БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям
_____________ О.Н.Здрок
«30» 06 2020 г.
Регистрационный № УД-8865/уч.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 08 Математика и информационные технологии
направления специальности:
1-31 03 08-01 Веб-программирование и интернет-технологии,
1-31 03 08-02 Математическое и программное обеспечение мобильных устройств

2020 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 08-2014 в соответствии с учебным планом рег. № G31-195/уч., № G31-196/уч., № $G31_з$-197/уч., № $G31_з$-200/уч., № $G31_з$-198/уч., № $G31_з$-199/уч от 30.05.2014.

СОСТАВИТЕЛИ:

Андрей Владимирович Лебедев, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

Ольга Исааковна Пиндрик, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

Александр Станиславович Тыкун, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Пыжкова Ольга Николаевна, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент

Кротов Вениамин Григорьевич, заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики
(протокол № 12 от 04.06.2020);

Научно-методическим Советом БГУ

(протокол № 5 от 17.06.2020)

Заведующий кафедрой, профессор ____________ А.В. Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» – повышение уровня профессиональной компетентности в решении проблем оптимизации в различных сферах трудовой деятельности.

Образовательная цель: изучение основных методов решения конечномерных задач оптимизации и методов вариационного исчисления.

Развивающая цель: расширение математического кругозора, формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с новыми методами доказательств, усвоение новых алгоритмов решения задач оптимизации.

Задачи учебной дисциплины:

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации»:

– ознакомление с основными типами экстремальных задач;

– изучения необходимых и достаточных условий существования решений различных типов экстремальных задач;

– усвоение алгоритмов и методов решения различных экстремальных задач, а также в привитии навыков составления математических моделей, которые наилучшим образом соответствуют конкретной прикладной задаче и имеют строгие математические решения.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к циклу специальных дисциплин (государственный компонент)

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Для изучения студентами данного курса необходимы знания понятий и фактов следующих дисциплин: «Математический анализ» (сходимость последовательностей, непрерывность и дифференцирование функций нескольких переменных, теорема о неявной функции, теорема Вейерштрасса), «Дифференциальные уравнения» (линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка), «Функциональный анализ» (пространства непрерывных функций, пространства суммируемых функций).

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» должно обеспечить формирование следующих академических и профессиональных компетенций:

академические компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.
АК-3. Владеть исследовательскими навыками.
АК-4. Уметь работать самостоятельно.
АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).
АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем. –
АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.
АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникации.
АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

профессиональные компетенции:

ПК-1. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий.

ПК-3. Использовать и развивать современные достижения информационных технологий, в том числе в области математики.

ПК-4. Самостоятельно работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой, в том числе с доступной в компьютерных сетях.

ПК-5. Проводить исследования в области решения научно-производственных задач и оценивать эффективность таких решений.

ПК-22. Работать с научной, технической и патентной литературой.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

— теоремы о существовании точек минимума (максимума) для функций на подмножествах метрических пространств;
— необходимые, а также достаточные условия первого и второго порядков для точек локального минимума функций на абстрактных подмножествах конечномерного векторного пространства;
— основы выпуклого анализа и методы исследования выпуклых задач оптимизации;
— теорию выпуклого и линейного программирования;
— теорию нелинейного программирования;
— основы теории дифференцирования функций и отображений, определенных на бесконечномерных нормированных пространствах;
— необходимые, а также достаточные условия первого и второго порядков для точек локального минимума (максимума) дифференцируемых функций, определенных на бесконечномерных нормированных пространствах;
— теорию простейшей и изопериметрической вариационных задач.

