

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:**

**1-31 03 01 Математика (по направлениям)**

Направление специальности

1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность)

2020 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2013 и учебного плана, регистрационный № G31-209/уч. от 29.05.2015 г.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**Антоневич А.Б.** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

**Мазель М.Х.** - кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

**Пиндрик О.И.** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

**Шагова Т.Г.** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**Гороховик В.В.** – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом нелинейного анализа ИМ НАН Беларуси;

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики (протокол № 12 от 04.06.2020);

Научно-методическим Советом БГУ (протокол № 5 от 17.06.2020).

Заведующий кафедрой



## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### Цели и задачи учебной дисциплины

**Цель** учебной дисциплины – освоение студентами языка современной математики, владение общими конструкциями и умение их применять в теоретических и прикладных задачах.

#### **Задачи учебной дисциплины:**

1. Формирование у студентов понятия меры и интеграла Лебега.
2. Изучение сходящихся последовательностей и последовательностей Коши в метрических пространствах;
3. Изучение непрерывных, равномерно непрерывных отображений и отображений, удовлетворяющих условию Липшица, в функциональных пространствах.
4. Применение принципа сжимающих отображений к различным задачам.
5. Изучение основных свойств нормированных и гильбертовых пространств.
6. Изучение линейных ограниченных, в частности, интегральных, операторов.
7. Изучение альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений в пространствах  $L_2[a, b]$  и  $C[a, b]$ .

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к **циклу** специальных дисциплин (компонент учреждения образования).

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Данная дисциплина наиболее тесно связана со следующими дисциплинами: «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Уравнения математической физики», «Методы оптимизации», «Экстремальные задачи и вариационное исчисление», «Численные методы».

### **Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Функциональный анализ» должно обеспечить формирование следующих академических и профессиональных компетенций:

#### **академические** компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач;

#### **профессиональные** компетенции:

ПК-5. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

**знать:**

- основные понятия и результаты теории меры и интеграла Лебега;
- основные понятия и результаты теории нормированных пространств и операторов в них;
- методы доказательств и алгоритмы решения задач функционального анализа;

**уметь:**

- выявлять конструкции функционального анализа в конкретных задачах;
- устанавливать свойства отображений в функциональных пространствах;
- применять результаты функционального анализа для решения теоретических и прикладных задач;

**владеть:**

- основными методами вычисления интегралов Лебега;
- методами доказательств сходимости последовательностей и аналитического исследования применимости принципа сжимающих отображений к конкретным задачам;
- методами исследования разрешимости и нахождения решения операторных уравнений;
- навыками самообразования и способами использования аппарата функционального анализа для проведения теоретических и прикладных исследований.

### **Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 4 и 5 семестрах. Всего на изучение учебной дисциплины «Функциональный анализ» отведено для очной формы получения высшего образования – 198 часов, в том числе 104 аудиторных часов, из них:

- в 4 семестре 68 аудиторных часов, из них: лекции - 34 часов, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

- в 5 семестре 36 аудиторных часов, из них: лекции – 20 часов, практические занятия – 14 часов, управляемая самостоятельная работа – 2 часа. Трудоемкость учебной дисциплины составляет 2 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## Раздел 1. Теория меры и интеграл Лебега

**Тема 1.1. Мера Лебега.** Системы множеств. Кольца множеств, полукольца, алгебры, сигма-кольца и сигма-алгебры, борелевские множества. Общее понятие меры. Сигма-аддитивная мера. Продолжение меры по Лебегу. Внешняя мера, измеримые множества, множества меры нуль, основная теорема теории меры. Мера Лебега на прямой. Мера Лебега-Стилтьеса.

**Тема 1.2. Интеграл Лебега.** Измеримые функции, простые функции, интеграл от простой функции, интеграл от измеримой функции, простейшие свойства интеграла Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега. Произведение мер, теорема Фубини.

## Раздел 2. Метрические пространства

**Тема 2.1. Метрические пространства.** Определение и основные примеры функциональных метрических пространств. Топология метрических пространств. Полные метрические пространства. Пополнение метрических пространств. Компактные метрические пространства.

**Тема 2.2. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения.** Определения и свойства. Теорема о продолжении. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям.

