

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Н. Здрок

«30» Июня 2020 г.

Регистрационный № УД-8785 /уч.

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальностей:

1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ

2020 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 09-2013 и учебного плана № G31-137/уч. от 30.05.2013.

СОСТАВИТЕЛИ:

А.П. Садовский, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

О.А. Лаврова, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук;

Д.Н. Чергинец, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.

РЕЦЕНЗЕНТ:

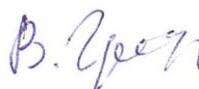
А.И. Смольская, инженер-программист ООО "ПЦИ Солюшенс".

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ (протокол № 9 от 14.05.2020);

Научно-методическим советом БГУ (протокол № 5 от 17.06.2020).

Зав. кафедрой дифференциальных уравнений
и системного анализа, профессор



В. И. Громак

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины – подготовка специалистов, способных использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований и решении практических задач с применением методов компьютерной алгебры.

Задачи учебной дисциплины:

1. формировать способности самостоятельно анализировать математические модели прикладных задач и разрабатывать алгоритмы их решения с применением методов компьютерной алгебры;
2. использовать и развивать инструментальные средства, информационные среды, автоматизированные системы;
3. использовать математические и компьютерные методы исследований при анализе современных естественнонаучных проблем.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к циклу специальных дисциплин (дисциплин по выбору студента) компонента учреждения высшего образования.

При изучении дисциплины «Компьютерная алгебра» используются знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплин «Компьютерная математика», «Алгебра и теория чисел», «Численные методы», «Уравнения математической физики». Содержание дисциплины «Компьютерная алгебра» связано с содержанием дисциплины «Математическое моделирование динамических процессов».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Компьютерная алгебра» должно обеспечить формирование следующих академических, социально-личностных и профессиональных компетенций:

академические компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным вырабатывать новые идеи (креативность).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Иметь лингвистические навыки (устная и письменная коммуникация).

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

социально-личностные компетенции:

СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике (критическое мышление).

СЛК-6. Уметь работать в команде.

профессиональные компетенции:

ПК-1. Использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований;

ПК-2. Понять поставленную задачу, оценить ее корректность;

ПК-4. Самостоятельно разрабатывать алгоритмы решения и их анализировать;

ПК-5. Получать результат на основе анализа, его корректно формулировать, видеть следствия сформулированного результата;

ПК-6. Передавать результат проведенных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;

ПК-14. Использовать математические и компьютерные методы исследований при анализе современных естественнонаучных, экономических, социально-политических процессов;

ПК-18. Разрабатывать документацию (графики работ, инструкции, планы, заявки, деловые письма и т.п.), а также отчетную документацию по установленным формам.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные упорядочения мономов;
- алгоритм деления многочленов от нескольких переменных;
- интегральная формулировка задач математической физики;
- метод Галеркина;
- понятие конечного элемента и пространства конечных элементов.

уметь:

- применять базисы Гребнера и результаты;
- решать практические задачи, решение которых сводится к нахождению аффинных многообразий;
- строить интегральную формулировку эллиптической краевой задачи 2-го порядка и соответствующую ей дискретную задачу;
- решать вопросы существования и единственности решения вариационной задачи в пространствах Соболева.

владеть:

- методами решения полиномиальных систем;
- навыками численного решения задач математической физики с помощью метода конечных элементов.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в шестом и седьмом семестре. Форма получения высшего образования очная (дневная).

Всего на изучение учебной дисциплины «Компьютерная алгебра» отведено: 140 часов, в том числе 88 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 48 часа, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Дисциплина «Компьютерная алгебра» состоит из двух разделов: «Базисы Грёбнера», который преподается в шестом семестре, и «Метод конечных элементов», преподаваемый в седьмом семестре.

