БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям
________________ О.Н.Здрок
«___» ____________ 2020 г.
Регистрационный № УД-8872/уч.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности

1-31 03 08 Математика и информационные технологии
(по направлениям)
Направление специальности:
1-31 03 08-01 Веб-программирование и интернет-технологии,
1-31 03 08-02 Математическое и программное обеспечение мобильных устройств

2020г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 08-2014 в соответствии с учебными планами № G31-195/уч., № G31-196/уч., № G31з-197/уч., № G31з-200/уч., № G31з-198/уч., № G31з-199/уч от 30.05.2014

СОСТАВИТЕЛИ:

Антоневич А.Б. – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

Леонов Н.Н. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Мазель М.Х. – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

Пиндрик О.И. – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Ромащенко Г.С. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Чесалин В.И. – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Шагова Т.Г. – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Пыжкова Ольга Николаевна, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент;

Кротов Вениамин Григорьевич, заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета БГУ, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики
(протокол № 12 от 04.06.2020);
Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 5 от 17.06.2020)

Зав. кафедрой ФАиАЭ , профессор ________________ А.В. Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины – освоение студентами языка современной математики, владение общими конструкциями и умение их применять в теоретических и прикладных задачах.

Образовательная цель: изложение основ теории меры и интеграла Лебега, изучение функциональных метрических пространств, теории нормированных, в частности, гильбертовых, пространств, теории линейных операторов и операторных уравнений.

Развивающая цель: формирование у студентов основ современного математического мышления, обучение методам математических исследований, изучение конкретных функционально-аналитических конструкций.

Задачи учебной дисциплины:

1. Обобщить на более абстрактном уровне понятия, изученные в курсе математического анализа, алгебры и дифференциальных уравнений.
2. Изучить систему аксиом и принципов функционального анализа.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к циклу специальных дисциплин (государственный компонент)

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Изучение дисциплины базируется на знаниях следующих дисциплин: «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения». Дисциплина имеет тесную связь с курсами «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Уравнения математической физики», «Методы оптимизации», «Экстремальные задачи и вариационное исчисление», «Численные методы».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Функциональный анализ» должно обеспечить формирование следующих академических, социально-личностных и профессиональных компетенций.

академические компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

социально-личностные компетенции:

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

профессиональные компетенции:

ПК-4. Самостоятельно работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой, в том числе с доступной в компьютерных сетях.

ПК-16. Готовить доклады, материалы к презентациям.

ПК-17. Пользоваться глобальными информационными ресурсами.

ПК-18. Владеть современными средствами телекоммуникаций.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные понятия и результаты теории меры и интеграла Лебега;
- основные понятия и результаты теории нормированных пространств и операторов в них;
- методы доказательств и алгоритмы решения задач функционального анализа.

уметь:

- выявлять конструкции функционального анализа в конкретных задачах;
- устанавливать свойства отображений в функциональных пространствах;
- применять результаты функционального анализа для решения теоретических и прикладных задач;

владеть:

- основными методами вычисления интегралов Лебега;
- методами доказательств и аналитического исследования отображений на непрерывность, равномерную непрерывность, выполнение условия Липшица;
- методами исследования разрешимости и нахождения решения операторных уравнений;
- навыками самообразования и способами использования аппарата функционального анализа для проведения теоретических и прикладных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 семестре дневной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Функциональный анализ» отведено 166 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 4 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет, экзамен.

Дисциплина изучается в 4-6 семестрах заочной (сокращенной) формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Функциональный анализ» отведено 166 часов, в том числе 18 аудиторных часов, из них:

в 4 семестре 80 часов, в том числе 8 аудиторных часов, из них лекции – 8 часов; в 5 семестре 46 часов, в том числе 10 аудиторных часов, из них: лекции – 6 часов, практические занятия – 4 часа; в 6 семестре всего 40 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 4 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет в 5 семестре, экзамен в 6 семестре.