уметь:

— находить точки минимума и максимума для функций, определенных на конечномерных векторных пространствах;
— с помощью дифференциальных критериев выпуклости проверять является ли заданная функция выпуклой или нет;

— использовать условия оптимальности и критерий Куна-Таккера для решения задач выпуклого программирования;
— использовать симплекс-метод для решения задач линейного программирования;
— использовать условия оптимальности первого и второго порядка для решения задач нелинейного программирования;
— дифференцировать интегральные функционалы;
— составлять и решать дифференциальное уравнение Эйлера для простейшей вариационной задачи;
— составлять присоединенное уравнение Якоби и находить сопряженные точки для экстремалей простейшей вариационной задачи;
— использовать необходимое условие Вейерштрасса для исследования допустимых кривых, доставляющих сильный локальный минимум в простейшей вариационной задаче.

владеть:

— методами решения основных конечномерных задач оптимизации;
— методами решения вариационных и изопериметрических задач.

Структура учебной дисциплины

Учебная программа по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации» состоит из двух частей: I. Конечномерные экстремальные задачи, II. Вариационное исчисление.

Дисциплина изучается в 6 и 7 семестрах очной формы получения высшего образования; в 7, 8 и 9 семестрах заочной формы получения высшего образования; в 5, 6 и 7 семестрах заочной сокращённой формы получения высшего образования.

Всего на изучение учебной дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» отведено:

– для очной формы получения высшего образования — 250 часов, в том числе 122 аудиторных часа, из них: лекции — 52 часа, практические занятия — 58 часов, управляемая самостоятельная работа — 12 часов.

– в 6 семестре – 116 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них лекции – 34 часа, практические занятия – 28 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

– в 7 семестре – 134 часа, в том числе 54 аудиторных часа, из них лекции – 18 часов, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа– 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации – зачет в 6 семестре, экзамен в 7 семестре.

– для заочной (и заочной сокращённой) формы получения высшего образования — 250 часов, в том числе 32 аудиторных часа, из них: лекции — 20 часов, практические занятия — 12 часов.

– для заочной формы обучения: в 7 семестре: всего – 70 часов, в том числе 22 аудиторных часа, из них лекции – 14 часов, практические занятия – 8 часов;

– в 8 семестре всего 140 часов, в том числе 10 аудиторных часов, из них лекции – 6 часов, практические занятия – 4 часа.

– в 9 семестре всего 40 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации –зачет в 8 семестре, экзамен в 9 семестре.

- для заочной сокращенной формы обучения: в 5 семестре всего – 140 часов, в том числе 22 аудиторных часа, из них лекции – 14 часов, практические занятия – 8 часов;

В 6 семестре всего – 70 часов, в том числе 10 аудиторных часов, из них лекции – 6 часов, практические занятия – 4 часа.

- в 7 семестре всего – 40 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации – зачет в 6 семестре, экзамен в 7 семестре.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

ЧАСТЬ I КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Раздел 1. Введение

Тема 1.1.
Общая задача оптимизации.
Тема 1.2.
Нахождение минимумов и максимумов функций для задач безусловной оптимизации в конечномерных пространствах.

Раздел 2. Принцип множителей Лагранжа в конечномерных пространствах.

Тема 2.1.
Общая задача оптимизации с ограничениями.
Тема 2.2.
Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.
Тема 2.3.
Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.
Тема 2.4.
Достаточное условие экстремума для задач с ограничениями типа равенств.
Тема 2.5.
Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями.

Раздел 3. Линейное программирование

Тема 3.1.
Задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.
Тема 3.2.
Выпуклые множества, их свойства. Теоремы отделимости.
Тема 3.3.
Крайние точки в канонической линейной задаче. Невырожденные задачи. Симплекс-метод.
Тема 3.4
Теория двойственности.

Раздел 4. Выпуклые задачи оптимизации

Тема 4.1.
Выпуклые функции. Задача выпуклого программирования.
Тема 4.2.
Условия оптимальности в задаче выпуклого программирования.
Тема 4.3.
Условие Слейтера и критерий оптимальности Куна–Таккера.

Часть II. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Раздел 1. Введение.

Тема 1.1.

Задачи оптимизации в бесконечномерных пространствах. Задача о брахистохроне.

Раздел 2. Простейшая вариационная задача.

Тема 2.1.

Сильный и слабый экстремумы в простейшей вариационной задаче.

Тема 2.2.