## Раздел 3. Нормированные и гильбертовы пространства

**Тема 3.1. Нормированные пространства.** Векторные пространства, нормированные пространства. Непрерывность операций сложения и умножения на число. Банаховы пространства. Пополнение нормированных пространств. Критерий конечномерности нормированного пространства.

**Тема 3.2. Гильбертовы пространства.** Определение скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Теорема о проекции. Теорема о рядах Фурье.

## Раздел 4. Линейные операторы

**Тема 4.1. Линейные операторы в нормированных пространствах.** Связь ограниченности с непрерывностью для линейных операторов. Норма оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Различные виды сходимости линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-

Штейнгауза. Обратные операторы. Теорема Банаха об обратном операторе. Обратимость оператора, близкого к единичному. Открытость множества обратимых операторов. Теорема Банаха об обратном операторе.

**Тема 4.2. Линейные непрерывные функционалы.** Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала. Общий вид линейных непрерывных функционалов в конкретных пространствах. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и его свойства.

**Тема 4.3. Компактные операторы.** Определения и свойства. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах. Альтернатива Фредгольма для интегральных операторов.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

| Номер раздела, темы | Название раздела, темы  | Количество аудиторных часов |                      |                     |                      |      | Количество часов УСР | Форма контроля знаний  |
|---------------------|---|-----------------------------|----------------------|---------------------|----------------------|------|----------------------|--|
|                     |   | Лекции                      | Практические занятия | Семинарские занятия | Лабораторные занятия | Иное |                      |  |
| 1                   | 2   | 3                           | 4                    | 5                   | 6                    | 7    | 8                    | 9  |
|                     | <b>4 семестр</b>  |                             |                      |                     |                      |      |                      |  |
| 1                   | Теория меры и интеграл Лебега   |                             |                      |                     |                      |      |                      |  |
| 1.1                 | Мера Лебега   | 10                          | 10                   |                     |                      |      |                      | Проверка практических работ с последующей их устной защитой<br>Отчет по практическим работам   |
| 1.2                 | Интеграл Лебега   | 8                           | 8                    |                     |                      |      |                      | Проверка практических работ с последующей их устной защитой                                    |
| 2                   | Метрические пространства  |                             |                      |                     |                      |      |                      |  |
| 2.1                 | Метрические пространства. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения | 4                           | 2                    |                     |                      |      | 2                    | Проверка практических работ с последующей их устной защитой.<br>Контрольная работа             |
| 2.2                 | Сжимающие отображения.  | 2                           | 2                    |                     |                      |      |                      | Проверка практических работ с последующей их устной защитой.<br>Контрольная работа. Коллоквиум |
| 3                   | Нормированные пространства  |                             |                      |                     |                      |      |                      |  |
| 3.1                 | Нормированные пространства  | 4                           | 4                    |                     |                      |      |                      | Проверка практических работ с последующей их устной защитой                                    |
| 3.2                 | Гильбертовы пространства.   | 6                           | 4                    |                     |                      |      | 2                    | Проверка практических работ с последующей их устной защитой.                                   |

|     |  |    |    |  |  |   |   |
|-----|--|----|----|--|--|---|---|
|     |  |    |    |  |  |   | Контрольная работа.   |
|     | <b>Всего за семестр</b>                          | 34 | 30 |  |  | 4 |   |
|     | <b>5 семестр</b>                                 |    |    |  |  |   |   |
| 4   | Линейные операторы                               |    |    |  |  |   |   |
| 4.1 | Линейные операторы в нормированных пространствах | 12 | 8  |  |  | 2 | Проверка практических работ с последующей их устной защитой. Контрольная работа.            |
| 4.2 | Линейные непрерывные функционалы                 | 6  | 4  |  |  |   | Проверка практических работ с последующей их устной защитой .                               |
| 4.3 | Компактные операторы. Альтернатива Фредгольма    | 2  | 2  |  |  |   | Проверка практических работ с последующей их устной защитой. Контрольная работа. Коллоквиум |
|     | <b>Всего за семестр</b>                          | 20 | 14 |  |  | 2 |   |
|     | <b>Всего по курсу</b>                            | 54 | 44 |  |  | 6 |   |



## **ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**

### **Перечень основной литературы**

1. Антоневи́ч А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп. Минск, Изд-во БГУ, 2006.
2. Антоневи́ч А.Б., Мазель М.Х., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Учебное пособие. Минск, Изд-во БГУ, 2011.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 2004.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М., Высшая школа, 1982.
5. Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу. М., МЦНМО, 2017.