Дисциплина изучается в 6-8 семестрах заочной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Функциональный анализ» отведено 166 часов, в том числе – 18 аудиторных часов, из них:

в 6 семестре 80 часов, в том числе 8 аудиторных часов, из них лекции – 6 часов, практических занятий – 2; в 7 семестре 46 часов, в том числе 10 аудиторных часов, из них: лекции – 8 часов, практические занятия – 2 часа; в 8 семестре - всего 40 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 4 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет в 7 семестре, экзамен в 8 семестре.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Метрические пространства.
1.1. Метрические пространства. Топология, порожденная метрикой.
Основные примеры функциональных метрических пространств.
1.2. Полные пространства. Теорема о пополнении.
Тема 2. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения.
2.1. Теоремы о продолжении. Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям.
Тема 3. Мера и интеграл Лебега.
3.1. Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры. Общее понятие меры.
3.2. Сигма-аддитивные меры. Продолжение меры по Лебегу. Основная теорема. Мера Лебега и меры Лебега-Стилтьеса на прямой.
3.3. Измеримые функции, простые функции. Интеграл от простой функции. Общее определение интеграла Лебега.
3.4. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.
Тема 4. Нормированные пространства.
4.1. Векторные, нормированные, банаховы пространства. Ряды в банаховых пространствах.
4.2. Линейные операторы. Норма ограниченного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.
Тема 5. Гильбертовы пространства.
5.1. Определение скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Теорема о проекции. Теорема о рядах Фурье.
Тема 6. Линейные уравнения в банаховых пространствах.
6.1. Обратимые операторы. Теоремы об обратимости.
6.2. Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора.
Тема 7. Сопряженные пространства и сопряженные операторы.
7.1. Линейные ограниченные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовых и некоторых других конкретных пространствах.
7.2. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и его свойства. Теорема об условиях разрешимости линейного уравнения.
Тема 8. Уравнения с компактными операторами.
8.1. Альтернатива Фредгольма для уравнений с операторами конечного ранга. Компактные операторы. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах. Критерий конечномерности нормированного пространства.

8.2. Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве.
8.3. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	5 семестр							
1	**Метрические пространства**	**4**	**4**				**4**	
1.1	Метрические пространства. Топология, порожденная метрикой. Примеры основных функциональных метрических пространств.	2	2				2	Проверка индивидуальных заданий
1.2	Полные метрические пространства. Теорема о пополнении.	2	2					Опрос, проверка индивидуальных заданий
2	**Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения**	**2**	**2**					
2.1	Теоремы о продолжении. Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям.	2	2				2	Коллоквиум. Проверка индивидуальных заданий
3	**Мера и интеграл Лебега.**	**8**	**6**				**2**	
3.1	Задача о пополнении пространства непрерывных функций с интегральной метрикой. Общее понятие меры. Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры.	2	2					Коллоквиум.
3.2	Сигма-аддитивные меры. Сигма-аддитивность длины. Продолжение меры по Лебегу. Основная теорема. Мера Лебега и меры Лебега-Стилтьеса на прямой.	2	2				2	Проверка индивидуальных заданий
3.3	Измеримые функции, простые функции. Интеграл от	2						Проверка индивидуальных

	простой функции. Общее определение интеграла Лебега.							заданий
3.4	Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского. Пространства $L_p[T,m]$. Их полнота. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям в $L_p[T,m]$.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
4	**Нормированные пространства**	**4**	**4**					
4.1	Векторные, нормированные, банаховы пространства. Ряды в банаховых пространствах.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
4.2	Линейные операторы. Норма ограниченного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
5	**Гильбертовы пространства**	**4**	**2**					
5.1	Определение скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Теорема о проекции. Теорема о рядах Фурье.	4	2					Опрос, проверка индивидуальных заданий
6	**Линейные уравнения в банаховых пространствах**	**4**	**4**					
6.1	Обратимые операторы. Теоремы об обратимости.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
6.2	Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора.	2	2					Коллоквиум
7	**Сопряженные пространства и сопряженные операторы**	**4**	**4**					
7.1	Линейные ограниченные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовых и некоторых других конкретных пространствах.	2	2					
7.2	Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и его свойства. Теорема об условиях разрешимости линейного уравнения.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
8	**Уравнения с компактными операторами**	**6**	**4**					
8.1	Альтернатива Фредгольма для уравнений с операторами конечного ранга. Компактные операторы. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах.	2						

