

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и  
образовательным инновациям

О. И. Здрок

«30» Сентября 2020 г.

Регистрационный № Д- 8927 /уч.

## Дифференциальные уравнения в приложениях

Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 80 03 Математика и компьютерные науки  
профилизация Математика

2020 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-31 80 03-2019 и учебных планов: G31з-018/уч., №G31-017/уч. от 11.04.2019.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

В.В.Амелькин, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

А.Е.Руденок, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Д.Н.Чергинец, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

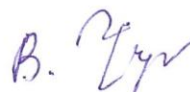
В.В. Цегельник, профессор кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», доктор физико-математических наук, профессор.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ (протокол № 9 от 14.05.2020);

Научно-методическим советом БГУ (протокол № 5 от 17.06.2020).

Зав. кафедрой дифференциальных уравнений  
и системного анализа, профессор



В. И. Громак

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### **Цели и задачи учебной дисциплины**

**Цель** учебной дисциплины – расширение, систематизация и закрепление у магистрантов знаний, методов и приемов их использования, связанных с теорией дифференциальных уравнений, построением и анализом динамических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями.

### **Задачи учебной дисциплины:**

- формирование у студентов навыков и умений, связанных с основными методами теории дифференциальных уравнений;
- развитие навыков построения и анализа математических моделей на основе теории дифференциальных уравнений;
- развитие способностей видеть применение методов теории дифференциальных уравнений в реальных задачах.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием (магистра).

Учебная дисциплина является дисциплиной компонента учреждения высшего образования и входит в состав **модуля** «Гармонический анализ и дифференциальные уравнения». Её преподавание тесно связано с дисциплиной «Введение в теорию нелинейных дифференциальных уравнений».

### **Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения в приложениях» должно обеспечить формирование следующих **специализированных компетенций**:

СК-2. Быть способным использовать методы компьютерного моделирования на основе современных методик численного анализа прикладных дифференциальных задач.

СК-5. Быть способным применять современные методы гармонического анализа и дифференциальных уравнений в задачах естественных наук и экономики.

В результате изучения учебной дисциплины студент магистратуры должен:

#### ***знать:***

- основные понятия, определения и методы аналитической и качественной теории дифференциальных уравнений;
- основные типы прикладных задач, которые могут эффективно решаться с помощью аналитической и качественной теории дифференциальных уравнений;

#### ***уметь:***

- строить фазовые портреты простейших автономных систем на плоскости.

#### ***владеть:***

- основными методами теории дифференциальных уравнений для проведения исследований, построения и анализа математических моделей;

– методами Ляпунова решения вопросов устойчивости движения.

### **Структура учебной дисциплины**

Форма получения высшего образования очная (дневная) и заочная.

Дисциплина изучается в 3 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения в приложениях» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 198 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 36 часов.

– для заочной формы получения высшего образования – 16 аудиторных часов, из них 8 часов лекции, 8 часов лабораторные занятия.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Формой текущей аттестации по учебной дисциплине является зачет.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### Раздел 1. Математическое обоснование некоторых методов исследования динамических систем

- 1.1 **Введение.** Динамическая система и ее состояние. Моделирование динамической системы. Динамическая система, описываемая конечной системой дифференциальных уравнений. Устойчивость динамических систем. Предельные циклы. Устойчивость по Ляпунову. Орбитальная устойчивость.
- 1.2 **Зачем инженеру знать теоремы существования и единственности.** Теорема существования. Теорема существования и единственности. Теорема о продолжении. Метод Эйлера, улучшенный метод Эйлера.
- 1.3 **Метод малого параметра.** Случай гладкой зависимости. Теория Пуанкаре. Уравнения с малым параметром при производных. Примеры. Быстрые и медленные движения. Релаксационные колебания.
- 1.4 **Метод усреднения.** Метод медленно меняющихся амплитуд. Укороченные уравнения. Уравнение Ван-дер-Поля. Усреднение по явно входящему времени. Метод усреднения и процессы установления. Метод усреднения и установившиеся колебания.
- 1.5 **Метод нормальных форм.** Нормальные формы. Автономные планарные системы в окрестности положения равновесия. Нормальная форма периодической системы. Движение гироскопа в карданном подвесе. Колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты.
- 1.6 **Сферы Пуанкаре и Бендиксона.** Преобразования Пуанкаре, круг и экватор Пуанкаре. Преобразование обратными радиусами и инверсия стереографической проекции.
- 1.7 **Консервативные и неконсервативные динамические системы.** Свойства планарных консервативных систем. Динамические системы, характерные для теории колебаний. Грубость динамических систем.
- 1.8 **Дивергенция векторного поля и периодические движения.** Дивергентные периодические движения и параметризация. Дивергентные предельные циклы. Строгие предельные циклы. Грубость предельных циклов.
- 1.9 **Бифуркация состояний равновесия динамической системы.** Бифуркация динамической системы. Точка бифуркации. Примеры.
- 1.10 **Бифуркация рождения сингулярных точек и предельных циклов.** Бифуркация Андронова-Хопфа. Примеры. Достаточные условия реализации бифуркации Андронова-Хопфа. Обобщенная бифуркация Хопфа.