На шестой семестр отводится 34 аудиторных часа, из которых 16 часов составляют лекции, 16 часов – лабораторные занятия, 2 часа – управляемая самостоятельная работа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 2 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

На седьмой семестр отводится 54 аудиторных часа, из которых 18 часов составляют лекции, 32 часов – лабораторные занятия, 4 часа – управляемая самостоятельная работа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 2 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. БАЗИСЫ ГРЁБНЕРА

Тема 1.1. Аффинные многообразия и идеалы.

Определение аффинного многообразия и полиномиального идеала. Базис идеала. Параметризация аффинных многообразий. Задача описания идеала. Задача о принадлежности к идеалу. Задача решения полиномиальных уравнений. Задача неявного представления.

Тема 1.2. Алгоритм деления полиномов.

Типы упорядочений мономов в $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Алгоритм деления в $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Тема 1.3. Базисы Гребнера.

Мономиальные идеалы и лемма Диксона. Теорема Гильберта о базисе. Базисы Гребнера, свойства базисов Гребнера. Алгоритм Бухбергера. Минимальный базис Гребнера, редуцированный базис Гребнера. Усовершенствования алгоритма Бухбергера. Применение базисов Гребнера к решению практических задач.

Тема 1.4. Теория исключения.

Теоремы об исключении и продолжении, k -й исключающий идеал. Единственность разложения на множители и результаты. Результаты и теорема о продолжении. Обобщенные результаты.

Тема 1.5. Примеры применения базисов Грёбнера.

Проблема различения центра и фокуса. Фокусные величины. Автоматическое доказательство геометрических теорем.

Раздел 2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Тема 2.1. Типы уравнений с частными производными.

Краевая задача второго порядка. Типы уравнений с частными производными второго порядка. Основные уравнения математической физики.

Тема 2.2. Вариационная формулировка эллиптической краевой задачи второго порядка.

Классическое решение. Формула интегрирования по частям. Переход от краевой задачи к вариационной задаче. Вариационные уравнения. Эквивалентность краевой задачи, задачи минимизации и вариационной задачи.

Тема 2.3. Пространства Соболева.

Интегрируемые по Лебегу функции. Обобщенная производная. Пространства Соболева. Норма и полунорма. Неравенство Пуанкаре-Фридрихса.

Тема 2.4. Существование и единственность решения вариационной задачи.

Классическое и обобщенное решение краевой задачи. Эллиптичность и непрерывность билинейной формы. Лемма Лакса-Мильграма. Существенное и естественное условие.

Тема 2.5. Метод Галеркина.

Базис конечномерного подпространства. Метод Галеркина. Устойчивость численного решения. Оценка точности численного решения (лемма Сеа). Свойство ортогональности ошибки численного решения.

Тема 2.6. Конечный элемент. Пространства конечных элементов.

Правила триангуляции области. Структурированное и неструктурированное разбиение области. Дискретная задача. Финитная функция. Конечный элемент как пространство на геометрическом элементе области. Функции формы. Типовой конечный элемент на треугольнике.

Тема 2.7. Поэлементное построение дискретной задачи.

Построение функций формы на треугольных элементах. Барцентрические координаты на треугольнике. Локальная матрица системы. Локальный вектор правой части. Реализация условия Дирихле на основе локального базиса. Разреженные матрицы. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами.

Тема 2.8. Сходимость метода конечных элементов. Теоремы аппроксимации.

Порядок сходимости. Априорные и апостериорные оценки ошибки. Лемма Сеа. Оценка ошибки интерполяции. Оценка ошибки интерполяции. Оценка ошибки в H^1 - и L^2 -нормах. Прием Нитше.

Тема 2.9. Апостериорные оценки ошибки.

Допустимая оценка. Эффективная оценка. Локальный индикатор ошибки. Алгоритм адаптивного улучшения сетки. Апостериорные оценки остатков. Апостериорные оценки, основанные на усреднении.

Тема 2.10. Partial Differential Equation Toolbox системы MATLAB.