	Критерий конечномерности нормированного пространства.							
8.2	Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
8.3	Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений в пространствах $L_2[a,b]$ и $C[a,b]$.	2	2					Проверка индивидуальных заданий. Контрольная работа
	Всего	**36**	**30**				**6**	

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Заочная форма получения образования (сокращенная)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	
1	2	3	4	5	6	7	9
	4 семестр	**8**					
1	**Метрические пространства**	**2**					
1.1	Метрические пространства. Топология, порожденная метрикой. Примеры основных функциональных метрических пространств.	1					Коллоквиум.
1.2	Полные метрические пространства. Теорема о пополнении.	1					
2	**Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения**	**2**					
2.1	Теоремы о продолжении. Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям.	2					Коллоквиум.
3	**Мера и интеграл Лебега**	**4**					
3.1	Задача о пополнении пространства непрерывных функций с интегральной метрикой. Общее понятие меры. Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры.	1					
3.2	Сигма-аддитивные меры. Сигма-аддитивность длины. Продолжение меры по Лебегу. Основная теорема. Мера	1					

	Лебега и меры Лебега-Стилтьеса на прямой.						
3.3	Измеримые функции, простые функции. Интеграл от простой функции. Общее определение интеграла Лебега.	1					
3.4	Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского. Пространства $L_p[T,m]$. Их полнота. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям в $L_p[T,m]$.	1					
	5 семестр	**6**	**4**				
4	**Нормированные пространства**	**4**	**2**				
4.1	Векторные, нормированные, банаховы пространства. Ряды в банаховых пространствах.	2					
4.2	Линейные операторы. Норма ограниченного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.	2	2				Проверка индивидуальных заданий
5	**Гильбертовы пространства**	**2**	**2**				
5.1	Определение скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Теорема о проекции. Теорема о рядах Фурье.	2	2				Проверка индивидуальных заданий.
	6 семестр (сокр), 8 семестр						
6	**Линейные уравнения в банаховых пространствах**						
6.1	Обратимые операторы. Теоремы об обратимости.						
6.2	Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора.						Проверка индивидуальных заданий
7	**Сопряженные пространства и сопряженные операторы**						
7.1	Линейные ограниченные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовых и некоторых других конкретных пространствах.						
7.2	Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и						Проверка

	его свойства. Теорема об условиях разрешимости линейного уравнения.						индивидуальных заданий
8	**Уравнения с компактными операторами**						
8.1	Альтернатива Фредгольма для уравнений с операторами конечного ранга. Компактные операторы. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах. Критерий конечномерности нормированного пространства.						Проверка индивидуальных заданий.
8.2	Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве.						
8.3	Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений в пространствах $L_2[a,b]$ и $\mathrm{C}[a,b]$.						Контрольная работа
	Всего	**14**	**4**				

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Заочная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	
1	2	3	4	5	6	7	9
	6 семестр	**6**	**2**				
1	**Метрические пространства**	**2**					
1.1	Метрические пространства. Топология, порожденная метрикой. Примеры основных функциональных метрических пространств.	1					Коллоквиум.
1.2	Полные метрические пространства. Теорема о пополнении.	1					
2	**Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения**	**1**					
2.1	Теоремы о продолжении. Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям.	1					Коллоквиум.
3	**Мера и интеграл Лебега**	**3**					
3.1	Задача о пополнении пространства непрерывных функций с интегральной метрикой. Общее понятие меры. Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры.	1					
3.2	Сигма-аддитивные меры. Сигма-аддитивность длины. Продолжение меры по Лебегу. Основная теорема. Мера Лебега и меры Лебега-Стилтьеса на прямой.		2				Проверка индивидуальных заданий
3.3	Измеримые функции, простые функции. Интеграл от простой функции. Общее определение интеграла Лебега.	1					