### **Перечень дополнительной литературы**

1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ю., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. Киев, Выща школа, 1990.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. СПб., Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2002.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., Наука, 1979.
4. Антоневи́ч А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск, Вышэйшая школа, 1978.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Физматлит, 2002.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Функциональный анализ. М., Мир, 1977.

### **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки**

Формой текущей аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» учебным планом в 4 семестре предусмотрен зачет, а в 5 семестре экзамен.

Контроль работы студента проходит в форме проверки практических работ с последующей их устной защитой, коллоквиума, контрольных и самостоятельных работ в аудитории, а также самостоятельной работы вне аудитории с предоставлением отчета. Задания к контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Экзамен по дисциплине проходит в устной или письменной форме.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику

процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- коллоквиум – 25 %;
- контрольные работы – 50 %;
- письменные отчеты по практическим работам – 25 %;

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценки по текущей успеваемости составляет 30 %, экзаменационной оценки – 70 %.

### **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

Тема 2.1. *Метрические пространства.*

Студент исследует на сходимость последовательности в метрических пространствах; проверяет, является ли заданная последовательность последовательностью Коши; исследует данное метрическое пространство на полноту.

*Форма контроля – отчет с последующей защитой, контрольная работа.*

Тема 3.2. *Гильбертовы пространства.*

Студент изучает основные понятия, связанные с гильбертовыми пространствами, в частности, определения нормы в предгильбертовом пространстве, теорему о проекции, процесс ортогонализации, понятие ряда Фурье; находит проекцию элемента на замкнутое подпространство гильбертова пространства, а также разложение функций в ряды Фурье.

*Форма контроля – контрольная работа.*

Тема 4.1. *Линейные операторы в нормированных пространствах.*

Студент находит область определения оператора, исследует на линейность и ограниченность операторы в нормированных пространствах, находит норму линейного ограниченного оператора.

*Форма контроля – отчет с последующей защитой, контрольная работа..*

### **Примерная тематика практических занятий**

Практическая работа № 1. Системы подмножеств.

Практическая работа № 2. Мера на кольце множеств. Продолжение меры по Лебегу.

Практическая работа № 3. Мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$ .

Практическая работа № 4. Интеграл Лебега.

Практическая работа № 5. Интеграл Лебега-Стилтьеса. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

Практическая работа № 6. Сходящиеся последовательности в метрических пространствах.

Практическая работа № 7. Нормированные векторные пространства.

Практическая работа № 8. Гильбертовы пространства.

Практическая работа № 9. Линейные непрерывные операторы в банаховых пространствах.

Практическая работа № 10. Линейные непрерывные функционалы.

Практическая работа № 11. Альтернатива Фредгольма.

### **Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса могут быть использованы следующие подходы и методы: *эвристический подход, практико-ориентированный подход, метод учебной дискуссии, методы и приемы развития критического мышления, метод группового обучения*, которые предполагают:

- осуществление студентами значимых открытий;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;
- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение студентом знаний и умений для решения практических задач;
- приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.

Использование указанных методов обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения. Также они представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления, и являются организацией учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
- подготовка к практическим и семинарским занятиям;
- научно-исследовательские работы;
- подготовка и написание рефератов, докладов и презентаций на заданные темы;
- подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

При составлении заданий УСР по учебной дисциплине необходимо предусмотреть возрастание их сложности: от заданий, формирующих достаточные знания по изученному учебному материалу на уровне узнавания, к заданиям, формирующим компетенции на уровне воспроизведения, и далее к заданиям, формирующим компетенции на уровне применения полученных знаний.

Таким образом, задания УСР по учебной дисциплине рекомендуется делить на три модуля:

- задания, формирующие достаточные знания по изученному учебному материалу на уровне узнавания;
- задания, формирующие компетенции на уровне воспроизведения;
- задания, формирующие компетенции на уровне применения полученных знаний.