Средства для описания задач математической физики. Численное решение задач методом конечных элементов. Средства визуализации численного результата. Работа с использованием графического пользовательского интерфейса и через командную строку в рабочем пространстве MATLAB.

Тема 2.11. Пакет FEniCS в Питоне.

Работа с пакетом FEniCS с использованием Jupyter Notebook. Численное решение задач методом конечных элементов. Средства визуализации численного результата.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневной формы получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	Базисы Грёбнера	16			16		2	
1.1	Аффинные многообразия и идеалы	4			2			Собеседование
1.2	Алгоритм деления полиномов	2			2			Письменный отчет по лабораторной работе
1.3	Базисы Гребнера	4			4			Отчеты по лабораторным работам с устной защитой
1.4	Теория исключения	4			4			Отчеты по лабораторным работам с устной защитой
1.5	Примеры применения базисов Грёбнера	2			4		2	Отчеты по лабораторным работам с устной защитой. Письменный отчет с устной защитой
2.	Метод конечных элементов	18			32		4	
2.1	Типы уравнений с частными производными	2			2			Отчеты по лабораторным работам с устной защитой
2.2	Вариационная формулировка	2			2			Отчеты по лабораторным

	эллиптической краевой задачи второго порядка							работам с устной защитой
2.3	Пространства Соболева	2			4			Отчеты по лабораторным работам с устной защитой
2.4	Существование и единственность решения вариационной задачи	2			4			Отчеты по лабораторным работам с устной защитой
2.5	Метод Галеркина	2			4			Отчеты по лабораторным работам с устной защитой
2.6	Конечный элемент. Пространства конечных элементов	2			4			Отчеты по лабораторным работам с устной защитой
2.7	Поэлементное построение дискретной задачи	2			8			Отчеты по лабораторным работам с устной защитой
2.8	Сходимость метода конечных элементов. Теоремы аппроксимации	2			2			Отчеты по лабораторным работам с устной защитой
2.9	Апостериорные оценки ошибки	2			2			Отчеты по лабораторным работам с устной защитой
2.10	Partial Differential Equation Toolbox системы MATLAB						2	Письменный отчет по заданиям с устной защитой
2.11	Пакет FEniCS в Питоне						2	Письменный отчет по заданиям с устной защитой

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Садовский, А. П. Полиномиальные идеалы и многообразия / А. П. Садовский. - Минск: БГУ, 2008. - 200 с.
2. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
3. Кокс, Дэвид Идеалы, многообразия и алгоритмы = Ideals, Varieties, and Algorithms: Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры / Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши; Пер.с англ. Ю.Ю. Кочеткова под ред. В.Л. Попова. - Москва: Мир, 2000. - 687с.
4. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989.
5. Braess D. Finite Elemente — Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. 3. Auflage. Berlin, Springer, 2003.
6. Brenner S.C., Scott, L.R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer, 1994, 2008.
7. Goering H., Roos H.-S., Tobiska L., Finite-Elemente-Methode für Anfänger, 4. Auflage, Wiley-VCH, Berlin, 2010.
8. Langtangen H.P., Logg, A. Solving PDEs in Python -- The FEniCS Tutorial Volume I. Berlin, Springer, 2016.
9. Logg, A., Mardal K.-A., Wells G. N. Automated solution of partial differential equations by the finite element method. Berlin, Springer. 2012.
10. Partial Differential Equation Toolbox User's Guide, версия R2020a.

Перечень дополнительной литературы

1. Adams W., Loustau P. An Introduction to Gröbner Bases. Graduate Studies in Mathematics. Amer. Math. Soc. – Providence, 1994. 289 p.
2. Becker T., Weispfenning V. Gröbner Bases: A Computational Approach to Commutative Algebra. Springer Verlag, Berlin and New York, 1993. 512 p.
3. Просолов В.В. Многочлены. – МЦНМО, 2000, 336 с.
4. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. – М., Мир. 1972, 160 с.
5. Рид М. Алгебраическая геометрия для всех. – М., Мир. 1991, 152 с.
6. Быков В.И., Кытманов А.М., Лазман М.З. Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов. – Новосибирск, «Наука». 1991, 232 с.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

8. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979.

9. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов М.: Мир, 1979.

10. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.

11. Ciarlet P.G. The finite element method for elliptic problems. North Holland, 1978.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Контроль работы студента проходит в форме собеседования или устной защиты отчета по лабораторным работам, выполненным в лаборатории или самостоятельно вне аудитории. Задания к лабораторным работам составляются согласно содержанию учебного материала. Во время самостоятельной работы студент выполняет задания, полученные на лабораторных занятиях, а также изучает рекомендуемую литературу. При защите лабораторных работ оценивается полнота ответа, наличие аргументации, последовательность в изложении материала, корректность оформления, оригинальность изложения материала, самостоятельность выполнения заданий.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Компьютерная алгебра» учебным планом предусмотрен зачет. Зачет по дисциплине проходит в форме устной защиты отчетов по лабораторным работам. При успешной работе на занятиях зачет может выставляться по результатам аудиторной и внеаудиторной работы студента.

Примерная тематика лабораторных занятий

1. Решение краевой задачи для уравнения Пуассона, сравнение численного и точного решения.
2. Задача о распространении тепла в двухслойной пластине.
3. Задача о рассеянии волны в канале. Влияние геометрии канала на решение.
4. Вычисление экспериментальных порядков сходимости конечно-элементного решения в L_2 - и H_1 -нормах. Влияние гладкости решения краевой задачи на сходимость.
5. Построение и визуализация базисных функций для P_3 -элемента (кубическая аппроксимация на треугольном элементе).
6. Реализация алгоритма метода конечных элементов в пространстве P_1 -элементов.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.5. Примеры применения базисов Грёбнера (2ч.).

Проблема различения центра и фокуса. Фокусные величины.

Для заданных систем автономных дифференциальных уравнений второго порядка необходимо вычислить фокусные величины. Представить необходимые условия центра в виде объединения неприводимых многообразий.

Форма контроля – письменный отчет с устной защитой.

Тема 2.10 Partial Differential Equation Toolbox системы MATLAB (2ч.) Знакомство с Partial Differential Equation Toolbox системы MATLAB. Работа с использованием графического пользовательского интерфейса и через командную строку в рабочем пространстве MATLAB. Выполнение заданий на основе методических указаний к лабораторным занятиям.

Форма контроля – письменный отчет с устной защитой.

Тема 2.11 Пакет FEniCS в Питоне (2ч.) Знакомство с пакетом FEniCS в Питоне для численного решения дифференциальных уравнений с помощью метода конечных элементов. Работа с использованием Jupyter Notebook.

Выполнение заданий на основе методических указаний к лабораторным занятиям.

Форма контроля – письменный отчет с устной защитой.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *эвристический подход*, который предполагает демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем.

При организации образовательного процесса используется *практико-ориентированный подход*, который предполагает освоение содержания через решения практических задач.

При организации образовательного процесса *используются методы и приемы развития критического мышления*, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендовано разместить на образовательном портале или сайте кафедры учебно-методические материалы: методические указания к лабораторным занятиям, перечень рекомендуемой литературы, информационных ресурсов.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы УВО по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) ¹
Математическое моделирование динамических процессов	Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 9 от 14.05.2020)

¹ При наличии предложений об изменениях в содержании учебной программы УВО.

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ
К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ
ДИСЦИПЛИНЕ НА _____ / _____ УЧЕБНЫЙ ГОД**

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № _____ от _____ 200__ г.)
(название кафедры)

Заведующий кафедрой
доктор физ.-мат. наук, профессор _____
(ученая степень, ученое звание) (подпись)

В.И. Громак
(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
доктор физ.-мат. наук, доцент _____
(ученая степень, ученое звание) (подпись)

С.М. Босяков
(И.О.Фамилия)