

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям

О.Н.Здрок

2020 г.

Регистрационный № УД-8888/уч.

Выпуклый анализ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направление специальности

1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность)

2020 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2013 и учебного плана № G31-139/уч. от 30.05.2013 по специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям) направление специальности 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность)

СОСТАВИТЕЛИ:

Гороховик Валентин Викентьевич, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Малютин Виктор Борисович, главный научный сотрудник отдела нелинейного и стохастического анализа Института математики НАН Беларуси, доктор физико-математических наук;

Кротов Вениамин Григорьевич, заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики
(протокол № 12 от 04.06.2020);

Научно-методическим Советом БГУ

(протокол № 5 от 17.06.2020)

Зав. кафедрой ФАиАЭ, профессор



А.В. Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины – повышение уровня профессиональной компетентности в анализе математических моделей в различных сферах трудовой деятельности, подготовка специалистов, способных использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований.

Задачи учебной дисциплины

1. Обучение методам анализа выпуклых математических моделей в конечномерных векторных пространствах.
2. Привитие навыков построения математических моделей, адекватных конкретным прикладным процессам и явлениям, и умения содержательно интерпретировать результаты их исследования.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием. Учебная дисциплина относится к циклу специальных дисциплин (компонент учреждения образования)

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Изучение дисциплины базируется на знаниях дисциплин «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Выпуклый анализ» должно обеспечить формирование следующих академических, социально-личностных и профессиональных компетенций:

академические компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

социально-личностные компетенции:

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

профессиональные компетенции:

ПК-16. Готовить доклады, материалы к презентациям.

ПК-17. Пользоваться глобальными информационными ресурсами.

ПК-18. Владеть современными средствами телекоммуникаций.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- определения выпуклых множеств и выпуклых функций, наиболее часто встречающиеся в различных разделах математики примеры выпуклых множеств и выпуклых функций;
- внутренне и внешнее представление замкнутых выпуклых множеств;
- определение выпуклой оболочки множества, теорему Каратеодори о представлении выпуклой оболочки множества в конечномерном векторном пространстве;
- понятие крайней точки выпуклого множества, теорему Минковского о представлении выпуклого компактного множества в виде выпуклой оболочки его крайних точек;
- геометрический критерий выпуклости функции;
- топологические и дифференциальные свойства выпуклых функций: непрерывность, липшицевость, дифференцируемость по направлениям;
- дифференциальные критерии выпуклости функции;
- понятия субградиента и субдифференциала выпуклой функции, свойства субдифференциала, правила исчисления субдифференциалов;
- определение сублинейных функций, их свойства и субдифференциалы;
- калибровочные и опорные функции выпуклых множеств;

уметь:

- для выпуклых множеств, заданных геометрически на плоскости или трехмерном пространстве, находить относительную внутренность и различать границу и относительную границу;
- геометрически находить выпуклую оболочку заданного на плоскости множества точек;
- находить крайние точки выпуклых многогранных множеств, заданных геометрически, а также в виде множества решений системы линейных (аффинных) уравнений;
- с помощью дифференциальных критериев устанавливать (или опровергать) выпуклость функций одной и двух переменных;
- находить субградиент (субдифференциал) выпуклых функций одной и двух переменных в заданной точке;
- для заданных выпуклых множеств на плоскости находить соответствующие им калибровочные и опорные функции;
- используя субдифференциальный критерий, находить точки минимума выпуклых функций;

владеть:

- методами анализа выпуклых множеств и выпуклых функций.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 4 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Выпуклый анализ» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 92 часа, в том числе 50 часов аудиторных занятий, из них: лекции – 34 часов, лабораторные занятия – 12 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 2 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел I. Линейные подпространства и аффинные многообразия.

Тема 1. Линейные подпространства

- 1.1. Линейные (векторные) подпространства. Определение.
- 1.2. Базис и размерность линейных подпространств.
- 1.3. Внутренне и внешнее представления линейных подпространств.
- 1.4. Линейная оболочка множеств.

Тема 2. Аффинные многообразия.

- 2.1. Определение и простейшие свойства.
- 2.2. Внутреннее и внешнее представления аффинных многообразий.
- 2.3. Аффинная оболочка множеств.

