 & -3 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{matrix} \sim [I_2 + \;\; -2 \;\; \cdot I_1;\ I_3 + \;\; -1 \;\; \cdot I_1] \sim$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 & -3 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -8 & 7 & -18 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 7 & -6 & 4 \end{matrix} \sim [I_2 + \;\; -1 \;\; \cdot I_3] \sim \begin{matrix} 1 & -2 & 3 & -3 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 & -12 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 7 & -6 & 4 \end{matrix}.$$

Поскольку минор$M = \begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \end{matrix} \neq 0$, то его можно взять в качестве базисного. Тогда $rang\ A = rang\ A = 3$. Следовательно, исходная система имеет решение.

Из последней строки имеем

$$4x_2 + 7x_4 - 6x_5 = 4.$$

Тогда $x_2 = \frac{4 - 7x_4 + 6x_5}{4}$.Из второй строки матрицы следует, что

$$3x_2 - 8x_3 - 12x_5 = 3 \qquad 3 \cdot \frac{4 - 7x_4 + 6x_5}{4} - 8x_3 - 12x_5 = 3.$$

Следовательно, $x_3 = \frac{-21x_4 - 30x_5}{32}$. Тогда из первой строки:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = -1.$$

Значит, $x_1 = \frac{32+47x_4-38x_5}{32}$. Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид

$$\frac{32+47x_4-38x_5}{32};\ \frac{4-7x_4+6x_5}{4};\ \frac{-21x_4-30x_5}{32};\ x_4;\ x_5 \quad x_4, x_5 \in \mathbb{R}\ .$$

Найдем частное решение системы. Для этого в общем решении придадим неизвестнымx_4 иx_5 значение 0. Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Таким образом, частное решение имеет вид $1; 1;\ 0; 0; 0$.

Сделаем проверку частного решения. Подставляя в исходную систему, получим верные равенства. ▲

Пример 14. Исследуйте на совместность систему линейных уравнений. Если система совместна, найдите ее общее и какое-либо частное решение. Сделайте проверку частного решения.

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7, \\ 8x_1 + 12x_2 - 8x_3 &= 2. \end{aligned} \qquad (16)$$

Δ Умножим первое уравнение на (-1), после чего запишем матрицу системы. Имеем

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 7 \\ 8 & 12 & -8 & 2 \end{matrix} \sim [I_2 + \ -2\ \cdot I_1;\ I_3 + \ -8\ \cdot I_1] \sim \begin{matrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & -4 & 16 & 2 \end{matrix}.$$

Поскольку ранг матрицы системы$rang\, A = rang \begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & -4 & 16 \end{matrix} = 2$, а ранг расширенной матрицы$rang\, A = 3$, то согласно критерию совместности систем линейных уравнений, система (16) не имеет решений. ▲

Пример 15.Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ \ \lambda + 1\ \ x_1 + \ \lambda + 2\ \ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ \lambda x_2 - \lambda x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Определить, при каких значениях параметра λ данная система: а) не имеет решений; б) имеет единственное решение; в) имеет бесконечное множество решений. В случае совместной системы найти ее решение.

Δ Запишем расширенную матрицу системы:

$$\begin{matrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda+1 & \lambda+2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}.$$

Переставим первую и четвертую строки, после этого ко второй строке прибавим первую, умноженную на –(λ+1), а к четвертой – первую, умноженную на (-λ):

$$A \to \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 1-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \end{matrix}.$$

Переставим второй и четвертый столбцы, а затем добавим к четвертой вторую, умноженную на (-1):

$$A \to A_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & -2 \end{array}\right].$$

Рассмотрим три возможности:

1. При $\lambda(1-\lambda) \neq 0$ каждая из матриц A_1 и A_1имеет по четыре ненулевые строки, т.е. $rang\, A_1 = rang\, A_1 = 4$. В этом случае система является квадратной с определителем $\det A_1 \neq 0$, следовательно, имеет единственное решение. С учетом перенумерации неизвестных x_2и x_4 получим

$$x_2 = \frac{2}{\lambda},\ x_3 = \frac{1+\lambda x_2}{\lambda} = \frac{3}{\lambda},\ x_4 = \frac{3-\lambda-x_2-(1-\lambda)x_3}{1-\lambda} = \frac{\lambda-5}{\lambda},$$
$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

Таким образом, при $\lambda(1-\lambda) \neq 0$ система имеет единственное решение

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{\lambda}, x_3 = \frac{3}{\lambda}, x_4 = \frac{\lambda-5}{\lambda}.$$

2. Если $\lambda = 0$, то матрица A_1 принимает вид

$$A_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Поскольку$rang\ A_1 = 2$,$rangA_1 = 3$, $rang\ A_1 \neq rang\ A_1$, то исходная система уравнений при $\lambda = 0$ несовместна.