Вариации целевого функционала простейшей вариационной задачи.

Тема 2.3.

Необходимые условия локального минимума в простейшей вариационной задаче.

Тема 2.4.

Достаточное условия слабого локального минимума в простейшей вариационной задаче**.**

Тема 2.5.

Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума в простейшей вариационной задаче**.**

Тема 2.6.

Достаточное условие сильного локального минимума в простейшей вариационной задаче.

Раздел 3. Изопериметрическая вариационная задача.

Тема 3.1.

Локальный минимум в изопериметрической вариационной задаче.

Тема 3.2.

Необходимое условие минимума в изопериметрической вариационной задаче.

Тема 3.3.

Достаточное условие минимума в изопериметрической вариационной задаче.

.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов						Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	Количество часов УСР	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	**КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ**							
1.	**Введение**	**4**	**2**					
1.1	**Общая задача оптимизации.**	**2**						
1.1.1.	Предмет курса, история, связь с другими математическими дисциплинами, значение и роль в естествознании, экономических, технических, социальных науках и их приложениях. Основные определения и понятия. Классификация задач оптимизации.	2						собеседование
1.2.	**Нахождение минимумов и максимумов функций для задач безусловной оптимизации в конечномерных пространствах**	**2**	**1**					
1.2.1.	Необходимые условия экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации. Достаточное условие экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации. Верхний и нижний пределы числовых последовательностей и функций. Полунепрерывные функции. Теоремы о существовании оптимальных решений	2	1					тест
2.	**Принцип множителей Лагранжа в конечномерных пространствах.**	**14**	**12**				**4**	
2.1.	**Общая задача оптимизации с ограничениями.**	**4**	**2**					

2.1.1	Локальный и глобальный минимумы. Дифференцируемость по направлениям, равномерная дифференцируемость по направлениям, полная производная. Конус допустимых и конус касательных направлений; их основные свойства. Необходимые условия локального минимума первого порядка для дифференцируемых и равномерно дифференцируемых по направлениям функций в задаче оптимизации с ограничениями.	2	1					собеседование
2.1.2.	Достаточное условие строгого локального минимума для равномерно дифференцируемых функций в общей задаче оптимизации с ограничениями. Дважды вполне дифференцируемые функции. Необходимые, а также достаточные условия второго порядка для точек локального минимума в общей задаче оптимизации с ограничениями	2	1					тест
2.2.	**Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.**	**2**	**2**				**2**	
2.2.1.	Формулировка принципа Лагранжа для гладких конечномерных задач с ограничениями типа равенств. Примеры решения задач.	2	2				2	контрольная работа
2.3.	**Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.**	**4**	**4**					
2.3.1.	Формулировка принципа Лагранжа для гладких конечномерных задач с ограничениями типа равенств и неравенств. Доказательство принципа Лагранжа.	2	2					собеседование
2.3.2.	Примеры решения задач.	2	2					тест
2.4.	**Достаточное условие экстремума для задач с ограничениями типа равенств.**	**2**	**2**					
2.4.1.	Применение достаточного условия для задач с ограничениями типа равенств.	2	2					собеседование
2.5.	**Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями**	**2**	**2**				**2**	

2.5.1	Применение достаточного условия для задач с ограничениями типа равенств и неравенств. Доказательство достаточного условия.	2	2				2	контрольная работа
3.	**Линейное программирование**	**10**	**8**				**2**	
3.1.	**Задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования**	**2**	**1**					
3.1.1	Формулировка задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация. Геометрический метод решения линейных задач для случая функций двух переменных.	2	1					собеседование
3.2.	**Выпуклые множества, их свойства. Теоремы отделимости.**	**2**	**1**					
3.2.1	Выпуклые множества. Отделимость выпуклых множеств. Теоремы об отделимости. Опорные гиперплоскости.	2	1					собеседование
3.3.	**Крайние точки в канонической линейной задаче. Невырожденные задачи. Симплекс-метод**	**2**	**4**				**2**	
3.3.1	Крайние точки множества. Невырожденные линейные задачи. Невырожденные линейные задачи.	1	2					собеседование
3.3.2	Начальный опорный план. Метод нахождения начального опорного плана.	1	2				**2**	контрольная работа
3.4	**Теория двойственности**	**2**	**2**					
3.4.1	Двойственная задача линейного программирования. Теорема двойственности	2	2					тест
4.	**Выпуклые задачи оптимизации**	**8**	**6**					
4.1.	**Выпуклые функции. Задача выпуклого программирования.**	**4**	**2**					
4.1.1.	Выпуклые функции и их простейшие свойства. Непрерывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций. Непрерывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости	2	1					собеседование

