БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям
_________________ О.Н.Здрок
«_30_» _июня_ 2020 г.
Регистрационный № УД-_8911_/уч.

ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 01 Математика (по направлениям)
Направление специальности
1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность)

2020 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01 -2013 и учебного плана № G31-209/уч. от 29.05.2015 по специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям), направление специальности 1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность)

СОСТАВИТЕЛИ:
Бахтин Виктор Иванович, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;
Лебедев Андрей Владимирович, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;
Пиндрик Ольга Исааковна, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;
Тыкун Александр Станиславович, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
Пыжкова Ольга Николаевна, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики
(протокол № 12 от 04.06.2020);

Научно-методическим Советом БГУ

(протокол № 5 от 17.06.2020)

Заведующий кафедрой __________________________А.В. Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Основы ВИ и МО» – повышение уровня профессиональной компетентности в решении проблем оптимизации в различных сферах трудовой деятельности.

Образовательная цель: изложение методов разработки алгоритмов оптимизации в задачах управления сложными технологическими процессами.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, построение математических моделей сложных технологических процессов и изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

Задачи учебной дисциплины:

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Основы ВИ и МО», состоят в обучении методам решения экстремальных задач в конечномерных пространствах, а также в привитии навыков составления математических моделей, которые наилучшим образом соответствуют конкретной прикладной задаче и имеют строгие математические решения.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к циклу специальных дисциплин (дисциплин по выбору студента)

компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Для изучения дисциплины необходимы знания понятий и фактов следующих дисциплин: “Математический анализ» (сходимость последовательностей, непрерывность и дифференцирование функций нескольких переменных, теорема о неявной функции, теорема Вейерштрасса).

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Основы ВИ и МО» должно обеспечить формирование следующих академических и профессиональных компетенций:

Академические компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

Профессиональные компетенции:

ПК-3. Применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности и в областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности.

ПК-9. Осуществлять выбор оптимального варианта проведения научноисследовательских работ.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

— теоремы о существовании точек минимума (максимума) для функций на подмножествах конечномерных пространств;

— необходимые, а также достаточные условия первого и второго порядков для точек локального минимума (максимума) функций на подмножествах конечномерных пространств;

— основы выпуклого анализа и методы исследования выпуклых задач оптимизации;

— теорию выпуклого и линейного программирования;

— теорию нелинейного программирования.

уметь:

— находить точки минимума и максимума для функций, определенных на конечномерных пространствах;

— строить модели экстремальных задач в конечномерных пространствах;

— с помощью дифференциальных критериев выпуклости проверять, является ли заданная функция выпуклой;

— использовать условия оптимальности и критерий Куна–Таккера для решения задач выпуклого программирования;

— использовать симплекс-метод для решения задач линейного программирования;

— использовать условия оптимальности первого и второго порядка для решения задач нелинейного программирования.

владеть:

— навыками описания математической модели прикладной задачи, а также ее решения методом множителей Лагранжа, симплекс-методом (в случае задачи линейного программирования) и используя результаты теории выпуклого программирования (если задача является выпуклой).

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Основы ВИ и МО» отведено:

— для очной формы получения высшего образования — 118 часов, в том числе 70 аудиторных часов, из них: лекции — 36 часов, практические занятия — 28 часов, управляемая самостоятельная работа — 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации — зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Введение

Тема 1.1.
Общая задача оптимизации.
Тема 1.2.
Нахождение минимумов и максимумов функций для задач безусловной оптимизации в конечномерных пространствах.

Раздел 2. Принцип множителей Лагранжа в конечномерных пространствах.

Тема 2.1.
Общая задача оптимизации с ограничениями.
Тема 2.2.
Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.
Тема 2.3.
Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.
Тема 2.4.
Достаточное условие экстремума для задач с ограничениями типа равенств.
Тема 2.5.
Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями.

Раздел 3. Линейное программирование

Тема 3.1.
Задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.
Тема 3.2.
Выпуклые множества, их свойства. Теоремы отделимости.
Тема 3.3.
Крайние точки в канонической линейной задаче. Невырожденные задачи. Симплекс-метод.
Тема 3.4
Теория двойственности.