3. При $\lambda = 1$ имеем

$$A_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right].$$

Вычеркнем последнюю строку, поскольку она пропорциональна второй, опять переставим второй и четвертый столбцы и ктретьей прибавим вторую, умноженную на (-1):

$$A_1 \to A_2 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{matrix}.$$

Матрица A_2 является трапециевидной, причем

$$rang\ A_2 = rangA_1 = 3 < 4.$$

Следовательно, при $\lambda = 1$ система имеет бесконечное множество решений. Учтем перестановку столбцов и выберем в качестве базисных неизвестные x_1,x_3, x_4. Общее решение системы имеет вид

$$-4 - x_2;\ x_2; 3; 2 \quad x_2 \in \mathbb{R}\ .▲$$

§ 7. МЕТОД ГАУССА

Для решения систем линейных уравнений часто используют ***методГауссаили******метод последовательного исключения неизвестных***.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{gathered}$$

Пусть элемент $a_{11} \neq 0$.Данный элемент будем называть ***ведущим (главным, опорным)***. Тогда

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{matrix} \sim \left[I_2 + \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \cdot I_1; \dots; I_m + \left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}\right) \cdot I_1\right] \sim$$

$$\sim \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ & \dots & & & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{matrix}.$$

Пусть ведущий элемент $a'_{22} \neq 0$.Процесс повторяем до тех пор, пока не придем кодной из трех ситуаций:

1)

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1\,n-1} & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2(n-1)} & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3\,n-1} & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{nn} & d_n \end{matrix}, \tag{17}$$

где $c_{ii} \neq 0, i = \overline{1, n}$. Система с матрицей (17) имеет единственное решение.

2)

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2k} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{kk} & \dots & c_{kn} & d_k \end{matrix}, \tag{18}$$

где $k < n, c_{ii} \neq 0, i = \overline{1, k}$.Система с матрицей (18) имеет бесконечно много решений.

3)

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1\,n-1} & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2(n-1)} & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3\,n-1} & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_n \end{matrix}, \tag{19}$$

где $k \leq n, d_k \neq 0$. Система с матрицей (19) не имеет решений.

Пример 16. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$x + 2y - z = -3,$$
$$2x - y + z = 5,$$
$$3x - 2y - z = 3.$$

ΔЗапишем расширенную матрицу системы

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \end{matrix} \sim [I_2 + \;\; -2 \;\; \cdot I_1;\ I_3 + \;\; -3 \;\; \cdot I_1] \sim \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 11 \\ 0 & -8 & 2 & 12 \end{matrix}.$$

Умножая последнюю строку на $-\frac{1}{2}$ (результат запишем на место третьей строки), прибавим ее ко второй. Получим матрицу

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & -6 \end{matrix} \sim [I_3 + \;\; -4 \;\; \cdot I_2] \sim \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{matrix}.$$

Разделим последнюю строку на 7:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}.$$

Таким образом, мы пришли к системе вида (17). Следовательно, исходная система имеет единственное решение.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \sim [I_2 + 2 \cdot I_3; I_1 + 1 \cdot I_3] \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim [I_1 + \;\; -2 \;\; \cdot I_2] \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}.$$

Таким образом, решение исходной системы:$x = 1$,$y = -1$, $z = 2$. ▲

§ 8. МЕТОД ГАУССА–ЖОРДАНА

Рассмотрим модифицированный метод Гаусса, известный как ***метод Гаусса–Жордана***. Пусть дана расширенная матрица

$$A = \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12}a_{13} \dots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22}a_{23} \dots & a_{2n} & & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2}a_{m3} \dots & a_{mn} & & b_m \end{array}.$$

Предположим, что ведущий элемент $a_{11} \neq 0$. Сделаем первый шаг метода Гаусса, приведя матрицу к виду

$$A \to \begin{array}{cccc} 1 & a_{12}^{(1)}a_{13}^{(1)} \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)}a_{23}^{(1)} \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2}^{1}a_{m3}^{(1)} \dots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array},$$

где $a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, j = 2; n, b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}$, $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}$, $b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}b_1}{a_{11}}$, $i = 2; m$, $j = 2; n$. Разделим вторую строку на $a_{22}^{(1)} \neq 0$ и вычтем из каждой i-й строки (включая первую) вторую, умноженную на $a_{i2}^{(1)}$:

$$A \to \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{23}^{(1)} \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} \dots & a_{mn}^{(2)} & b_m^{(2)} \end{array},$$

где $a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, j = 3; n, b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(2)}a_{2j}^{(2)}}{a_{22}^{(1)}}$, $b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(2)}b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, $i = 1; m, i \neq 2, j = 3; n$. Продолжая дальше этот процесс, приходим к трапециевидной матрице, в левом верхнем углу которой расположена единичная матрица. После этого находим решение системы.