- 1.11 **Динамические системы с цилиндрической фазовой поверхностью.** Цилиндрическая фазовая поверхность и характер траекторий, возможных на цилиндрической фазовой поверхности. Замкнутые траектории, охватывающие цилиндр. Бифуркации на цилиндре. Поворот поля.
- 1.12 **Идеалы.** Понятие идеала. Операции над идеалами. Многообразие идеала. Операция деления многочленов. Базис Грёбнера идеала.

## Раздел 2. Динамические системы

- 2.1 **Нелинейные физические явления.** Мягкий и жёсткий режимы. Границы области устойчивости стационарных режимов. Мягкое и жёсткое возникновение колебаний. «Безопасные» и «опасные» границы области устойчивости состояний равновесия. Другие границы области устойчивости.
- 2.2 **Изохронные колебания.** Основные понятия и определения. Некоторые результаты общего характера. Изохронные центры нормальных форм. Изохронность высших порядков. Уравнения Лъенара в приложениях. Системы Ньютона с квадратичной по скорости силовой функцией.
- 2.3 **«Двухударная» модель часов с аналитическим сильно изохронным осциллятором свободных колебаний.** Осциллятор Лъенара затухающих свободных колебаний. Построение моделей. Периодические колебания с одним скачком на полупериоде периода колебаний осциллятора. Траектория, «входящая» в точку покоя за конечное время. Периодические колебания с двумя скачками на периоде.
- 2.4 **Модель для выявления диабета. Одна задача теории эпидемий.** Построение моделей. Решение моделей. Выводы.
- 2.5 **Модели дорожного движения.** Время, которое должен гореть жёлтый свет светофора. Проблема и модель. Решение модели. Длина очереди на перекрёстках. Простая и улучшенная модели.
- 2.6 **Теория конфликтов Л.Ф.Ричардсона.** Модели боевых действий Ф.У.Ланкастера. Квадратичный, линейный и параболический законы. Сражение на острове Иво Джима.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСП	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>1.</b>	<b>Математическое обоснование некоторых методов исследования динамических систем</b>	<b>24</b>			<b>24</b>			
1.1	Введение	2			2			Собеседование
1.2	Зачем инженеру знать теоремы существования и единственности	2			2			Собеседование
1.3	Метод малого параметра	2			2			Отчет по лабораторной работе с его устной защитой
1.4	Метод усреднения	2			2			Собеседование
1.5	Метод нормальных форм	2			2			
1.6	Сферы Пуанкаре и Бендиксона	2			2			Контрольная работа
1.7	Консервативные и неконсервативные динамические системы	2			2			Собеседование
1.8	Дивергенция векторного поля и периодические движения	2			2			Отчет по лабораторной работе с его устной защитой
1.9	Бифуркация состояний равновесия динамической системы	2			2			Отчет по лабораторной работе с его устной защитой
1.10	Бифуркация рождения сингулярных точек и предельных циклов	2			2			Отчет по лабораторной работе с его устной защитой
1.11	Динамические системы с цилиндрической фазовой поверхностью	2			2			Отчет по лабораторной работе с его устной защитой
1.12	Идеалы	2			2			Контрольная работа





## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Заочная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>1.</b>	<b>Математическое обоснование некоторых методов исследования динамических систем</b>	<b>6</b>			<b>4</b>			
1.1	Введение	0.5						Собеседование
1.2	Зачем инженеру знать теоремы существования и единственности	0.5						Собеседование
1.3	Метод малого параметра	0.5						Собеседование
1.4	Метод усреднения	0.5						Собеседование
1.5	Метод нормальных форм	0.5						Собеседование
1.6	Сферы Пуанкаре и Бендиксона	0.5						Контрольная работа
1.7	Консервативные и неконсервативные динамические системы	0.5						Собеседование
1.8	Дивергенция векторного поля и периодические движения	0.5						Собеседование
1.9	Бифуркация состояний равновесия динамической системы	0.5			1			Отчет по лабораторной работе с его устной защитой
1.10	Бифуркация рождения сингулярных точек и предельных циклов	0.5			1			Отчет по лабораторной работе с его устной защитой
1.11	Динамические системы с цилиндрической фазовой поверхностью	0.5			1			Отчет по лабораторной работе с его устной защитой
1.12	Идеалы	0.5			1			Отчет по лабораторной работе с его устной защитой