	функций. Критерий оптимальности решений выпуклой задачи оптимизации.							
4.1.2.	Задача выпуклого программирования. Геометри-ческий критерий оптимальности решений в задаче выпуклого программирования.	2	1					собеседование
4.2.	**Условия оптимальности в задаче выпуклого программирования.**	**2**	**2**					
4.2.1.	Условия оптимальности для решений задачи выпуклого программирования.	2	2					собеседование
4.3.	**Условие Слейтера и критерий оптимальности Куна–Таккера.**	**2**	**2**					
4.3.1	Условие регулярности Слейтера и критерий оптимальности Куна–Таккера.	2	2					тест
	ВСЕГО ЗА СЕМЕСТР	**34**	**28**				**6**	
II	**ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**							
1.	**Введение.**	**2**	**2**					
1.1.	**Задачи оптимизации в бесконечномерных пространствах. Задача о брахистохроне.**	**2**	**2**					
1.1.1	Предмет курса, история, связь с другими математическими дисциплинами, значение и роль в естествознании, экономических, технических, социальных науках и их приложениях. Введение в вариационное исчисление. История и значение в развитии бесконечномерного анализа. Задача о брахистохроне.	2	2					собеседование
2.	**Простейшая вариационная задача.**	**10**	**20**				**4**	
2.1.	**Сильный и слабый экстремумы в простейшей вариационной задаче**	**1**	**2**					
2.1.1	Формулировка простейшей вариационной задачи. Определение сильного и слабого локальных экстремумов. Нормированные пространства вектор-функций. Сравнение различных норм. Интегральные функционалы, определенные на нормированных пространствах вектор-функций.	1	2					собеседование

2.2.	**Вариации целевого функционала простейшей вариационной задачи.**	**2**	**4**					
2.2.1	Дифференцирование функций и отображений, определенных на нормированных пространствах. Определения первой и второй вариации Лагранжа. Производные Гато и Фреше.	1	2					собеседование
2.2.2	Билинейные функции и отображения. Дифференциальные свойства интегральных функционалов. Общий вид первой и второй вариации интегрального функционала.	1	2					тест
2.3.	**Необходимые условия локального минимума в простейшей вариационной задаче.**	**2**	**6**				**2**	
2.3.1	Условия локального минимума первого и второго порядка для функций, определенных на нормированных пространствах. Особенности достаточных условий локального минимума в бесконечномерных пространствах. Теория квадратичных форм на нормированных и гильбертовых пространствах. Необходимые условия первого и второго порядка для локального минимума простейшей вариационной задачи в терминах вариаций целевого функционала**.**	1	2					собеседование
2.3.2	Теория первой вариации. Интегральное и дифференциальное уравнения Эйлера. Условие Вейерштрасса–Эрдмана. Теорема Гильберта. Теория второй вариации. Условия неотрицательности (положительности) квадратичного интегрального функционала на пространствах вектор-функций. Необходимое условие Лежандра. Необходимое условие Якоби.	1	4				2	контрольная работа
2.4.	**Достаточное условие слабого локального минимума в простейшей вариационной задаче.**	**2**	**2**					
2.4.1	Использование достаточного условия Якоби слабого локального минимума в простейших вариационных задачах.	2	2					собеседование
2.5.	**Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума в простейшей вариационной задаче.**	**1**	**2**					