Раздел II. Выпуклые множества.

Тема 3. Выпуклые множества.

- 3.1. Определение и примеры.
- 3.2. Операции, сохраняющие свойство выпуклости множеств.

Тема 4. Выпуклая оболочка множества.

- 4.1. Определение и внутреннее представление выпуклой оболочки.
- 4.2. Симплекс.

Тема 5. Топологические свойства выпуклых множеств.

- 5.1. Внутренность и замыкание выпуклых множеств.
- 5.2. Относительная внутренность и относительная граница выпуклого множества.

Тема 6. Проекция точки на множество.

Тема 7. Отделимость выпуклых множеств гиперплоскостями.

- 7.1. Основные определения.
- 7.2. Теоремы о сильной отделимости выпуклых множеств.
- 7.3. Опорные гиперплоскости к выпуклым множествам.
- 7.4. Критерий собственной отделимости выпуклых множеств.

Тема 8. Крайние точки выпуклых множеств. Теорема Минковского.

Тема 9. Конусы, ассоциированные с выпуклыми множествами.

- 9.1. Конусы. Необходимые определения.
-

- 9.2. Касательный и нормальный конусы к выпуклому множеству.
9.3. Рецессивный и барьерный конусы выпуклого множества, неограниченность выпуклых множеств.

Раздел III. Выпуклые функции.

Тема 10. Выпуклые функции. Определение и простейшие свойства.

- 10.1. Определение, геометрический критерий выпуклости функции, неравенство Йенсена.
10.2. Операции, сохраняющие свойство выпуклости функций.

Тема 11. Топологические свойства выпуклых функций.

- 11.1. Ограниченность сверху и непрерывность выпуклых функций.
11.2. Липшицевость выпуклых функций.

Тема 12. Дифференциальные свойства выпуклых функций.

- 12.1. Дифференцируемость по направлениям выпуклых функций.
12.2. Свойства производной по направлениям выпуклой функции.
12.3. Равномерная дифференцируемость по направлениям выпуклых функций.

Тема 13. Классические дифференциальные критерии выпуклости функций.

Раздел IV. Субдифференцирование выпуклых функций.

Тема 14. Субградиент и субдифференциал выпуклых функций.

- 14.1. Определение и свойства субдифференциала.
14.2. Исчисление субдифференциалов выпуклых функций.
14.3. Субдифференциальный критерий для точек минимума выпуклых функций.

Тема 15. Сублинейные функции и их субдифференциалы.

- 15.1. Сублинейные функции и их свойства.
15.2. Свойства субдифференциалов сублинейных функций.
15.3. Примеры вычисления субдифференциалов для наиболее распространенных норм на R^n .
15.4. Калибровочные и опорные функции выпуклых множеств.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением

| Номер раздела, темы | Название раздела, темы | Количество аудиторных часов | | | | | Количество часов по УСР | Формы контроля знаний |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------|---------------------|----------------------|------|-------------------------|-------------------------------------------------------------|
| | | лекции | практические занятия | семинарские занятия | лабораторные занятия | Иное | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| I | Линейные подпространства и аффинные многообразия. | 4 | 2 | | | | | |
| 1 | Линейные подпространства. | 2 | 1 | | | | | |
| 1.1. | Определение линейного подпространства, базис и размерность, внутренне и внешнее представления линейных подпространств, линейная оболочка. | 2 | 1 | | | | | |
| 2 | Аффинные многообразия. | 2 | 1 | | | | | |
| 2.1. | Определение и простейшие свойства аффинных многообразий, внутреннее и внешнее представление, Аффинная оболочка множеств, симплекс. | 2 | 1 | | | | 1 | Проверка индивидуальных заданий, собеседование по темам 1,2 |
| II | Выпуклые множества. | 16 | 4 | | | | | |
| 3 | Определение и простейшие свойства выпуклых множеств. | 2 | | | | | | |
| 3.1. | Определение выпуклых множеств и примеры, сравнение с линейными подпространствами и аффинными многообразиями, операции, сохраняющие выпуклость множеств. | 2 | | | | | | |
| 4 | Выпуклая оболочка множеств. | 2 | 1 | | | | | |
| 4.1. | Определение и внутреннее представление выпуклой оболочки множества, теорема Каратеодори, симплекс. | 2 | 1 | | | | | |
| 5 | Топологические свойства выпуклых множеств. | 4 | 1 | | | | | |
| 5.1. | Внутренность и замыкание выпуклых множеств, относительная внутренность и относительная граница выпуклых множеств, | 4 | 1 | | | | | |