При равенстве нулю одного или нескольких ведущих элементов можно выбрать главный элемент, переставляя строки матрицы или производя перенумерацию неизвестных. Однако существует более удобный способ, не требующий выполнения перестановок и позволяющий избежать деления на ведущий элемент.

Пусть выполнено s шагов метода Гаусса–Жордана. При переходе к

$(s + 1)$-му шагу выполним следующие действия:

1) выберем ведущий элемент $a_{kl}^{(s)} \neq 0$ в тех строках и столбцах, которые не были ведущими;
2) ведущий столбец дополним нулями, а ведущую строку оставим без изменений;
3) ведущие столбцы, полученные на предыдущих шагах, умножим на выбранный ведущий элемент;
4) остальные элементы пересчитаем по ***правилу прямоугольников***:

$$a_{ij}^{(s+1)} = a_{ij}^{(s)} a_{kl}^{(s)} - a_{il}^{(s)} a_{kj}^{(s)}, \; b_i^{(s+1)} = b_i^{(s)} a_{kl}^{(s)} - a_{il}^{(s)} b_k^{(s)}.$$

Пример 17. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса–Жордана:

$$\begin{aligned}
&3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\
&2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 5, \\
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 3, \\
&x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = -1.
\end{aligned}$$

Δ Запишем расширенную матрицу системы

$$A = \begin{matrix} 3 & 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 7 & -1 \end{matrix}$$

и приведем ее к трапециевидной форме с помощью описанной выше схемы. Выберем в качестве ведущего элемента$a_{31} = 1$. Перепишем третью строку, все элементы первого столбца, кроме ведущего, заменим нулями. Вычислим остальные элементы по правилу прямоугольника. Тогда получим

$$A \to \begin{matrix} 0 & -5 & -8 & -14 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -8 & -7 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -7 & 6 & -4 \end{matrix}.$$

На втором шаге примем за ведущий элемент $a_{22}^{(1)}$. Вторую строку перепишем без изменений, второй столбец дополним нулями, первый столбец умножим на (-1) и пересчитаем остальные элементы по правилу прямоугольников:

$$A \to \begin{matrix} 0 & 0 & -32 & -21 & -30 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & -7 & -6 & -1 \\ -1 & 0 & 13 & 10 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & -32 & -21 & -30 & 0 \end{matrix}.$$

Прибавим к четвертой строке первую, умноженную на (-1), и умножим первую и вторую строки на (-1):

$$A \to \begin{matrix} 0 & 0 & 32 & 21 & 30 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 13 & 10 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

Возьмем в качестве ведущего элемент $a_{13}^{(2)}$ и выполним преобразования, аналогичные первым двум:

$$A \to A \to \begin{matrix} 0 & 0 & 32 & 21 & 30 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 56 & -48 & 32 \\ -32 & 0 & 0 & 47 & -38 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

Переставляя первую и третью строки, приходим к трапециевидной матрице, по которой в явном виде выпишем общее решение:

$$1+\frac{1}{32}\ 47x_4-38x_5\ ;1+\frac{1}{4}\ -7x_4+6x_5\ ;\ \frac{1}{32}\ -21x_4-30x_5\ ;\ x_4;\ x_5\quad x_4;\ x_5\in\mathbb{R}\ .\ \blacktriangle$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Решить системы линейных уравнений а) по правилу Крамера; б) матричным методом:

1. $\begin{cases} x_1 - \sqrt{5}\,x_2 = 0, \\ 2\sqrt{5}x_1 - 5\,x_2 = -10. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} ax + 3by = 1, \\ bx + 3ay = 1. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \alpha x - y = 2, \\ 2x + \alpha y = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 7, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 21 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -11. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 4x + 5y + 6z = 8, \\ 7x + 8y = 2. \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 15, \\ 7x + 8y + 9z = 24. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} 5x - 6y + 2z = -2, \\ 10x + 3y - 4z = 5, \\ -3y + 2z = -2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x_1 + 11x_2 + x_4 = 57, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 37, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 43, \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 22. \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -7, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = -7. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3, \\ 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -8. \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2, \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -2, \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 6 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0. \end{cases}$