2.5.1	Применение необходимого условия Вейерштрасса для проверки допустимой экстремали на наличие на ней экстремума интегрального функционала.	1	2					тест
2.6.	**Достаточное условие сильного локального минимума в простейшей вариационной задаче.**	**2**	**4**				**2**	
2.6.1	Обоснование наличия или отсутствия сильного экстремума с помощью достаточного условия экстремума.	2	4				2	контрольная работа
3.	**Изопериметрическая вариационная задача.**	**6**	**8**				**2**	
3.1.	**Локальный минимум в изопериметрической вариационной задаче.**	**1**	**2**					
3.1.1	Формулировка изопериметрической вариационной задачи. Условия нормальности допустимой кривой.	2	2					собеседование
3.2.	**Необходимое условие минимума в изопериметрической вариационной задаче**.	**2**	**2**					
3.2.1	Необходимые условия первого порядка для локального минимума в изопериметрической вариационной задаче.	2	2					тест
3.3.	**Достаточное условие минимума в изопериметрической вариационной задаче.**	**2**	**4**				**2**	
3.3.1	Применение достаточного условия минимума к простейшим изопериметрическим задачам.	2	4				2	контрольная работа
	ВСЕГО ЗА СЕМЕСТР	**18**	**30**				**6**	
	ВСЕГО ЗА КУРС	**52**	**58**				**12**	

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Заочная и заочная сокращённая формы получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	
1	2	3	4	5	6	7	8
I	**КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ**						
1.	**Введение**	**2**	**1**				
1.1	Общая задача оптимизации.	1					
1.2.	Нахождение минимумов и максимумов функций для задач безусловной оптимизации в конечномерных пространствах	1	1				собеседование
2.	**Принцип множителей Лагранжа в конечномерных пространствах.**	**5**	**2**				
2.1.	Общая задача оптимизации с ограничениями.	1					
2.2.	Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.	1	1				собеседование

2.3.	Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.	1					
2.4.	Достаточное условие экстремума для задач с ограничениями типа равенств.	1					
2.5.	Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями	1	1				собеседование
3.	**Линейное программирование**	**3**	**3**				
3.1.	Задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования	1					
3.2.	Выпуклые множества, их свойства. Теоремы отделимости.	1	1				
3.3.	Крайние точки в канонической линейной задаче. Невырожденные задачи. Симплекс-метод	1	1				тест
3.4	Теория двойственности	1	1				
4.	**Выпуклые задачи оптимизации**	**3**	**2**				
4.1.	Выпуклые функции. Задача выпуклого программирования.	1					
4.2.	Условия оптимальности в задаче выпуклого программирования.	1	1				
4.3.	Условие Слейтера и критерий оптимальности Куна–Таккера.	1	1				собеседование
	ВСЕГО ЗА СЕМЕСТР	**14**	**8**				
II	**ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**						
1.	**Введение.**	**1**					
1.1.	Задачи оптимизации в бесконечномерных пространствах. Задача о брахистохроне.	1					
2.	**Простейшая вариационная задача.**	**4**	**3**				

2.1.	Сильный и слабый экстремумы в простейшей вариационной задаче	1	1				собеседование
2.2.	Необходимые условия локального минимума в простейшей вариационной задаче.	1					
2.3.	Достаточное условие слабого локального минимума в простейшей вариационной задаче.	1	1				собеседование
2.4.	Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума, а также достаточное условие сильного локального минимума в простейшей вариационной задаче.	1	1				тест
3.	**Изопериметрическая вариационная задача.**	**1**	**1**				
3.1.	Локальный минимум в изопериметрической вариационной задаче.	1	1				тест
	ВСЕГО ЗА СЕМЕСТР	**6**	**4**				
	ВСЕГО	**20**	**12**				

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. – Москва: ЛЕНАНД, 2018.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. 2-ое издание. – Минск: Изд–во БГУ, 1981.
3. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – Москва: Изд–во МГУ, 1989.
4. Гороховик В.В. Конечномерные задачи оптимизации. – Минск: 2006.