| | | | | | | | | |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|----------|--|--|--|----------|--------------------------------------------------------------|
| | теорема о непустоте относительной внутренней конечномерных выпуклых множеств. | | | | | | | |
| 6 | Проекция точки на множество. | 2 | | | | | | |
| 6.1. | Определение проекции на множество, свойства проекции, Критерий евклидовой проекции на выпуклое множество. | 2 | | | | | | |
| 7 | Отделимость выпуклых множеств гиперплоскостями. | 4 | 1 | | | | | |
| 7.1. | Основные определения, теоремы о сильной отделимости выпуклых множеств, опорные гиперплоскости к выпуклым множествам, критерий собственной отделимости выпуклых множеств. | 4 | 1 | | | | | |
| 8 | Крайние точки выпуклых множеств. | 2 | 1 | | | | | |
| 8.1. | Определение и другие характеристики крайних точек выпуклых множеств, существование крайних точек, теорема Минковского. | 2 | 1 | | | | | |
| 9 | Конусы, ассоциированные с выпуклыми множествами. | 2 | | | | | 1 | Проверка индивидуальных заданий, собеседование по разделу II |
| 9.1. | Необходимые сведения о конусах и выпуклых конусах, касательный и нормальный конусы к выпуклому множеству, рецессивный и барьерный конусы выпуклого множества, неограниченность выпуклых множеств. | 2 | | | | | | |
| III | Выпуклые функции. | 10 | 4 | | | | | |
| 10 | Определение и простейшие свойства выпуклых функций. | 2 | 1 | | | | | |
| 10.1. | Определение и простейшие свойства выпуклых функций, геометрический критерий выпуклости функций, неравенство Йенсена, операции, сохраняющие выпуклость функций. | 2 | 1 | | | | | |
| 11 | Топологические свойства выпуклых функций. | 4 | 1 | | | | | |
| 11.1 | Ограниченность сверху и непрерывность выпуклых функций, липшицевость выпуклых функций на ограниченных подмножествах. | 4 | 1 | | | | | |
| 12 | Дифференциальные свойства выпуклых функций. | 2 | 1 | | | | | |
| 12.1 | Дифференцируемость по направлениям выпуклых функций, свойства производной по направлениям выпуклой функции, равномерная дифференцируемость по направлениям выпуклых | 2 | 1 | | | | | |

| | | | | | | | | |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-----------|--|--|--|----------|---------------------------------------------------------------|
| | функций. | | | | | | | |
| 13 | Классические дифференциальные критерии выпуклости функций. | 2 | 1 | | | | | |
| 13.1. | Дифференциальный критерий выпуклости функций первого порядка; критерий, основанный на монотонности градиентного отображения функции; дифференциальный критерий выпуклости функций второго порядка. | 2 | 1 | | | | 1 | Проверка индивидуальных заданий, собеседование по разделу III |
| IV | Субдифференцирование выпуклых функций. | 4 | 2 | | | | | |
| 14 | Субградиент и субдифференциал выпуклой функции. | 2 | 1 | | | | | |
| 14.1. | Определение и свойства субдифференциала выпуклой функции, исчисление субдифференциалов выпуклых функций, субдифференциальный критерий для точек минимума выпуклых функций. | 2 | 1 | | | | | |
| 15 | Сублинейные функции и их субдифференциалы. | 2 | 1 | | | | | |
| 15.1. | Сублинейные функции и их свойства, свойства субдифференциалов сублинейных функций, примеры вычисления субдифференциалов для наиболее распространенных норм на R^n , калибровочные и опорные функции. | 2 | 1 | | | | 1 | Проверка индивидуальных заданий по разделу IV |
| | | | | | | | | |
| | Всего | 34 | 12 | | | | 4 | |