Решить следующие системы уравнений методом Гаусса (с помощью правила прямоугольников):

16. $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 + 12x_2 - 8x_3 = 2. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} 2x - 3y = -2, \\ x + 2y = 2{,}5, \\ -2x - 4y = -5, \\ 2\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}y = -2\sqrt{3}. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 79, \\ 3x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 = 263, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 16x_4 = 146, \\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 92. \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0, \\ 9x - y + 4z - t - 13 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0, \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 79, \\ 3x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 = 263, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 16x_4 = 146, \\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 92. \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 14x_4 = 21, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 13x_4 + 3x_5 = 12, \\ 10x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 - x_5 = 29, \\ 15x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 130, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 7x_5 = -13. \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n - 2, \\ x_1 + x_3 + \cdots + x_n = n - 3, \\ x_1 + x_2 + x_4 + \cdots + 4x_n = n - 3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = n - 3. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ -x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n = 0, \\ -x_{n-1} + 2x_n = 1. \end{cases}$$

Найти общее решение и фундаментальную систему решений для следующих однородных систем линейных уравнений:

31. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 0. \end{aligned}$

33. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0. \end{aligned}$

34. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_4 &= 0. \end{aligned}$

35. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0, \\ x_1 - 18x_2 - 2x_3 + 7x_4 &= 0. \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ 7x_1 + 11x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ 9x_1 + 14x_2 - x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$

37. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$

38. $\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 0. \end{aligned}$

39. $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 &= 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 0. \end{aligned}$

40. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 4x_5 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 &= 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$

42. $\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_5 &= 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 &= 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 &= 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$

43. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 &= 0. \end{aligned}$

44. $\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0, \\ x_2 - x_4 &= 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 &= 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 &= 0, \\ -x_3 + x_5 &= 0, \\ -x_4 + x_6 &= 0. \end{aligned}$

45. $$\begin{aligned} &6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ &9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ &6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ &3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{aligned}$$

Найти общее решение и фундаментальную систему решений для следующих однородных систем линейных уравненийв зависимости от параметра λ:

46. $$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ &x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ &2x_1 + 11x_2 - 2\lambda x_3 = 0. \end{aligned}$$

47. $$\begin{aligned} &8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ &\lambda x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ &\lambda^2 x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{aligned}$$

48. $$\begin{aligned} &x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ &3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ &5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - x_4 = 0, \\ &3x_1 + 5x_2 - \lambda x_3 = 0. \end{aligned}$$

Исследовать на совместность, найти общее решение и какое-либо частное решение следующих неоднородных систем линейных уравнений:

49. $$\begin{aligned} &2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ &3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ &9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{aligned}$$

50. $$\begin{aligned} &2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7, \\ &-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ &8x_1 + 12x_2 - 8x_3 = 2. \end{aligned}$$

51. $$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 = 3, \\ &-2x_1 + 3x_2 = 0, \\ &-2x_1 - 4x_2 = 1. \end{aligned}$$

52. $$\begin{aligned} &x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ &x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ &x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ &-7x_1 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{aligned}$$

53. $$\begin{aligned} &2\sqrt{5}x_1 - x_2 + \sqrt{5}x_3 = 1, \\ &10x_1 - \sqrt{5}x_2 + 5x_3 = \sqrt{5}, \\ &-2x_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}x_2 - x_3 = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

54. $$\begin{aligned} &2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ &4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ &2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{aligned}$$

55. $$\begin{aligned} &3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ &6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ &9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{aligned}$$

56. $$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ &x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ &3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ &4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{aligned}$$

57. $$\begin{aligned} &6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1,\\ &3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3,\\ &3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7,\\ &9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2. \end{aligned}$$

58. $$\begin{aligned} &3x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2,\\ &2x_1+3x_2+2x_3+5x_4=3,\\ &9x_1+x_2+4x_3-5x_4=1,\\ &2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5,\\ &7x_1+x_2+6x_3-x_4=7. \end{aligned}$$

59. $$\begin{aligned} &x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1,\\ &2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2,\\ &3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1,\\ &2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=2. \end{aligned}$$