Перечень дополнительной литературы

1. Ашманов С.А. Линейное программирование. Учебное пособие. – Москва: Наука, 1981.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – Москва: Наука, 1980.
3. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. – М.: Высшая школа, 2005.
4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. – Москва: Наука, 1974.
5. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. – Москва: Наука, 1986. – (Библиотечка “Квант”. Вып. 56).
6. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление: Задачи и примеры с подробными решениями Изд. стереотип. Вариационное исчисление: Задачи и примеры с подробными решениями URSS. 2020. 168 с. ISBN 978-5-397-07717-0.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Формой текущей аттестации по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации» учебным планом предусмотрен зачет и экзамен.

Контроль работы студента проходит в форме собеседования, тестов и контрольных работ в аудитории или выполнения самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории, а также самостоятельной работы вне аудитории с предоставлением отчета с его устной защитой. Задания к контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Оценка за ответы на лекциях (опрос) и семинарских (практических) занятиях может включать в себя полноту ответа, наличие аргументов, и примеров из практики.

Экзамен по дисциплине проходит в устной или письменной форме.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- ответы на практических занятиях – 20 %;
- выполнение тестов – 25 %;
- ответы на собеседованиях – 25 %;
- контрольные работы – 30 %.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов Вес оценка по текущей успеваемости составляет 30 %, экзаменационная оценка – 70 %.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012 г.).
2. Положение о рейтинговой системе оценки знаний студентов по дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ № 189-ОД от 31.03.2020
3. Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 г. № 21-04-1/105).

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Часть I. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Тема 2.2. *Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.*

Студент изучает метод поиска экстремальных точек в задаче условной оптимизации с гладкими ограничениями-равенствами, исследует компактность множества допустимых значений задачи, определяет стационарные точки функции Лагранжа, проверяет выполнение условий оптимальности в найденных точках.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 2.5. *Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями.*

Студент исследует экстремальные задачи со смешанными ограничениями (равенствами и неравенствами), определяет стационарные точки функции Лагранжа, проверяет условия дополняющей нежёсткости и согласования знаков в этих точках, стоит конусы касательных направлений и проверяет достаточные условия минимума и максимума.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 3.3. *Крайние точки в канонической линейной задаче. Невырожденные задачи. Симплекс-метод.*

Студент изучает алгоритм решения задач линейного программирования с помощью симплекс-метода и методы отыскания начального опорного плана: приведение задачи к каноническому виду и метод искусственного базиса, исследует задачу линейного программирования на существование решения, а также на единственность оптимального решения.

Форма контроля – контрольная работа.

Часть II. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 2.3. *Необходимые условия локального минимума в простейшей вариационной задаче.*

Студент изучает постановку изопериметрической задачи, необходимые теоретические сведения относительно поиска локальных экстремумов в этой задаче, выполняет индивидуальное задание по теме.

Форма контроля — проверка индивидуального задания и собеседование.

Тема 2.6. *Достаточное условие сильного локального минимума в простейшей вариационной задаче.*

Студент изучает метод поиска экстремалей простейшей вариационной задачи, решает дифференциальные уравнения Эйлера–Лагранжа, проверяет выполнение необходимых, а также достаточных условий слабого минимума, использует необходимые, а также достаточные условия сильного минимума для определения типа экстремума.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 3.3. *Достаточное условие минимума в изопериметрической вариационной задаче.*

Студент исследует допустимые экстремали изопериметрической задачи, составляет уравнение Эйлера–Лагранжа для функции Лагранжа изопериметрической задачи, проверяет необходимые, а также достаточные условия экстремума для полученных экстремалей.

Форма контроля – контрольная работа.