3.4	Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского. Пространства $L_p[T,m]$. Их полнота. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям в $L_p[T,m]$.	1					
	7 семестр	**8**	**2**				
4	**Нормированные пространства**	**4**	**2**				
4.1	Векторные, нормированные, банаховы пространства. Ряды в банаховых пространствах.	2					
4.2	Линейные операторы. Норма ограниченного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.	2					
5	**Гильбертовы пространства**	**2**					
5.1	Определение скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Теорема о проекции. Теорема о рядах Фурье.	2					Проверка индивидуальных заданий.
6	**Линейные уравнения в банаховых пространствах**	**2**					
6.1	Обратимые операторы. Теоремы об обратимости.	1					
6.2	Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора.	1	2				Проверка индивидуальных заданий
	8 семестр						
7	**Сопряженные пространства и сопряженные операторы**						
7.1	Линейные ограниченные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовых и некоторых других конкретных пространствах.						
7.2	Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и его свойства. Теорема об условиях разрешимости линейного уравнения.						Проверка индивидуальных заданий
8	**Уравнения с компактными операторами**						
8.1	Альтернатива Фредгольма для уравнений с операторами конечного ранга. Компактные операторы. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах. Критерий конечномерности нормированного пространства.						Проверка индивидуальных заданий.
8.2	Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве.						
8.3	Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений в пространствах						Контрольная работа

	$L_2[a,b]$ и $C[a,b]$.						
	Всего	**14**	**4**				

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп. Минск, Изд-во БГУ, 2006.
2. Антоневич А.Б., Мазель М.Х., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Учебное пособие. Минск, Изд-во БГУ, 2011.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 2004.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М., Высшая школа, 1982.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Физматлит, 2002.

Перечень дополнительной литературы

1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ю., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. Киев, Выща школа, 1990.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. СПб., Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2002.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., Наука, 1979.
4. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск, Вышэйшая школа, 1978.
5. А.А. Нуято. Практикум по функциональному анализу. Учебно - методическое пособие, Нижний Новгород, 2016

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Формой текущей аттестации по дисциплине «*Функциональный анализ*» учебным планом предусмотрены зачет и экзамен.

Контроль работы студента проходит в форме собеседования, контрольной работы в аудитории, коллоквиумов, компьютерного тестирования, проверки математических диктантов, выполнения лабораторных работ, домашних заданий и практических упражнений в аудитории, опросов на практических занятиях, а также самостоятельной работы вне аудитории с предоставлением отчета с его устной защитой.

Задания к контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- Опрос на практических занятиях – 15 %;
- выполнение контрольных работ – 70 %;
- подготовка и защита индивидуального задания – 15 %.

Экзамен по дисциплине проходит в устной или письменной форме.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов Вес оценки по текущей успеваемости составляет 30 %, оценка на экзамене – 70 %.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012 г.).
2. Положение о рейтинговой системе оценки знаний студентов по дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ № № 189 –ОД от 31.03.2020
3. Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 г. № 21-04-1/105).

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.1. *Метрические пространства. Топология, порожденная метрикой. Основные примеры функциональных метрических пространств.*
Студент изучает понятия метрического пространства и метрики. Анализирует варианты задания метрики в различных пространствах. Выполняет индивидуальное задание.
Форма контроля – проверка индивидуального задания и собеседование.

Тема 2.1. *Теоремы о продолжении. Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям.*
Студент изучает понятия непрерывного, равномерно непрерывного, сжимающего и липшицевого отображений. Анализирует условия теоремы о сжимающем отображении. Выполняет индивидуальное задание, состоящее в применении теоремы о сжимающем отображении к конкретному интегральному уравнению.
Форма контроля – проверка индивидуального задания и собеседование.

Тема 3.2. *Сигма-аддитивные меры. Сигма-аддитивность длины. Продолжение меры по Лебегу. Основная теорема. Мера Лебега и меры Лебега-Стилтьеса на прямой.*
Студент изучает понятие сигма-аддитивной меры. Изучает теорему о продолжении меры. Анализирует общность и различие мер Лебега и Лебега-Стилтьеса. Выполняет индивидуальное задание, состоящее в проверке сигма-аддитивности заданных мер, нахождении мер Лебега и Лебега-Стильтеса для указанных множеств.
Форма контроля – проверка индивидуального задания и собеседование.

Примерная тематика практических занятий

Задание 1. Метрические пространства. Топология, порожденная метрикой. Основные примеры функциональных метрических пространств.
Задание 2. Полные пространства. Теорема о пополнении.
Задание 3. Теоремы о продолжении. Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям.
Задание 4. Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры. Общее понятие меры.
Задание 5. Сигма-аддитивные меры Продолжение меры по Лебегу. Основная теорема. Мера Лебега и меры Лебега-Стилтьеса на прямой.
Задание 6. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.
Задание 7. Векторные, нормированные, банаховы пространства. Ряды в банаховых пространствах.

Задание 8. Линейные операторы. Норма ограниченного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза

Задание 9. Определение скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Теорема о проекции. Теорема о рядах Фурье.

Задание 10. Обратимые операторы. Теоремы об обратимости.

Задание 11. Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора.

Задание 12. Линейные ограниченные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовых и некоторых других конкретных пространствах.

Задание 13. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и его свойства. Теорема об условиях разрешимости линейного уравнения

Задание 14. Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве.

Задание 15. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется ***эвристический и практико-ориентированный подходы,*** которые предполагают**:**

- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры
- анализ ситуации, с использованием профессиональных знаний, собственного опыта, дополнительной литературы и иных источников.

Также ***используется метод группового обучения,*** который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Все результаты и достижения группируются на основе основных видов деятельности студентов: учебной, научно-исследовательской и иной. Методы обеспечивают появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения. Также они представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления и являются организацией учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;

– выполнение домашнего задания;

– работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;

– изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;

– подготовка к практическим семинарским занятиям;

– научно-исследовательские работы;

– подготовка и написание рефератов, докладов, эссе и презентаций на заданные темы;

– подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

Примерный перечень заданий для самостоятельной работы студентов

Тема 3.1. *Задача о пополнении пространства непрерывных функций с интегральной метрикой. Общее понятие меры. Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры.*

Студент изучает понятия кольца, алгебры, сигма-алгебры. Анализирует понятие меры на примерах в известных пространствах. Выполняет индивидуальное задание.

Форма контроля – проверка индивидуального задания и собеседование.

Тема 4.2. *Линейные операторы. Норма ограниченного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.*

Студент изучает понятие линейного оператора, ограниченного оператора. Выполняет индивидуальное задание, состоящее в проверке линейности, ограниченности конкретных операторов, оценки их норм.

Форма контроля – проверка индивидуального задания и собеседование.

Примерный перечень вопросов к экзамену/зачету

1. Метрические пространства.
2. Основные примеры функциональных метрических пространств.
3. Полные пространства.
4. Теорема о пополнении.
5. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения.
6. Теоремы о продолжении.
7. Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям.
8. Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры.
9. Общее понятие меры.

10. Сигма-аддитивные меры
11. Продолжение меры по Лебегу. Основная теорема.
12. Мера Лебега и меры Лебега-Стилтьеса на прямой.
13. Измеримые функции, простые функции.
14. Интеграл от простой функции.
15. Общее определение интеграла Лебега.
16. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.
17. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.
18. Векторные, нормированные, банаховы пространства.
19. Ряды в банаховых пространствах.
20. Линейные операторы.
21. Норма ограниченного оператора.
22. Пространство линейных ограниченных операторов.
23. Теорема Банаха-Штейнгауза
24. Определение скалярного произведения.
25. Неравенство Коши-Буняковского.
26. Гильбертовы пространства.
27. Теорема о проекции.
28. Теорема о рядах Фурье.
29. Обратимые операторы.
30. Теоремы об обратимости.
31. Теорема Банаха об обратном операторе.
32. Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора.
33. Линейные ограниченные функционалы.
34. Теорема Хана-Банаха.
35. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовых и некоторых других конкретных пространствах.
36. Сопряженное пространство.
37. Сопряженный оператор и его свойства.
38. Теорема об условиях разрешимости линейного уравнения
39. Альтернатива Фредгольма для уравнений с операторами конечного ранга.
40. Компактные операторы.
41. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах.
42. Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве.
43. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений.

Другая значимая информация

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа 1.

1. Найти интеграл Лебега $\int_{[0,1]} f(t)dt$, если он существует, где

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n}{3^n}, & t\in\left]\dfrac{1}{3^{n+1}},\dfrac{1}{3^n}\right[\setminus K,\ \ n\in\mathbb{N},\\ [5^t], & t\in K,\\ \cos t, & t\in\left]\dfrac{1}{3},1\right[\setminus K.\end{cases}$$

2. На полуинтервале $[0,1[$ задана мера Лебега-Стилтьеса, порожденная функцией

$$F(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\in\left[0,\dfrac{6}{13}\right],\\ \dfrac{3}{4}, & t\in\left]\dfrac{6}{13},\dfrac{7}{13}\right],\\ t+\dfrac{2}{3}, & t\in\left]\dfrac{7}{13},1\right[,\end{cases}$$

где $\varphi(t)$ – канторова лестница.

a) Доказать, что любое одноточечное множество измеримо и найти его меру Лебега-Стилтьеса.

b) Найти меру Лебега-Стилтьеса множества рациональных чисел на полуинтервале $[0,1[$.

c) Найти меру Лебега-Стилтьеса канторова множества K.

Контрольная работа 2.

1. Проверить, сходятся ли последовательность $x_n=\left(\underbrace{1,0,\ldots,0}_{n},\underbrace{1+\frac{1}{n},\ldots,1+\frac{1}{n}}_{n^2},0,0,\ldots\right)$ точек метрического пространства $l_{5/3}$ к точке $x_0=(1,1,0,0,0,\ldots)$?

2. Найти предел последовательности $x_n=\left(\underbrace{\frac{\sin 3^n}{n^2},\ldots,\frac{\sin 3^n}{n^2}}_{n},0,0,\ldots\right)$ в метрическом пространстве l_1, если он существует.

3. Найти проекцию вектора $x_0\in H$ на подпространство M, если $H=L_2[0,1]$, $\quad M=\left\{x:\ \int_0^1 x(t)dt=0\right\}$, $\ x_0=\ t^n$.

Контрольная работа 3.

1. С помощью сопряженного уравнения при каждом значении $\lambda\in\mathbb{R}$ выяснить, для каких значений параметров $\alpha,\beta,\gamma\ \in\mathbb{R}$ существует решение интегрального уравнения Фредгольма

$$x(t)=\lambda\int_0^1 K(t,s)x(s)ds\ +y(t)$$

в пространстве $L_2[a,b]$, если $K(t,s)=2ts+s^2$, $y(t)=\alpha t^2-\beta t\ +\gamma$.

2. Найти сопряженный к оператору $A: X\to Y$, где $X=L_1[0,1]$, $Y=L_3[0,1]$ и $(Ax)(t)=\int_0^1\frac{s}{\sqrt[3]{t}}x(s)ds$.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Теория вероятностей и математическая статистика	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 04.06.2020)
Уравнения математической физики	Кафедра математической кибернетики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 04.06.2020)
Вариационное исчисление и методы оптимизации	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 04.06.2020)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
________________________________ (протокол № ____ от ________ 202_ г.)

Заведующий кафедрой
_______________________ ________________ ____________________

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
_______________________ ________________ ____________________