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
2. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
3. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М., Наука. 1985.
4. Гороховик В.В. Конечномерные задачи оптимизации. Минск: Изд. центр БГУ. 2007.
5. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.
6. Магарил-Ильяев Г.Г. В.М. Тихомиров Выпуклый анализ и его приложения. Ленанд, 2020

Перечень дополнительной литературы

1. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
2. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: УРСС, 2000.
3. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
4. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.
5. Hiriart-Urruty J.-B., Lemarechal C. Fundamentals of convex analysis. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Формой текущей аттестации по дисциплине «*Выпуклый анализ*» учебным планом предусмотрен зачет.

Контроль работы студента проходит в форме собеседования, проверки индивидуальных заданий, или выполнения самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории, а также самостоятельной работы вне аудитории с предоставлением отчета с его устной защитой. Индивидуальные задания оставляются согласно содержанию учебного материала.

Зачет по дисциплине проходит в устной или письменной форме.

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- ответы на семинарских занятиях – 15 %;
- выполнение контрольных работ – 70 %;
- подготовка и защита индивидуального задания – 15 %.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов Вес оценка по текущей успеваемости составляет 30 %, экзаменационная оценка – 70 %.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь №53 от 29.05.2012 г.).

2. ПОЛОЖЕНИЕ о рейтинговой системе оценки знаний студентов по дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора № 189-ОД от 31.03.2020)

3. Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 г. № 21-04-1/105).

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Раздел I. Линейные подпространства и аффинные многообразия.

Студент изучает необходимые сведения о линейных подпространствах и аффинных многообразиях, включая понятия линейного и аффинного базиса, линейной и аффинной оболочки множеств, внутреннее и внешнее представление линейных подпространств и аффинных многообразий, понятие симплекса, выполняет индивидуальное задание по разделу.

Форма контроля — проверка индивидуального задания и собеседование.

Раздел II. Выпуклые множества.

Студент изучает теорию выпуклых множеств, особое внимание обращая на их внутреннее и внешнее представление, теорему Каратеодори, топологические свойства выпуклых множеств, теоремы об отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями, теорему Минковского о представлении компактного выпуклого множества в виде выпуклой оболочки его крайних точек, понятия касательных и нормальных конусов к выпуклому множеству, выполняет индивидуальное задание по разделу.

Форма контроля — проверка индивидуального задания и собеседование.

Раздел III. Выпуклые функции.

Студент изучает определение выпуклой функции, топологические и дифференциальные свойства выпуклых функций, дифференциальные критерии выпуклости классически дифференцируемых функций, выполняет индивидуальное задание по разделу.

Форма контроля — проверка индивидуального задания и собеседование.

Раздел IV. Субдифференцирование выпуклых функций.

Студент изучает определения субградиента и субдифференциала выпуклой функции, теорему о существовании субградиентов, свойства и правила исчисления субдифференциалов, субдифференциальный критерий для точек минимума выпуклых функций, сублинейные функции и их субдифференциалы, выполняет индивидуальное задание по теме.

Форма контроля — проверка индивидуального задания и собеседование.

Примерная тематика практических занятий

1. Линейные подпространства и аффинные многообразия. Выпуклые множества, выпуклые оболочки множеств.
2. Относительная внутренность и относительная граница выпуклого множества.
3. Проекция точки на множество. Отделимость выпуклых множеств гиперплоскостями. Опорные гиперплоскости.

4. Крайние точки выпуклых множеств. Теорема Минковского.
5. Касательный и нормальный конусы к выпуклому множеству.
6. Рецессивный и барьерный конусы выпуклого множества, неограниченность выпуклых множеств.
7. Выпуклые функции, геометрический критерий выпуклости функций, операции, сохраняющие свойство выпуклости функций.
8. Топологические свойства выпуклых функций, ограниченность сверху и непрерывность выпуклых функций, липшицевость выпуклых функций.
9. Дифференцируемость по направлениям выпуклых функций. Свойства производной по направлениям выпуклой функции.
10. Дифференциальные критерии выпуклости вполне дифференцируемых функций.
11. Субградиент и субдифференциал выпуклых функций. Исчисление субдифференциалов выпуклых функций.
12. Субдифференциальный критерий для точек минимума выпуклых функций.
13. Сублинейные функции и их субдифференциалы.