Раздел 4. Выпуклые задачи оптимизации

Тема 4.1.
Выпуклые функции. Задача выпуклого программирования.
Тема 4.2.
Условия оптимальности в задаче выпуклого программирования.
Тема 4.3.
Условие Слейтера и критерий оптимальности Куна–Таккера.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов						Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	Количество часов УСР	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	**Введение**	**4**	**2**					
1.1	**Общая задача оптимизации.**	**2**						
1.1.1.	Предмет курса, история, связь с другими математическими дисциплинами, значение и роль в естествознании, экономических, технических, социальных науках и их приложениях. Основные определения и понятия. Классификация задач оптимизации.	2						собеседование
1.2.	**Нахождение минимумов и максимумов функций для задач безусловной оптимизации в конечномерных пространствах**	**2**	**2**					
1.2.1.	Необходимые условия экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации. Достаточное условие экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации. Верхний и нижний пределы числовых последовательностей и функций. Полунепрерывные функции. Теоремы о существовании оптимальных решений	2	2					тест опрос
2.	**Принцип множителей Лагранжа в конечномерных пространствах.**	**14**	**12**				**4**	
2.1.	**Общая задача оптимизации с ограничениями.**	**4**	**3**					
2.1.1	Локальный и глобальный минимумы. Дифференцируемость по направлениям, равномерная дифференцируемость по	2	1					собеседование

	направлениям, полная производная. Конус допустимых и конус касательных направлений; их основные свойства. Необходимые условия локального минимума первого порядка для дифференцируемых и равномерно дифференцируемых по направлениям функций в задаче оптимизации с ограничениями.							
2.1.2.	Достаточное условие строгого локального минимума для равномерно дифференцируемых функций в общей задаче оптимизации с ограничениями. Дважды вполне дифференцируемые функции. Необходимые, а также достаточные условия второго порядка для точек локального минимума в общей задаче оптимизации с ограничениями	2	2					тестопрос
2.2.	**Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.**	**2**	**2**				**2**	
2.2.1.	Формулировка принципа Лагранжа для гладких конечномерных задач с ограничениями типа равенств. Примеры решения задач.	2	2				2	контрольная работа
2.3.	**Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.**	**4**	**3**					
2.3.1.	Формулировка принципа Лагранжа для гладких конечномерных задач с ограничениями типа равенств и неравенств. Доказательство принципа Лагранжа.	2	1					собеседование
2.3.2.	Примеры решения задач.	2	2					тест .
2.4.	**Достаточное условие экстремума для задач с ограничениями типа равенств.**	**2**	**2**					
2.4.1.	Применение достаточного условия для задач с ограничениями типа равенств.	2	2					собеседование
2.5.	**Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями**	**2**	**2**				**2**	
2.5.1	Применение достаточного условия для задач с ограничениями типа равенств и неравенств. Доказательство достаточного условия.	2	2				2	контрольная работа
3.	**Линейное программирование**	**10**	**8**				**2**	

3.1.	**Задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования**	**2**	**2**					
3.1.1	Формулировка задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация. Геометрический метод решения линейных задач для случая функций двух переменных.	2	2					собеседование
3.2.	**Выпуклые множества, их свойства. Теоремы отделимости.**	**2**	**1**					
3.2.1	Выпуклые множества. Отделимость выпуклых множеств. Теоремы об отделимости. Опорные гиперплоскости.	2	1					собеседование
3.3.	**Крайние точки в канонической линейной задаче. Невырожденные задачи. Симплекс-метод**	**4**	**4**				**2**	
3.1	Крайние точки множества. Невырожденные линейные задачи. Невырожденные линейные задачи.	2	2					собеседование
3.2	Начальный опорный план. Метод нахождения начального опорного плана.	2	2				2	контрольная работа
3.4	**Теория двойственности**	**2**	**1**					
3.4.1	Двойственная задача линейного программирования. Теорема двойственности	2	1					тест опрос
4.	**Выпуклые задачи оптимизации**	**8**	**6**					
4.1.	**Выпуклые функции. Задача выпуклого программирования.**	**4**	**3**					
4.1.1.	Выпуклые функции и их простейшие свойства. Непрерывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций. Непрерывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций. Критерий оптимальности решений выпуклой задачи оптимизации.	2	1					собеседование
4.1.2.	Задача выпуклого программирования. Геометрический критерий оптимальности решений в задаче выпуклого программирования.	2	2					собеседование
4.2.	**Условия оптимальности в задаче выпуклого программирования.**	**2**	**1**					