60. $$\begin{aligned} &2x_1-4x_2+x_3-x_4=-7,\\ &8x_1+3x_2-3x_3-2x_4=55,\\ &8x_1+4x_2+7x_3+x_4=49,\\ &-2x_1-10x_2-5x_4=-50,\\ &6x_1+x_2-x_3-x_4=35. \end{aligned}$$

61. $$\begin{aligned} &x_1+2x_2+3x_3-2x_4+3x_5=4,\\ &3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5,\\ &x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11,\\ &2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6. \end{aligned}$$

62. $$\begin{aligned} &2x_1+3x_2+x_3+2x_4=4,\\ &4x_1+3x_2+x_3+x_4=5,\\ &5x_1+11x_2+3x_3+2x_4=2,\\ &2x_1+5x_2+x_3+x_4=1,\\ &x_1-7x_2-x_3+2x_4=7. \end{aligned}$$

63. $$\begin{aligned} &6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=5,\\ &4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=4,\\ &4x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5=0,\\ &2x_1+x_2+7x_3+3x_4+2x_5=1. \end{aligned}$$

Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значений параметра λ:

64. $$\begin{aligned} &x_1+2x_2+3x_3=6,\\ &2\,x_1+5\,x_2-3x_3=\lambda. \end{aligned}$$

65. $$\begin{aligned} &\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\ &x_1+\lambda x_2+x_3=1,\\ &x_1+x_2+\lambda x_3=1. \end{aligned}$$

66. $$\begin{aligned} &1+\lambda\ \ x_1+x_2+x_3=1,\\ &x_1+\ \ 1+\lambda\ \ x_2+x_3=\lambda,\\ &x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2. \end{aligned}$$

67. $$\begin{aligned} &1+\lambda\ \ x_1+x_2+x_3=\lambda^2+3\lambda,\\ &x_1+\ \ 1+\lambda\ \ x_2+x_3=\lambda^3+3\lambda^2,\\ &x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^4+3\lambda^3. \end{aligned}$$

Исследовать системы уравнений и найти общее решение в зависимости от значений входящих в коэффициенты параметров:

68. $$\begin{aligned} &ax+y+z=1,\\ &x+by+z=1,\\ &x+y+cz=1. \end{aligned}$$

69. $$\begin{aligned} &x+y+z=1,\\ &ax+by+cz=d,\\ &a^2x+b^2y+c^2z=d^2. \end{aligned}$$

70. Найти неизвестные коэффициенты функции

$$f\ \ x\ \ =a3^x+bx^2+c,$$

удовлетворяющей условиям: $f(0) = 2, f(1) = -1, f(2) = 4$.

71.Найти многочлен третьей степени $f(x)$, для которого $f(-1) = 0, f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 16$.

72. При каких условиях на числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ для любых решений X_1, $X_2, \ldots, X_n$ неоднородной системы линейных уравнений сумма

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n$$

также будет решением этой системы?

73. При каких условиях в общем решении однородной системы

$$\begin{aligned} y + az + bt &= 0, \\ -x + cz + dt &= 0, \\ ax + cy - et &= 0, \\ bx + dy + ez &= 0. \end{aligned}$$

в качестве свободных неизвестных можно взять z и t?

ОТВЕТЫ

1. $x_1 = -2\sqrt{5}$; $x_2 = -2$. **2.** $x = \frac{1}{a+b}$; $y = \frac{1}{3(a+b)}, a \neq \pm b$.**3.** $x = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2+2}$;$y = \frac{\alpha+4}{\alpha^2+2}$.**4.** $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. **5.** $x_1 = 5$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.**6.** $x = -2$; $y = 2$; $z = 1$.**7.** $x_1 = -\frac{a+1}{a+2}$; $x_2 = \frac{1}{a+2}$; $x_3 = \left(\frac{a+1}{a+2}\right)^2, a \neq 1, a \neq -2$. **8.** Систему нельзя решить ни методом Крамера, ни матричным. **9.** $x = \frac{1}{5}$; $y = \frac{1}{3}$; $z = -\frac{1}{2}$. **10.** $x_1 = 5$; $x_2 = 3$; $x_3 = 1$; $x_4 = 4$. **11.** $x_1 = 2$; $x_2 = -1$;