2	<b>Динамические системы</b>	<b>2</b>			<b>4</b>		
2.1	Нелинейные физические явления	0,5			1		Собеседование
2.2	Изохронные колебания	0,5					Отчет по лабораторной работе с его устной защитой
2.3	«Двухударная» модель часов с аналитическим сильно изохронным осциллятором свободных колебаний	0,5			1		Отчет по лабораторной работе с его устной защитой
2.4	Модель для выявления диабета. Одна задача теории эпидемий	0,5			1		Отчет по лабораторной работе с его устной защитой
2.5	Модели дорожного движения				1		Отчет по лабораторной работе с его устной защитой

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Амелькин, В. В. Нелинейные изохронные и импульсные колебания в динамических системах второго порядка / В. В. Амелькин, Б. С. Калитин. - Минск: БГУ, 2008.
2. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по математическим спец. / В. В. Амелькин. - Минск : БГУ, 2012.
3. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. - Москва: Наука, 1987.
4. Амелькин, В.В. Нелинейные колебания в системах второго порядка. - Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1982.
5. Амелькин, В.В. Математические модели и дифференциальные уравнения / В. В. Амелькин, А. П. Садовский. - Минск: Высшэйшая школа, 1982.
6. Любимов, В.В. Математическая теория устойчивости с приложениями: учебное пособие / В. В. Любимов. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2018.
7. Петросян, Л.А. Математические модели в экологии / С.-Петербургск. гос. ун-т. - СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 1997.
8. Самарский, А.А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. - Изд. 2-е, испр. - Москва: Физматлит, 2005.

### Перечень дополнительной литературы

1. Амелькин, В.В. Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения / В.В.Амелькин. - 2-е изд., стер. - М.: УРСС, 2003.
2. Amel'kin, V. V. Differential Equations in Applications / V. V.Amel'kin ; [transl. from the Russian E. Yankovsky]. - Moscow : Mir, 1990.
3. Попа, М.Н. Проблема центра и фокуса: алгебраические решения и гипотезы / М. Н. Попа, В. В. Прикоп; АН Молдовы, Ин-т математики и информатики. - Кишинэу : [б. и.], 2018.

## **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки**

Контроль работы магистранта проходит в форме опроса на лекциях, практических и лабораторных занятиях, а также во время устной защиты отчета по лабораторным работам и практическим заданиям. Оценка за ответы на лекциях и лабораторных занятиях включает в себя полноту ответа, наличие аргументов, примеров из практики, глубину понимания терминов, используемых магистрантом при ответе на вопросы. При защите лабораторных работ ценится самостоятельность выполнения (самостоятельно выполненное задание, но с некоторыми шероховатостями, ценится выше, чем вышколенный отчет, похожий на отчет соседа).

Формой текущей аттестации по дисциплине «Дифференциальные уравнения в приложениях» учебным планом предусмотрен зачет.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний магистранта, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- отчеты по лабораторным работам – 60 %;
- контрольная работа – 40 %.

## **Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса используется **эвристический подход**, который предполагает демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем.

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает освоение содержания через решения практических задач.

При организации образовательного процесса **используются методы и приемы развития критического мышления**, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендовано разместить на образовательном портале или сайте кафедры учебно-методические материалы: методические указания к лабораторным и практическим занятиям, вопросы для подготовки к экзамену, перечень рекомендуемой литературы, информационных ресурсов.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы УВО по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) <sup>1</sup>
Введение в теорию нелинейных дифференциальных уравнений	Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется (№ 9 от 14.05.2020)

<sup>1</sup> При наличии предложений об изменениях в содержании учебной программы УВО.

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ  
К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ  
ДИСЦИПЛИНЕ НА \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ УЧЕБНЫЙ ГОД**

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 200\_\_ г.)  
(название кафедры)

Заведующий кафедрой  
доктор физ.-мат. наук, профессор \_\_\_\_\_  
(ученая степень, ученое звание) (подпись)

**В.И. Громак**  
(И.О.Фамилия)

**УТВЕРЖДАЮ**  
Декан факультета  
доктор физ.-мат. наук, доцент \_\_\_\_\_  
(ученая степень, ученое звание) (подпись)

**С.М. Босяков**  
(И.О.Фамилия)