4.2.1.	Условия оптимальности для решений задачи выпуклого программирования.	2	1					собеседование
4.3.	**Условие Слейтера и критерий оптимальности Куна–Таккера.**	**2**	**2**					
4.3.1	Условие регулярности Слейтера и критерий оптимальности Куна–Таккера.	2	2					тест опрос
	Всего по курсу	**36**	**28**				**6**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. – Москва: ЛЕНАНД, 2018.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. 2-ое издание. – Минск: Изд–во БГУ, 1981.
3. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – Москва: Изд–во МГУ, 1989.
4. Гороховик В.В. Конечномерные задачи оптимизации. – Минск: 2006.

Перечень дополнительной литературы

1. Ашманов С.А. Линейное программирование. Учебное пособие. – Москва: Наука, 1981.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – Москва: Наука, 1980.
3. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. – М.: Высшая школа, 2005.
4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. – Москва: Наука, 1974.
5. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. – Москва: Наука, 1986. – (Библиотечка “Квант”. Вып. 56).
6. Эльстер К.-Х. и др. Введение в нелинейное программирование.– Москва: Наука, 1985.
7. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление: Задачи и примеры с подробными решениями Изд. стереотип. Вариационное исчисление: Задачи и примеры с подробными решениями URSS. 2020. 168 с. ISBN 978-5-397-07717-0.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Формой текущей аттестации по дисциплине «Основы ВИ и МО» учебным планом предусмотрен зачёт.

Контроль работы студента проходит в форме собеседования, контрольной работы в аудитории или выполнения самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории, а также самостоятельной работы вне аудитории с предоставлением отчета с его устной защитой. Задания к контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Зачёт по дисциплине проходит в устной или письменной форме.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения.

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- ответы на практических занятиях – 20 %;
- выполнение тестов – 25 %;
- ответы на собеседованиях – 25 %;
- контрольные работы – 30 %.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012 г.).
2. Положение о рейтинговой системе оценки знаний студентов по дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора № 189-ОД от 31.03.2020
3. Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 г. № 21-04-1/105).

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 2.2. *Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.*

Студент изучает метод поиска экстремальных точек в задаче условной оптимизации с гладкими ограничениями-равенствами, исследует компактность множества допустимых значений задачи, определяет стационарные точки функции Лагранжа, проверяет выполнение условий оптимальности в найденных точках.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 2.5. *Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями.*

Студент исследует экстремальные задачи со смешанными ограничениями (равенствами и неравенствами), определяет стационарные точки функции Лагранжа, проверяет условия дополняющей нежёсткости и согласования знаков в этих точках, стоит конусы касательных направлений и проверяет достаточные условия минимума и максимума.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 3.3. *Крайние точки в канонической линейной задаче. Невырожденные задачи. Симплекс-метод.*

Студент изучает алгоритм решения задач линейного программирования с помощью симплекс-метода и методы отыскания начального опорного плана: приведение задачи к каноническому виду и метод искусственного базиса, исследует задачу линейного программирования на существование решения, а также на единственность оптимального решения.

Форма контроля – контрольная работа.

Примерный перечень заданий для контрольных работ

Контрольная работа №1

1. Определить, является ли компактным множество $M \subset \mathbb{R}^3$, заданное равенствами:

$$x^2 + y = 3, \qquad y^2 + z = 5.$$

2. Исследовать функцию на экстремальные значения:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^3 \to extr.$$

3. Исследовать функцию на экстремумы методом множителей Лагранжа:

$$\begin{cases} x^2 - xy + z^2 \to extr \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Контрольная работа №2

Исследовать функцию на экстремумы методом множителей Лагранжа

1.

$$\begin{cases} x - y - z \to extr \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \\ x + 2y \geqslant 0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x^3 - y^2 + 2 \to extr \\ y \geqslant x^2 \\ x \geqslant 0, y \leqslant 4 \end{cases}$$

Контрольная работа №3

1. Найти минимальное и максимальное значение функции:

$$\begin{cases} x - y \to extr \\ 3x \geqslant y - 4 \\ |x + y| \leqslant 2 \\ y \geqslant -2 \end{cases}$$