Примерный перечень заданий для контрольных работ

Раздел I. Контрольная работа №1

1. Определить, является ли компактным множество $M \subset \mathbb{R}^3$, заданное равенствами:

$$x^2 + y = 3, \qquad y^2 + z = 5.$$

2. Исследовать функцию на экстремальные значения:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^3 \to extr.$$

3. Исследовать функцию на экстремумы методом множителей Лагранжа:

$$\begin{cases} x^2 - xy + z^2 \to extr \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Раздел I. Контрольная работа №2

Исследовать функцию на экстремумы методом множителей Лагранжа

1.

$$\begin{cases} x - y - z \to extr \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \\ x + 2y \geqslant 0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x^3 - y^2 + 2 \to extr \\ y \geqslant x^2 \\ x \geqslant 0, y \leqslant 4 \end{cases}$$

Раздел I.Контрольная работа №3

1. Найти минимальное и максимальное значение функции:

$$\begin{cases} x - y \to extr \\ 3x \geqslant y - 4 \\ |x + y| \leqslant 2 \\ y \geqslant -2 \end{cases}$$

2. Найти оптимальный план в задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to min \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leqslant 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geqslant 6 \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Раздел II. Контрольная работа №1

1. Исследовать на экстремум:

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + 12t^3 x + 7)dt \longrightarrow extr \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{13}{10}. \end{cases}$$

2. Исследовать на экстремум:

$$\begin{cases} \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} (2\dot{x}^2 - x^2 + 2tx\dot{x} - 4x\sin t)dt \longrightarrow extr \\ x(0) = 0, \quad x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Раздел II. Контрольная работа №2

Решить изопериметрическую задачу:

$$\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \longrightarrow extr$$

$$\int\limits_0^1 (x - 6t)dt = 0; \quad x(0) = 1, \ x(1) = 6.$$

Примерная тематика практических занятий

Часть I Конечномерные экстремальные задачи

1. Экстремумы функций одной переменной
2. Доказательство неравенств
3. Экстремумы функций нескольких переменных
4. Производная по направлению: определение, контрпримеры
5. Производная по направлениям.
6. Конус допустимых направлений. Необходимые условия экстремума через конус допустимых направлений.
7. Полная дифференцируемость. Необходимые условия экстремума через конус касательных направлений.
8. Линейное программирование: составление задач, графический метод решения.
9. Линейное программирование: графический метод решения с параметром, метод исключения переменных
10. Симплекс-метод.

11. Выпуклые функции, выпуклые множества

12. Выпуклые задачи: теорема Куна-Такера

13. Гладкие задачи с ограничениями типа равенств. Метод множителей Лагранжа.

14. Гладкие задачи с ограничениями типа неравенств.

15. Смешанные гладкие задачи.

16. Доказательство неравенств.

Примерная тематика практических занятий

Часть II. Вариационное исчисление

1. Простейшая вариационная задача.

2. Сильные и слабые экстремумы.

3. Конусы контингентных направлений.

4. Дифференцирование: производные Лагранжа, Гато и Фреше.

5. Необходимые условия локального экстремума. Уравнение Эйлера–Лагранжа.

6. Необходимые условия второго порядка слабого минимума: условие Лежандра, Уравнение Якоби.

7. Достаточные условия слабого минимума. Сопряжённые точки, условие Якоби.

8. Функция Вейерштрасса и необходимые условия сильного минимума.

9. Достаточные условия сильного минимума в простейшей вариационной задаче.

10. Изопериметрическая задача. Функция Лагранжа и допустимые экстремали изопериметрической задачи.

11. Необходимые условия экстремума в изопериметрической задаче.

12. Достаточные условия экстремума в изопериметрической задаче.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется **эвристический** и **практико-ориентированный подходы**, а также **метод учебной дискуссии**, которые предполагают:

– демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;

– творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;

– индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности.