**Описание инновационных подходов и методов к преподаванию
учебной дисциплины (эвристический, проективный,
практико-ориентированный)**

При организации образовательного процесса используется *эвристический и практико-ориентированный подходы*, которые предполагают:

- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры
- анализ ситуации, с использованием профессиональных знаний, собственного опыта, дополнительной литературы и иных источников.

Также *используется метод группового обучения*, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Все результаты и достижения группируются на основе основных видов деятельности студентов: учебной, научно-исследовательской и иной. Методы обеспечивают появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения. Также они представляют собой систему,

формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления и являются организацией учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
- подготовка к практическим семинарским занятиям;
- научно-исследовательские работы;
- подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Линейные подпространства
 - 1.1. Линейные (векторные) подпространства. Определение.
 - 1.2. Базис и размерность линейных подпространств .
 - 1.3. Внутренне и внешнее представления линейных подпространств.
 - 1.4. Линейная оболочка множеств.
2. Аффинные многообразия.
 - 2.1. Определение и простейшие свойства.
 - 2.2. Внутреннее и внешнее представления аффинных многообразий.
 - 2.3. Аффинная оболочка множеств.
3. Выпуклые множества.
 - 3.1. Определение и примеры.
 - 3.2. Операции, сохраняющие свойство выпуклости множеств.
4. Выпуклая оболочка множества.
 - 4.1. Определение и внутреннее представление выпуклой оболочки.
 - 4.2. Симплекс.
5. Топологические свойства выпуклых множеств.
 - 5.1. Внутренность и замыкание выпуклых множеств.
 - 5.2. Относительная внутренность и относительная граница выпуклого множества.
6. Проекция точки на множество.
7. Отделимость выпуклых множеств гиперплоскостями.
 - 7.1. Основные определения.
 - 7.2. Теоремы о сильной отделимости выпуклых множеств.
 - 7.3. Опорные гиперплоскости к выпуклым множествам.
 - 7.4. Критерий собственной отделимости выпуклых множеств.
8. Крайние точки выпуклых множеств. Теорема Минковского.
9. Касательный и нормальный конусы к выпуклым множествам

10. Рецессивный и барьерный конусы выпуклого множества, критерий неограниченности выпуклых множеств.
11. Выпуклые функции. Определение и простейшие свойства.
 - 11.1. Определение, геометрический критерий выпуклости функции, неравенство Йенсена.
 - 11.2. Операции, сохраняющие свойство выпуклости функций.
 - 11.3. Ограниченность сверху и непрерывность выпуклых функций.
 - 11.4. Липшицевость выпуклых функций.
12. Дифференцируемость по направлениям выпуклых функций. Свойства производной по направлениям выпуклых функций.
13. Дифференциальные критерии выпуклости вполне дифференцируемых функций.
14. Субградиент и субдифференциал выпуклых функций.
 - 14.1. Определение и свойства субдифференциала.
 - 14.2. Исчисление субдифференциалов выпуклых функций.
 - 14.3. Субдифференциальный критерий для точек минимума выпуклых функций.
15. Сублинейные функции и их субдифференциалы.
 - 15.1. Сублинейные функции.
 - 15.2. Свойства субдифференциалов сублинейных функций.
 - 15.3. Примеры вычисления субдифференциалов для наиболее распространенных норм на R^n .
 - 15.4. Калибровочные функции.
 - 15.5. Опорные функции.

1. ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

| Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование | Название кафедры | Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине | Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2. Алгебра и теория чисел | Высшей алгебры и защиты информации | нет | Вносить изменения не требуется (прот. № 12 от 04.06.2020) |
| 3. Функциональный анализ | Функционального анализа и аналитической экономики | нет | Вносить изменения не требуется (прот. № 12 от 04.06.2020) |

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

| № п/п | Дополнения и изменения | Основание |
|----------|------------------------|-----------|
| | | |

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета
