

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**УТВЕРЖДАЮ**  
Проректор по учебной работе  
и образовательным инновациям  
О.Н.Здрок  
2020 г.  
Регистрационный № УД- 897/уч.

**КОМБИНАТОРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И  
ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:**

**1-31 03 08 Математика и информационные технологии  
направления специальности:**

1-31 03 08-01 Веб-программирование и интернет-технологии,

1-31 03 08-02 Математическое и программное обеспечение мобильных устройств

2020г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 08-2013 и учебных планов, № G31-195/уч., № G31-196/уч., G31и-207/уч., G31з-197/уч., G31з-198/уч., G31з-199/уч., G31з-212/уч., G31з-213/уч. от 30.05.2014 по специальности 1-31 03 08 Математика и информационные технологии.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**Бахтин Виктор Иванович**, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

**Иванишко Ия Александровна**, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.

**Лебедев Андрей Владимирович**, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

**Пиндрик Ольга Исааковна**, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**Пономарева Светлана Владимировна**, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**Ромашенко Галина Станиславовна**, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**Пыжкова Ольга Николаевна**, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент;

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики (протокол № 12 от 04.06.2020);

Научно-методическим Советом БГУ (протокол № 5 от 17.06.2020)

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ А.В. Лебедев

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### Цели и задачи учебной дисциплины

**Цель** учебной дисциплины – повышение уровня профессиональной компетентности в исследовании проблем оптимизации сложной организационной деятельности и разрешении конфликтных ситуаций в социальных и производственных структурах.

**Образовательная цель:** изложение методов разработки алгоритмов оптимизации в задачах управления сложными технологическими процессами.

**Развивающая цель:** формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, построение математических моделей сложных технологических процессов и изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

### Задачи учебной дисциплины:

1. Привить навыки построения математических моделей различных прикладных задач либо с помощью теории графов.
2. Изучить место других методов дискретной оптимизации и методов теории игр в решении практических экономических задач.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к циклу специальных дисциплин (компонент учреждения образования)

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Изучение дисциплины базируется на знаниях дисциплины «Алгебра и теория чисел». Дисциплина имеет тесную связь с курсами «Построение и анализ алгоритмов», «Дискретная математика и теория графов», «Методы оптимизации».

### Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Комбинаторное моделирование и исследование операций» должно обеспечить формирование следующих академических, социально-личностных и профессиональных компетенций

**академические** компетенции:

- АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.
- АК-3. Владеть исследовательскими навыками.
- АК-4. Уметь работать самостоятельно.
- АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.
- АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

**социально-личностные** компетенции:

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

**профессиональные компетенции:**

ПК-4. Самостоятельно работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой, в том числе с доступной в компьютерных сетях.

ПК-18. Готовить доклады, материалы к презентациям.

ПК-19 Пользоваться глобальными информационными ресурсами.

ПК-20 Владеть современными средствами телекоммуникаций.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

**знать:**

- приложения линейного программирования в исследовании операций;
- точные и эвристические алгоритмы решения задач целочисленного программирования;
- основные методы понижения размерности задач;
- основные понятия теории игр и теории расписаний;
- понятия и алгоритмы, связанные с дискретными задачами оптимизации, которые формулируются на языке ориентированных графов;
- методы динамического программирования;
- основные понятия и методы теории принятия решений.

**уметь:**

- использовать симплекс-метод для решения задач линейного программирования;
- строить модели комбинаторных задач в терминах линейного и целочисленного программирования;
- использовать основные методы и алгоритмы теории математического программирования для решения задач дискретной оптимизации;
- применять основные методы теории расписаний;
- строить математические модели дискретных задач оптимизации, задач динамического программирования, линейного программирования;
- решать задачи дискретной оптимизации, динамического программирования, линейного программирования.

**владеть:**

- методами решения экстремальных задач теории графов;
- методами исследования сетевых моделей.

### **Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 5,6 семестрах дневной формы получения высшего образования и в 7,8,9 семестрах заочной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Комбинаторное моделирование и исследование операций» отведено:

- для очной формы получения высшего образования – 214 часов, в том числе 104 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часов, практические занятия – 62 часа, управляемая самостоятельная работа – 8 часов:

– в 5 семестре 92 часа, в том числе аудиторных занятий – 54 часа, из них лекции – 18 часов, практические занятия – 32 часа, УСП – 4 часов.

Трудовое количество учебной дисциплины составляет 2 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет;

– в 6 семестре 122 часа, в том числе аудиторных занятий – 50 часов, из них лекции – 16 часов, практические занятия – 30 часов, УСП – 4 часа.

Трудовое количество учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

– для заочной и заочной сокращенной формы получения высшего образования – 26 аудиторных часов, из них 14 часов лекций и 12 часов практических занятий.

– в 7 семестре 156 часов, в том числе аудиторных занятий – 14 часов, из них лекции – 8 часов, практические занятия – 6 часов.

– в 8 семестре 12 часов, в том числе аудиторных занятий – 12 часов, из них лекции – 6 часов, практические занятия – 6 часов.

– в 9 семестре контрольная работа.

Трудовое количество учебной дисциплины составляет 5 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации – зачет в 8 семестре, экзамен в 9 семестре

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## Раздел 1. Экстремальные задачи на графах

**Тема 1.1.** Элементарные понятия, связанные с неориентированными графами.

**Тема 1.2.** Элементарные понятия, связанные с ориентированными графами.

**Тема 1.3.** Алгоритмы нахождения минимального расстояния между фиксированной вершиной и остальными, и между любыми двумя вершинами.

**Тема 1.4.** Сети, потоки.

**Тема 1.5.** Метод ветвей и границ.

## Раздел 2. Сетевое планирование

**Тема 2.1.** Сетевое планирование.

**Тема 2.2.** Pert-анализ, методы оптимизации работ над проектом.

## Раздел 3. Динамическое программирование

**Тема 3.1.** Основные понятия динамического программирования.

**Тема 3.2.** Решение задачи о рюкзаке при помощи методов динамического программирования.

**Тема 3.3.** Задача о распределении ресурсов (дискретный и непрерывный случай).

## Раздел 4. Приложения линейного программирования в исследовании операций

**Тема 4.1.** Транспортная задача.

**Тема 4.2.** Задача о назначении.

**Тема 4.3.** Целочисленное программирование.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	<b>5 семестр</b>							
<b>1</b>	<b>Экстремальные задачи на графах</b>	<b>18</b>	<b>32</b>				<b>4</b>	
<b>1.1</b>	<b>Элементарные понятия, связанные с неориентированными графами.</b>	<b>5</b>	<b>8</b>					
1.1.1	Неориентированные графы. Способы задания графов. Операции над графами.	2	2					
1.1.2	Деревья. Алгоритмы построения остовного дерева минимального веса.	2	4					
1.1.3	Эйлеровый цикл	1	2					
<b>1.2</b>	<b>Элементарные понятия, связанные с ориентированными графами.</b>	<b>2</b>	<b>2</b>					
1.2.1	Ориентированные графы. Маршруты, цепи, циклы.	2	2					
<b>1.3</b>	<b>Алгоритмы нахождения минимального расстояния между фиксированной вершиной и остальными, и между любыми двумя вершинами</b>	<b>5</b>	<b>10</b>				<b>2</b>	
1.3.1	Задача о нахождении кратчайшей цепи между двумя заданными вершинами. Алгоритм Дейкстры. Поиск всех кратчайших путей в графе.	2	4				2	Проверка индивидуальных заданий
1.3.2	Алгоритм Флойда. Нахождение отрицательных циклов в графе. Задача об узких местах.	3	6					
<b>1.4</b>	<b>Сети, потоки.</b>	<b>4</b>	<b>7</b>				<b>2</b>	