$x_3 = 0$; $x_4 = -2$.**12.** $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = -3$; $x_4 = 1$. **13.** $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$. **14.** $x_1 = -0{,}4$; $x_2 = -1{,}2$; $x_3 = 3{,}4$,; $x_4 = 1$. **15.** $x = -3$; $y = 0$; $z = -0{,}5$; $t = \frac{2}{3}$.**16.** $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. **17.** Система несовместна. **18.** $x = 2$; $y = 3$; $z = 5$. **19.** $x = \frac{1}{2}$; $y = 1$. **20.** $x_1 = x_2 = 1$; $x_3 = x_4 = -1$. **21.** Система несовместна. **22.** $x = \frac{2}{3}$; $y = -1$; $z = \frac{3}{2}$; $t = 0$. **23.** Система несовместна. **24.** $x_1 = 3$; $x_2 = 0$; $x_3 = -5$; $x_4 = 11$. **25.** $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = \frac{5}{3}$; $x_4 = -\frac{4}{3}$. **26.** Система несовместна. **27.** $x_1 = \frac{734}{7}$; $x_2 = \frac{53}{7}$; $x_3 = -10$; $x_4 = 1$. **28.** $x_1 = 2$; $x_2 = -1{,}5$; $x_3 = 4$,; $x_4 = 3$; $x_5 = 2{,}5$.

29. $(-1; 1; 1; \dots; 1)$. **30.** $(2; 1; 1; \dots; 1)$. **31.** $\{(0; x_3; x_3) \mid x_3 \in \mathcal{R}\}$, $e_1 = (0; 1; 1)^T$. **32.** $\{(x_3; -2x_3; x_3) \mid x_3 \in \mathcal{R}\}$, $e_1 = (1; -2; 1)^T$. **33.** $\{(8x_3 - 7x_4; -6x_3 + {}+5x_4; x_3; x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathcal{R}\}$, $e_1 = (8; -6; 1; 0)^T$, $e_2 = (-7; 5; 0; 1)^T$. **34.**$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, фундаментальной системы решений не существует.

35. $\{(-8x_2 - x_4; x_2; -13x_2 + 3x_4; x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathcal{R}\}$, $e_1 = (-8; 1; -13; 0)^T$, $e_2 = (-1; 0; 3; 1)^T$. **36.** $\{(-\frac{3}{2}x_2; x_2; \frac{1}{2}x_2 - x_4; x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathcal{R}\}$,

$e_1 = (-3; 2; 1; 0)^T$, $e_2 = (0; 0; -1; 1)^T$.

37.$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, фундаментальной системы решений не существует.

38. $\{(0; \frac{1}{3}x_3 - -\frac{2}{3}x_5; x_3; 0; x_5) \mid x_3, x_5 \in \mathcal{R}\}$, $e_1 = (0; 1; 3; 0; 0)^T$, $e_2 = (0; -2; 0; 0; 3)^T$. **39.** $\{(-3x_3 - 5x_5; 2x_3 + 3x_5; x_3; 0; x_5) \mid x_3, x_5 \in \mathcal{R}\}$, $e_1 = (-3; 2; 1; 0; 0)^T$, $e_2 = (-5; 3; 0; 0; 1)^T$. **40.** $\{(x_5; -3x_5; -3x_5; 7x_5; x_5) \mid x_5 \in \mathcal{R}\}$,

$e_1 = (1; -3; -3; 7; 1)^T$.

41. $x_1; -\frac{1}{2}\ \ 3x_1 + 4x_4 + 8x_5\ \ ; x_4 + 3x_5; x_4;\ x_5\quad x_1,\ x_4,\ x_5 \in \mathcal{R}$,

$e_1 =\ \ 2; -3; 0; 0; 0\ \ ^T, e_2 =\ \ 0; -2; 1; 1; 0\ \ ^T, e_3 =\ \ 0; -4; 3; 0; 1\ \ ^T$. **42.** $x_4 - x_5; x_4 - x_6;\ x_4;\ x_4;\ x_5;\ x_6\quad x_4,\ x_5,\ x_6 \in \mathcal{R}$ **,** $e_1 =\ \ 1; 1; 1; 1; 0; 0\ \ ^T, e_2 =\ \ 0; -1; 0; 1; 0; 1\ \ ^T, e_3 =\ \ -1; 0; 0; 0; 1; 0\ \ ^T$.

43. $x_1; x_2; x_3; -\frac{9x_1+6x_2+8x_3}{4};\ \frac{3x_1+2x_2+4x_3}{4}\quad x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathcal{R}\ , e_1 =\ \ 4; 0; 0; -9; 3\ \ ^T, e_2 =\ \ 0; 4; 0; -6; 2\ \ ^T, e_3 =\ \ 0; 0; 4; -8; 4\ \ ^T$.

44. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, фундаментальной системы решений не существует. **45.** $x_1; x_2; x_3; \frac{-9x_1+3x_2-10x_3}{11};\ \frac{-3x_1+x_2+4x_3}{11}\quad x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathcal{R}$, $e_1 =\ \ 11; 0; 0; -9; -3\ \ ^T, e_2 =\ \ 0; 11; 0; 3; 1\ \ ^T, e_3 =\ \ 0; 0; 11; -10; 4\ \ ^T$. **46.** При $\lambda \neq -6 x_1 = x_2 = x_3 = 0$, фундаментальной системы решений не существует.При $\lambda = -6\quad \frac{7}{3}x_3; \frac{2}{3}x_3; x_3\quad x_3 \in \mathcal{R}$, $e_1 =\ \ 7; 2; 3\ \ ^T$. **47.** При $\lambda \neq 2,\ \lambda \neq -4 x_1 = x_2 = x_3 = 0$, фундаментальной системы решений не существует.При $\lambda = 2\quad x_1; 0; -2x_1\quad x_1 \in \mathcal{R}$, $e_1 =\ \ 1; 0; -2\ \ ^T$. При $\lambda = -4\quad -\frac{5}{4}x_3; 6x_3; x_3\quad x_3 \in \mathcal{R}\ , e_1 =\ \ -5; 24; 4\ \ ^T$.**48.** При $\lambda = 3\quad 0;\ -\frac{3}{2}x_4; -\frac{5}{2}x_4; x_4\quad x_4 \in \mathcal{R}\ , e_1 =\ \ 0; -3; -5; 2\ \ ^T$.При $\lambda \neq 3 x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, фундаментальной системы решений не существует. **49.** о.р. $\frac{x_3-9x_4-2}{11};\ \frac{-5x_3+x_4+10}{11};\ x_3; x_4\quad x_3,\ x_4 \in \mathcal{R}$, ч.р. $(-1; 1; 0; 1)$. **50.** Система несовместна. **51.** Система несовместна.

52. о.р. $-8; 3 + x_4; 6 + 2x_4;\ x_4\quad x_4 \in \mathcal{R}$, ч.р. $(-8; 3; 6; 0)$.

53. о.р. $\frac{1+x_2-\sqrt{5}x_3}{2\sqrt{5}}; x_2; x_3\quad x_2,\ x_3 \in \mathcal{R}$, ч.р. $(-1; -1; 2)$.

54. о.р. $x_1;\ x_2; 22x_1 - 3x_2 - 11; -16x_1 + 24x_2 + 8\quad x_1,\ x_2 \in \mathcal{R}$, ч.р. $(0; 0; 11; 8)$.

55.о.р. $\frac{1-4x_2-x_3}{3}; x_2; x_3; 1\quad x_2,\ x_3 \in \mathcal{R}$, ч.р. $(-1; -1; 0; 1)$.

56. о.р. $\frac{1+x_5}{3};\ \frac{1+3x_3+3x_4-5x_5}{3};\ x_3; x_4;\ x_5\quad x_3,\ x_4,\ x_5 \in \mathcal{R}$,ч.р. $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0; 0; 0)$.

57. о.р. $x_1;\ x_2; 13; 19 - 3x_1 - 2x_2; -34\quad x_1,\ x_2 \in \mathcal{R}$, ч.р. $(0; 0; 13; 19; -34)$.

58. о.р. $\frac{8x_4-6}{7};\ \frac{-13x_4+1}{7};\ \frac{-6x_4+15}{7}; x_4\quad x_4 \in \mathcal{R}$, ч.р. $(-2; 2; 3; -1)$.

59. Система несовместна. **60.** Система имеет единственное решение $x_1 = 5, x_2 = 4;\ x_3 = -1;\ x_4 = 0$.

61. о.р. $x_1; x_2; -\frac{2x_1+4x_2+9}{2}; -\frac{4x_1+8x_2+25}{2}; -\frac{4x_1+8x_2+15}{2}$ $x_1,\ x_2 \in \mathcal{R}$, ч.р. $0; 0; -\frac{9}{2}; -\frac{25}{2}; -\frac{15}{2}$. **62.** Система несовместна.

63. о.р. $x_1; x_2; \frac{4x_1+2x_2}{3}; -\frac{14x_1+7x_2+1}{3}; \frac{4x_1+2x_2+6}{3}$ $x_1,\ x_2 \in \mathcal{R}$, ч.р. $1; 1;\ 2;\ -8;\ 4$.