### **Примерный перечень вопросов к зачету 1 семестр**

1. Множества, операции над множествами, система всех подмножеств  $P(X)$ .
2. Системы подмножеств: кольца, полукольца, алгебры,  $\sigma$ -алгебры. Борелевская алгебра.
3. Необходимость пересмотра понятия интеграла.
4. Общее понятие меры. Свойства: монотонность,  $\sigma$ -аддитивность, непрерывность, субаддитивность, полнота меры.
5.  $\sigma$ -аддитивность длины, как меры на системе полуинтервалов.
6. Конструкция продолжения меры по Лебегу: внешняя мера, измеримые множества, субаддитивность, критерий измеримости.
7. Основная теорема о продолжении меры по Лебегу.
8.  $\sigma$ -конечные меры и их продолжение по Лебегу.
9. Мера Лебега на отрезке и на прямой: конструкция, множества меры нуль, множество Кантора, неизмеримые множества, сравнение измеримых множеств с борелевскими.
10. Меры Лебега-Стилтьеса: конструкция, мера одноточечного множества, множества меры нуль.

11. Абсолютная непрерывность меры относительно другой меры.
12. Абсолютно непрерывные функции и порожденные ими меры Лебега-Стилтьеса. Функция Кантора.
13. Простые функции. Измеримые функции. Приближение измеримых функций простыми.
14. Различные типы сходимости последовательностей функций. Теорема о пределе последовательности измеримых функций. Замкнутость множества измеримых функций относительно алгебраических операций.
15. Интеграл Лебега от простой функции. Интегрируемые по Лебегу функции, интегральные суммы Лебега, сравнение с интегральными суммами Римана.
16. Элементарные свойства интеграла Лебега, неравенство Чебышева.
17. Вопрос о возможности предельного перехода под знаком интеграла.
18. Теорема Лебега о мажорированной сходимости.
19. Теорема Б.Леви.
20. Теорема Фату.
21. Произведение мер. Теорема Фубини.
22. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. Критерий интегрируемости по Риману.
23. Метрические пространства. Топология метрического пространства.
24. Полные метрические пространства. Принцип вложенных шаров.
25. Пополнение метрического пространства.
26. Пространство  $L_1[0,1]$  как пополнение пространства  $C[0,1]$  с интегральной нормой.
27. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского. Пространства  $L_p[0,1]$  их полнота.
28. Принцип сжимающих отображений и его варианты.
29. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям в пространствах  $C[a,b]$  и  $L_2(T,m)$ .
30. Векторные пространства. Понятие топологического векторного пространства. Норма и полунорма. Нормированные пространства.
31. Банаховы пространства. Теорема об абсолютно сходящихся рядах.
32. Скалярное произведение. Гильбертовы пространства.
33. Теорема о проекции.
34. Разложение по ортонормированным системам в гильбертовом пространстве.

### **Примерный перечень вопросов к экзамену**

#### **2 семестр**

1. Линейные ограниченные операторы. Норма оператора. Интегральные операторы в пространствах  $C[0,1]$  и  $L_2[0,1]$

2. Пространство ограниченных линейных операторов. Теорема о полноте пространства операторов. Различные типы сходимости последовательностей операторов.

3. Теорема Банаха – Штейнгауза.

4. Обратные операторы, связь с разрешимостью уравнений  $Ax = y$ .

Теоремы о существовании обратных.

5. Теорема Банаха об обратном операторе и ее следствия.

6. Линейные ограниченные функционалы и сопряженное пространство.

Теорема Рисса об общем виде функционала на гильбертовом пространстве.

7. Теорема Хана – Банаха о продолжении ограниченного линейного функционала.

8. Сопряженный оператор к оператору в банаховых пространствах.

Теорема об условиях разрешимости уравнения  $Ax = y$ .

9. Альтернатива Фредгольма.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

| Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование | Название кафедры                                     | Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине | Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) |
|---|--|---|---|
| 1. Уравнения математической физики                            | Кафедра математической кибернетики                   | нет   | Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 04.06.2020)                                      |
| 2. Численные методы   | Кафедра веб-технологий и компьютерного моделирования | нет   | Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 04.06.2020)                                      |
|   |  |   |   |

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО  
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

| №<br>п/п | Дополнения и изменения | Основание |
|----------|------------------------|-----------|
|          |                        |           |

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_ 202\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_