1.4.1	Мощность потока, разрезы, дивергенция на разрезе, пропускная способность разреза. Теорема о разложении положительного потока. Алгоритмы нахождения потока максимальной мощности (алгоритм Форда-Фалкерсона)	2	3				2	Проверка индивидуальных заданий
1.4.2	Алгоритмы нахождения потоков заданной мощности, минимальной стоимости (алгоритмы Басакера-Гоуэна, Клейна).	2	4					
<b>1.5</b>	<b>Метод ветвей и границ.</b>	<b>2</b>	<b>5</b>					
1.5.1	Гамильтоновы циклы. Задача коммивояжера и алгоритм Литтла.	2	5					
	<b>Всего за семестр</b>	<b>18</b>	<b>32</b>				<b>4</b>	
	<b>6 семестр</b>							
<b>2</b>	<b>Сетевое планирование.</b>	<b>4</b>	<b>10</b>					
<b>2.1</b>	<b>Сетевое планирование.</b>	<b>2</b>	<b>6</b>					
2.1.1	Сетевые модели. Алгоритм построения сетевой модели.	1	2					
2.1.2	Критический путь, критическое время. Распределение ресурсов.	1	4					
<b>2.2</b>	<b>Pert-анализ, методы оптимизации работ над проектом.</b>	<b>2</b>	<b>4</b>					
2.2.1	Pert-анализ, методы оптимизации работ над проектом.	2	4					
<b>3</b>	<b>Динамическое программирование</b>	<b>6</b>	<b>12</b>				<b>2</b>	
<b>3.1</b>	<b>Основные понятия динамического программирования.</b>	<b>2</b>	<b>2</b>					
3.1.1	Состояние, шаг, управление, оптимальное управление, условно оптимальное управление. Рекуррентные соотношения, уравнение Беллмана.	2	2				1	Проверка индивидуальных заданий
<b>3.2</b>	<b>Решение задачи о рюкзаке при помощи методов динамического программирования.</b>	<b>2</b>	<b>4</b>					
3.2.1	Решение задачи о рюкзаке.	2	4					
<b>3.3</b>	<b>Задача о распределении ресурсов</b>	<b>2</b>	<b>6</b>					
3.3.1	Задача о распределении ресурсов (дискретный и непрерывный случай).	2	6				1	Контрольная работа
<b>4</b>	<b>Приложения линейного программирования в</b>	<b>6</b>	<b>12</b>				<b>2</b>	



	<b>исследовании операций</b>							
<b>4.1</b>	<b>Транспортная задача</b>	<b>4</b>	<b>6</b>					
4.1.1	Методы нахождения начального решения: метод северо-западного угла, метод двойного предпочтения	2	2					
4.1.2	Метод наименьшей стоимости, метод Фогеля, метод потенциалов	2	4					
<b>4.2</b>	<b>Задача о назначении</b>	<b>1</b>	<b>2</b>					
4.2.1	Интерпретация задачи как задачи линейного программирования. Венгерский алгоритм.	1	2				2	Контрольная работа
<b>4.3</b>	<b>Целочисленное программирование.</b>	<b>1</b>	<b>4</b>					
4.3.1	Примеры задач целочисленного программирования. Метод Гомори.	1	4					
	<b>Всего за семестр</b>	<b>16</b>	<b>30</b>				<b>4</b>	
	<b>Всего по курсу</b>	<b>34</b>	<b>62</b>				<b>8</b>	

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
 Заочная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	<b>7 семестр</b>							
<b>1</b>	<b>Экстремальные задачи на графах</b>	<b>8</b>	<b>6</b>					
<b>1.1</b>	<b>Элементарные понятия, связанные с неориентированными графами.</b>	<b>2</b>	<b>2</b>					
1.1.1	Неориентированные графы. Способы задания графов. Операции над графами.	1						
1.1.2	Деревья. Алгоритмы построения остовного дерева минимального веса.	1	1					
1.1.3	Эйлеровый цикл		1					
<b>1.2</b>	<b>Элементарные понятия, связанные с ориентированными графами.</b>	<b>1</b>						
1.2.1	Ориентированные графы. Маршруты, цепи, циклы.	1						
<b>1.3</b>	<b>Алгоритмы нахождения минимального расстояния между фиксированной вершиной и остальными, и между любыми двумя вершинами</b>	<b>2</b>	<b>1</b>					
1.3.1	Задача о нахождении кратчайшей цепи между двумя заданными вершинами. Алгоритм Дейкстры. Поиск всех кратчайших путей в графе.	1						
1.3.2	Алгоритм Флойда. Нахождение отрицательных циклов в графе. Задача об узких местах.	1	1					Контрольная работа

<b>1.4</b>	<b>Сети, потоки.</b>	<b>2</b>	<b>2</b>					
1.4.1	Мощность потока, разрезы, дивергенция на разрезе, пропускная способность разреза. Теорема о разложении положительного потока. Алгоритмы нахождения потока максимальной мощности (алгоритм Форда-Фалкерсона)	1	1					
1.4.2	Алгоритмы нахождения потоков заданной мощности, минимальной стоимости (алгоритмы Басакера-Гоуэна, Клейна).	1	1					
<b>1.5</b>	<b>Метод ветвей и границ.</b>	<b>1</b>	<b>1</b>					
1.5.1	Гамильтоновы циклы. Задача коммивояжера и алгоритм Литтла.	1	1					Контрольная работа
	<b>Всего за семестр</b>	<b>8</b>	<b>6</b>					
	<b>8 семестр</b>							
<b>2</b>	<b>Сетевое планирование.</b>	<b>2</b>	<b>1</b>					
<b>2.1</b>	<b>Сетевое планирование.</b>	<b>1</b>	<b>1</b>					
2.1.1	Сетевые модели. Алгоритм построения сетевой модели.		1					
2.1.2	Критический путь, критическое время. Распределение ресурсов.	1						
<b>2.2</b>	<b>Pert-анализ, методы оптимизации работ над проектом.</b>	<b>1</b>						
2.2.1	Pert-анализ, методы оптимизации работ над проектом.	1						
<b>3</b>	<b>Динамическое программирование</b>	<b>2</b>	<b>3</b>					
<b>3.1</b>	<b>Основные понятия динамического программирования.</b>	<b>1</b>	<b>1</b>					
3.1.1	Состояние, шаг, управление, оптимальное управление, условно оптимальное управление. Рекуррентные соотношения, уравнение Беллмана.	1	1					
<b>3.2</b>	<b>Решение задачи о рюкзаке при помощи методов динамического программирования.</b>		<b>1</b>					
3.2.1	Решение задачи о рюкзаке.		1					
<b>3.3</b>	<b>Задача о распределении ресурсов</b>	<b>1</b>	<b>1</b>					

3.3.1	Задача о распределении ресурсов (дискретный и непрерывный случай).	1	1					Контрольная работа
<b>4</b>	<b>Приложения линейного программирования в исследовании операций</b>	<b>2</b>	<b>2</b>					
<b>4.1</b>	<b>Транспортная задача</b>	<b>1</b>	<b>1</b>					
4.1.1	Методы нахождения начального решения: метод северо-западного угла, метод двойного предпочтения	1						
4.1.2	Метод наименьшей стоимости, метод Фогеля, метод потенциалов		1					
<b>4.2</b>	<b>Задача о назначении</b>		<b>1</b>					
4.2.1	Интерпретация задачи как задачи линейного программирования. Венгерский алгоритм.		1					Контрольная работа
<b>4.3</b>	<b>Целочисленное программирование.</b>	<b>1</b>						
4.3.1	Примеры задач целочисленного программирования. Метод Гомори.	1						
	<b>Всего за семестр</b>	<b>6</b>	<b>6</b>					
	<b>Всего по курсу</b>	<b>14</b>	<b>12</b>					

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Бахтин В.И., Коваленок А.П., Лебедев А.В., Лысенко Ю.В. Исследование операций. – Минск, БГУ, 2003.
2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. – Москва: Наука, 1990.
3. Вентцель Е.С. Элементы динамического программирования. – Москва: Наука, 1961.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций. - Москва: Высшая школа, 2001.
5. Таха Х.А. Введение в исследование операций. - Изд.дом: Вильямс, 2005.
6. Альсевич В.В., Крахотко В.В. Методы оптимизации: задачи и упражнения. – Минск, БГУ, 2005.
7. Ашманов С.А. Линейное программирование.- Москва: Наука, 1981.
8. Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию - Москва: Наука, 1969.
9. Мицель А.А. Исследование операций и методы оптимизации. Часть 1. Лекционный курс. ТОМСК: Изд. ТГУ, 2016. – 167 с.

### Перечень дополнительной литературы

10. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. 1977.
11. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. 1974.
12. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. 1974.
13. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. 1966.
14. Харари Ф. Теория графов. 1973.
15. Оре О. Теория графов. 1980.
16. Мулен Р. Теория игр и экономические приложения. 1979.
17. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. 1970.
18. Льюис Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. 1961.
19. Оуэн Г. Теория игр. 1971.
20. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М., Высшая школа, 1998.

## **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки**

Формой текущей аттестации по дисциплине «Комбинаторное моделирование и исследование операций» учебным планом предусмотрен зачет в 5 семестре, экзамен в 6 семестре дневной формы обучения и зачет в 8 семестре, экзамен в 9 семестре заочной формы обучения.

Контроль работы студента проходит в форме собеседования, контрольной работы в аудитории или выполнения самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории, а также самостоятельной работы вне аудитории с предоставлением отчета с его устной защитой. Задания к контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- выполнение контрольных работ – 70 %;
- подготовка и защита индивидуального задания – 30 %.

Экзамен по дисциплине проходит в устной или письменной форме.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов Вес оценки по текущей успеваемости составляет 30 %, оценка на экзамене – 70 %.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012 г.).

2. Положение о рейтинговой системе оценки знаний студентов по дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ № 189-ОД от 31.03.2020).

3. Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 г. № 21-04-1/105).