2. Найти оптимальный план в задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to min \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leqslant 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geqslant 6 \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Примерная тематика практических занятий

1. Экстремумы функций одной переменной
2. Доказательство неравенств
3. Экстремумы функций нескольких переменных
4. Производная по направлению: определение, контрпримеры
5. Производная по направлениям.
6. Конус допустимых направлений. Необходимые условия экстремума КДН.
7. Полная дифференцируемость. Необходимые условия экстремума через ККН.
8. Линейное программирование: составление задач, графический метод решения.
9. Линейное программирование: графический метод решения с параметром, метод исключения переменных
10. Симплекс-метод.
11. Выпуклые функции, выпуклые множества
12. Выпуклые задачи: теорема Куна-Такера
13. Гладкие задачи с ограничениями типа равенств. Метод множителей Лагранжа.
14. Гладкие задачи с ограничениями типа неравенств.
15. Смешанные гладкие задачи.
16. Доказательство неравенств.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется **эвристический и практико-ориентированный подходы**, а также **метод учебной дискуссии**, которые предполагают:

– демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;

– творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;

– индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности.

– освоение содержание образования через решения практических задач;

– приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;

– участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;

– выполнение домашнего задания;

– работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;

– изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;

– подготовка к практическим занятиям;

– научно-исследовательские работы;

– подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов зачету

1. Классификация задач оптимизации.
2. Необходимые условия экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации. Достаточное условие экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации.
3. Верхний и нижний пределы числовых последовательностей и функций. Полунепрерывные функции.
4. Теоремы о существовании оптимальных решений
5. Локальный и глобальный минимумы. Дифференцируемость по направлениям, равномерная дифференцируемость по направлениям, полная производная.
6. Конус допустимых и конус касательных направлений; их основные свойства.
7. Необходимые условия локального минимума первого порядка для

дифференцируемых и равномерно дифференцируемых по направлениям функций в задаче оптимизации с ограничениями.

8. Достаточное условие строгого локального минимума для равномерно дифференцируемых функций в общей задаче оптимизации с ограничениями.
9. Дважды вполне дифференцируемые функции.
10. Необходимые, а также достаточные условия второго порядка для точек локального минимума в общей задаче оптимизации с ограничениями.
11. Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.
12. Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.
13. Достаточное условие экстремума для задач с ограничениями типа равенств
14. Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями.
15. Формулировка задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация.
16. Выпуклые множества и их основные свойства.
17. Отделимость выпуклых множеств. Теоремы об отделимости.
18. Опорные гиперплоскости. Крайние точки множества.
19. Линейное программирование. Примеры задач. Основные определения и свойства. Точки экстремума в задаче линейного программирования.
20. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделяющей гиперплоскости для замкнутого множества.
21. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделяющей гиперплоскости для произвольного (не обязательно замкнутого) множества.
22. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделении двух множеств.
23. Выпуклый конус. Теорема об опорной гиперплоскости к выпуклому конусу.
24. Двойственный, бидвойственный конусы. Их свойства.
25. Выпуклые линейные комбинации, выпуклая оболочка.
26. Невырожденные линейные задачи. Начальный опорный план.
27. Графический метод решения задач линейного программирования.
28. Симлекс-метод.
29. Метод искусственного базиса (w-задача).
30. Двойственная задача линейного программирования. Теорема двойственности.
31. Выпуклые функции и их простейшие свойства. Непрерывность выпуклых функций.
32. Непрерывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций.
33. Непрерывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций.
34. Критерий оптимальности решений выпуклой задачи оптимизации.
35. Задача выпуклого программирования. Геометрический критерий

оптимальности решений в задаче выпуклого программирования.
36. Условия оптимальности для решений задачи выпуклого программирования.
37. Условие регулярности Слейтера и критерий оптимальности Куна–Таккера.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Функциональный анализ	Функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 04.06.2020)
Уравнения математической физики	кафедра математической кибернетики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 04.06.2020)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
________________________________ (протокол № ____ от ________ 201_ г.)

Заведующий кафедрой
_______________________ ________________ ____________________

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
_______________________ ________________ ____________________