– освоение содержание образования через решения практических задач;

– приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;

– участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;

– выполнение домашнего задания;

– работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;

– изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;

– подготовка к практическим занятиям;

– научно-исследовательские работы;

– подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов к зачёту
Часть I. Конечномерные экстремальные задачи

1. Классификация задач оптимизации.
2. Необходимые условия экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации. Достаточное условие экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации.
3. Теоремы о существовании оптимальных решений
4. Локальный и глобальный минимумы. Дифференцируемость по направлениям, равномерная дифференцируемость по направлениям, полная производная.
5. Конус допустимых и конус касательных направлений; их основные свойства.
6. Необходимые условия локального минимума первого порядка для дифференцируемых и равномерно дифференцируемых по направлениям функций в задаче оптимизации с ограничениями.
7. Дважды вполне дифференцируемые функции.
8. Необходимые, а также достаточные условия второго порядка для точек

локального минимума в общей задаче оптимизации с ограничениями.
9. Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.
10. Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.
11. Достаточное условие экстремума для задач с ограничениями типа равенств
12. Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями.
13. Формулировка задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация.
14. Выпуклые множества и их основные свойства.
15. Отделимость выпуклых множеств. Теоремы об отделимости.
16. Опорные гиперплоскости. Крайние точки множества.
17. Линейное программирование. Примеры задач. Основные определения и свойства. Точки экстремума в задаче линейного программирования.
18. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделяющей гиперплоскости для замкнутого множества.
19. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделяющей гиперплоскости для произвольного (не обязательно замкнутого) множества.
20. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделении двух множеств.
21. Выпуклый конус. Теорема об опорной гиперплоскости к выпуклому конусу.
22. Двойственный, бидвойственный конусы. Их свойства.
23. Выпуклые линейные комбинации, выпуклая оболочка.
24. Невырожденные линейные задачи. Начальный опорный план.
25. Графический метод решения задач линейного программирования.
26. Симплекс-метод.
27. Метод искусственного базиса (w-задача).
28. Двойственная задача линейного программирования. Теорема двойственности.
29. Выпуклые функции и их простейшие свойства. Непрерывность выпуклых функций.
30. Непрерывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций.
31. Непрерывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций.
32. Критерий оптимальности решений выпуклой задачи оптимизации.
33. Задача выпуклого программирования. Геометрический критерий оптимальности решений в задаче выпуклого программирования.
34. Условия оптимальности для решений задачи выпуклого программирования.
35. Условие регулярности Слейтера и критерий оптимальности Куна–Таккера.

Примерный перечень вопросов к экзамену
Часть II. Вариационное исчисление

1. Задача о брахистохроне.
2. Формулировка простейшей вариационной задачи. Определение сильного и слабого локальных экстремумов.
3. Нормированные пространства вектор–функций. Сравнение различных норм.
4.Интегральные функционалы, определенные на нормированных пространствах вектор–функций.
5. Дифференцирование функций и отображений, определенных на нормированных пространствах. Определения первой и второй вариации Лагранжа. Производные Гато и Фреше.
6. Дифференциальные свойства интегральных функционалов. Общий вид первой и второй вариации интегрального функционала.
7. Условия локального минимума первого и второго порядка для функций, определенных на нормированных пространствах. Особенности достаточных условий локального минимума в бесконечномерных пространствах.
8. Необходимые условия первого и второго порядка для локального минимума простейшей вариационной задачи в терминах вариаций целевого функционала.
9. Теория первой вариации. Интегральное и дифференциальное уравнения Эйлера.
10. Условие Вейерштрасса–Эрдмана.
11. Теорема Гильберта.
12. Теория второй вариации. Условия неотрицательности (положительности) квадратичного интегрального функционала на пространствах вектор-функций.
13. Необходимое условие Лежандра.
14. Необходимое условие Якоби.
15. Достаточное условие Якоби слабого локального минимума в простейшей вариационной задаче.
16. Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума в простейшей вариационной задаче без доказательства).
17. Формулировка изопериметрической вариационной задачи. Условия нормальности допустимой кривой.
18. Необходимые условия первого порядка для локального минимума в изопериметрической вариационной задаче.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Дифференциальные уравнения	Дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 04.06.2020)
Функциональный анализ	Функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 04.06.2020)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
________________________________ (протокол № ____ от ________ 2020 г.)

Заведующий кафедрой
_______________________ ________________ ____________________

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
_______________________ ________________ ____________________