## **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

### **Тема 1.3.**

*Алгоритмы нахождения минимального расстояния между фиксированной вершиной и остальными, и между любыми двумя вершинами.*

Студент изучает алгоритмы нахождения кратчайшего пути в ориентированном графе, анализирует возможность их применения по отношению к индивидуальному заданию. Исполняет индивидуальное задание, используя оптимальный алгоритм.

*Форма контроля — проверка индивидуального задания.*

### **Тема 1.4. Сети, потоки.**

Студент изучает понятия и факты, касающиеся сетей и потоков. Анализирует известные ему алгоритмы построения оптимальных потоков в сетях, отбирает те, которые могут быть применены к полученному индивидуальному заданию. Выполняет индивидуальное задание по теме.

*Форма контроля — проверка индивидуального задания.*

### **Тема 3.1. Основные понятия динамического программирования.**

Студент изучает основные компоненты динамического программирования. Анализирует индивидуальное задание, выбирает адекватное разделение задачи на этапы, определяет возможные состояния системы, выписывает рекуррентное соотношение. Выполняет индивидуальное задание по теме.

*Форма контроля — проверка индивидуального задания.*

### **Тема 3.3. Задача о распределении ресурсов**

Студент изучает дискретный и непрерывный случай распределения ресурсов. Анализирует индивидуальное задание, Выполняет индивидуальное задание по теме. Выполняет индивидуальное задание по теме.

*Форма контроля — контрольная работа.*

### **Тема 4.2. Задача о назначении**

Найти начальные решения транспортной задачи методами северо-западного угла, наименьшей стоимости и методом Фогеля. Сравнить полученные результаты. Найти решение ТЗ методом потенциалов.

*Форма контроля — контрольная работа.*

## Примерная тематика практических занятий

### 5 семестр

1. Элементарные понятия, связанные с неориентированными графами. Решение олимпиадных задач с помощью теории графов, построение матриц, задающих граф. Операции с графами.
2. Граф-дерево. Решение задач. Коды Прюфера.
3. Построение остовного дерева минимального веса. Алгоритмы Прима, Краскала и др.
4. Эйлеровы графы, алгоритм построения эйлерового цикла.
5. Элементарные понятия, связанные с ориентированными графами.
6. Алгоритмы нахождения минимального расстояния между фиксированной вершиной и остальными, и между любыми двумя вершинами. Алгоритм Дийкстры.
7. Модифицированный алгоритм Дийкстры.
8. Алгоритм Флойда.
9. Применение алгоритма Флойда для нахождения в графе циклов отрицательной длины.
10. Сети, потоки. Определение допустимого потока, мощности потока.
11. Алгоритм Форда-Фалкерсона построения максимального потока в сети.
12. Применение модификации алгоритма Форда-Фалкерсона для задачи поиска «узких мест».
13. Модификации алгоритма Форда-Фалкерсона для сетей с несколькими источниками и стоками, неориентированными ребрами, пропускными способностями вершин и т. п.
14. Алгоритмы построения потоков минимальной стоимости заданной мощности. Алгоритм Басакера-Гоуэна.
15. Алгоритм Клейна.
16. Метод ветвей и границ. Алгоритм Литтла на примере решения задачи коммивояжера.

### 6 семестр

1. Сетевое планирование. Метод критического пути. Нахождение характеристик проекта, критических работ, определение резервов.
2. Построение Гант-карты проекта на основе потребностей в ресурсах. Оптимизация плана проекта при ограниченных ресурсах.
3. Pert-анализ проекта.
4. Методы оптимизации работ над проектом с точки зрения длительности, потребности в ресурсах. Понятие «буфера».
5. Основные понятия динамического программирования. Применение динамического программирования к задаче нахождения кратчайшего расстояния на графе.



6. Решение задачи о рюкзаке при помощи методов динамического программирования.
7. Решение задачи о распределении ресурсов (дискретный случай).
8. Задача о распределении ресурсов (непрерывный случай).
9. Задача замены оборудования. Задача планирования рабочей силы.
10. Транспортная задача. Балансировка задачи. Построение опорного плана методом северо-западного угла.
11. Построение опорного плана методами двойного предпочтения, минимального элемента, Фогеля. Анализ полученных решений.
12. Метод потенциалов. Определение оптимальности плана перевозок.
13. Задача о назначении. Венгерский алгоритм.
14. Целочисленное программирование. Метод Гомори.

## **Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса используется **эвристический и практико-ориентированный подходы**, которые предполагают:

- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры
- анализ ситуации, с использованием профессиональных знаний, собственного опыта, дополнительной литературы и иных источников.