64. При любом λо.р. $30 - 2\lambda - 21x_3; 9x_3 + \lambda - 12; x_3$ $x_3 \in \mathcal{R}$, ч.р. $30 - 2\lambda;\ \lambda - 12; 0$.

65. При $(\lambda - 1)(\lambda + 2) \neq 0$система имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda+2}$.При $\lambda = 1$ о.р. $1 - x_2 - x_3;\ x_2; x_3;$ $x_2,\ x_3 \in \mathcal{R}$. При $\lambda = -2$ система несовместна.

66. При $\lambda(\lambda + 3) \neq 0$система имеет единственное решение $x_1 = \frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}, x_2 = \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}, x_3 = \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$. При $\lambda = 0$ и$\lambda = -3$ система несовместна.

67. При $\lambda(\lambda + 3) \neq 0$система имеет единственное решение $x_1 = 2 - \lambda^2, x_2 = 2\lambda - 1,\ x_3 = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1$. При $\lambda = 0$ о.р. $-x_2 - x_3;\ x_2; x_3;$ $x_2,\ x_3 \in \mathcal{R}$. При $\lambda = -3$ о.р. $x_3;\ x_3; x_3;$ $x_3 \in \mathcal{R}$.

68. При $D = abc - a - b - c + 2 \neq 0$система имеет единственное решение $x = \frac{(b-1)(c-1)}{D}, y = \frac{(a-1)(c-1)}{D}, z = \frac{(a-1)(b-1)}{D}$. В этом случае нулевые значения могут иметь какие-либо два неизвестных одновременно, причем третье неизвестное и соответствующий параметр равен 1 (например, $x = y = 0$, $z = c = 1$). Если $D = 0$, причем одно и только одно из чисел a, b, cотлично от 1, то решение зависит от одного параметра (например, если $a \neq b = c = 1$, то общее решение имеет вид $x = 0, y = 1 - z$). В этом случае одно или два неизвестных обязательно равны 0. Если $a = b = c = 1$, то общее решение имеет вид $x = 1 - y - z$, причем одно или два неизвестных могут равняться 0. Если $D = 0$ и ни одно их чисел a, b, c не равно 1, то система несовместна. Случай $D = 0$, причем одно и только одно из чисел a, b, c равно 1, невозможен.

69.Если a, b, c – попарно различны, то система имеет единственное решение $x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}$, $y = \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)}$, $z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$. Если среди чисел a, b, c, d имеется только два различных, то решение зависит от одного параметра (например, если$d = a \neq b = c$, то общее решение имеет вид $x = 1$,

$y = \frac{a-c}{b-a} z, z \in \mathcal{R}$.). Если $a = b = c = d$, то общее решение имеет вид

$x = 1 - y - z$, $y, z \in \mathcal{R}$. Если среди чисел a, b, c два различны и d не равно ни одному из них или $a = b = c \neq d$, то система несовместна.

70. $f(x) = -2 \cdot 3^x + 3x^2 + 2$. **71.** $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$.

72. $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. **73.** $e = ad - bc$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб. для вузов. – 10-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2005. – 304 с.
2. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А Сборник задач по аналитической геометриии линейной алгебре: учеб. пособие / Под ред. Д.В. Беклемишева. – 2-е изд., перераб. – М.: Физматлит, 2004. – 496 с.
3. Березкина Л.Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра – Мн.: РИВШ, 2019. – 354 с.
4. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и геометрии: учеб. пособие / Под ред. А.С. Феденко. – 2-е изд. – Мн.: Універсітэцкае, 1999. – 302 с.
5. Высшая математика. Сборник задач: учеб. пособие. В 3 ч. Ч 2. Линейная алгебра. Анализ функции многих переменных / В.К. Ахраменко [и др.]; под ред. Н.Г. Абрашиной-Жадаевой, В.Н. Русака. – Мн.: БГУ, 2014. – 384 с.
6. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре: учеб. пособие. 2-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2006. – 319 с.
7. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра: учеб. для вузов. 3-е изд., стереотип. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. – 336 с.
8. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 576 с.
9. Милованов М.В. и др. Алгебра и аналитическая геометрия: [Учеб. пособие для мат. спец. ун-тов и пед. ин-тов] / М.В. Милованов, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. – Мн.: Выш. шк., 1984. – 302 с.
10. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие. 13-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 480 с.
11. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре – М., 1977. – 288 с.
12. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р.Ф. Апатенок [и др.]; под ред. В.Т. Воднева. Минск, 1990. – 285 с.