Также **используется метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Все результаты и достижения группируются на основе основных видов деятельности студентов: учебной, научно-исследовательской и иной. Методы обеспечивают появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения. Также они представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления и являются организацией учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
- подготовка к практическим семинарским занятиям;
- научно-исследовательские работы;
- подготовка и написание рефератов, докладов, эссе и презентаций на заданные темы;
- подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

## Темы реферативных работ

1. Анализ алгоритмов построения минимального остовного дерева.
2. Решение олимпиадных задач с помощью теории графов.
3. Анализ программных продуктов, в которых реализован метод критического пути.
4. Анализ программных продуктов, которые используются для PERT-анализа.
5. Модификации постановки транспортной задачи.
6. Взаимосвязь симплекс-метода и метода потенциалов решения транспортной задачи.
7. Методы оптимизации чернового расписания проекта с точки зрения продолжительности и необходимых ресурсов.
8. Применение динамического программирования к решению задач на графах.
9. Анализ алгоритмов построения потоков минимальной стоимости в сети.

## Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Ориентированные графы. Задача о построении кратчайшего пути между двумя заданными вершинами. Алгоритм Дейкстры.
2. Задача о построении кратчайших путей между любыми двумя вершинами. Алгоритм Флойда.
3. Модификации алгоритма Флойда.
4. Сети, потоки, разрезы, дивергенция, мощность потока. Их элементарные свойства.
5. Теорема о разложении положительной циркуляции.
6. Теорема о разложении положительного потока.
7. Потоки максимальной мощности. Пропускная способность разреза.
8. Теорема Форда-Фалкерсона о потоке максимальной мощности.
9. Построение максимальных потоков. Алгоритм Форда-Фалкерсона.
10. Задачи, сводящиеся к алгоритму Форда-Фалкерсона.
11. Потоки минимальной стоимости. Критерий оптимальности потока фиксированной мощности.
12. Алгоритм Басакера-Гоуэна.
13. Алгоритм Клейна.
14. Метод ветвей и границ. Алгоритм Литтла.
15. Метод ветвей и границ в задаче коммивояжера.
16. Метод управления проектами. Сетевая модель, алгоритм построения сетевой модели.
17. Критическое время, критический путь в сетевой модели. Гант-карта.
18. Динамическое программирование. Идея методов динамического программирования. Уравнение Беллмана.
19. Задача коммивояжера с точки зрения динамического программирования.
20. Задача о распределении ресурсов с точки зрения динамического программирования.
21. Транспортная задача.
22. Задача о назначении.

## ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

### Контрольная работа №1

1. Найти кратчайшие пути от вершины  $S$  до всех остальных вершин.
2. Построить максимальный поток и указать минимальный разрез в сети.
3. Построить поток мощности  $m$  минимальной стоимости с помощью алгоритма Клейна. Доказать, что стоимость минимальна.
4. Докажите, что положительный поток положительной мощности можно разложить в сумму элементарных положительных потоков вдоль контуров и вдоль путей, идущих от источника к стоку (считая, что в сети один источник и один сток)

### Контрольная работа №2

#### ВАРИАНТ № 1

1. Найти все решения задачи коммивояжера, определяемой матрицей стоимостей

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 7 & 5 & 7 \\ 4 & \infty & 5 & 4 & 10 \\ 5 & 4 & \infty & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 5 & \infty & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

2. Построить сетевую модель, найти критический путь и построить график распределения трудовых ресурсов.

№	Каким работам предшествует	Сроки выполнения	Потребность в рабочей силе
1	2	9	6
2	—	5	9
3	6, 10, 11	7	4
4	3, 5	5	7
5	6, 11	6	5
6	2	7	5
7	6, 10, 11	8	4
8	6, 10, 11	5	3
9	1, 8	3	8
10	2	9	3
11	—	8	8

3. В условиях предыдущей задачи
  - а) оптимизировать распределение трудовых ресурсов;
  - б) составить оптимальный график работ, при котором потребность в рабочей силе не превосходит 17.
4. Доказать, что если мощность потока  $f$  в сети положительна, то его можно разложить в сумму элементарных положительных потоков вдоль контуров и путей, ведущих из  $s$  в  $t$ .

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Вариационное исчисление и методы оптимизации	Функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (прот. № 12 от 04.06.2020)
Теория вероятностей и математическая статистика	Функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (прот. № 12 от 04.06.2020)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО  
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_