Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

СОГЛАСОВАНО
И.О. Заведующего кафедрой
________________Рушнова И.И.
«10» сентября 2020 г.

СОГЛАСОВАНО
Декан физического факультета
________________Тиванов М.С.
«24» сентября 2020 г.

СОГЛАСОВАНО
Председатель
учебно-методической комиссии физического факультета
________________Филиппова Н.К.
«24» сентября 2020 г.

Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной

Электронный учебно-методический комплекс для специальностей:

1-31 04 02 «Радиофизика»;
1-31 04 03 «Физическая электроника»;
1-31 04 04 «Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии»;
1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)»;
направление специальности:
1-31 03 07-02 «Прикладная информатика (информационные технологии телекоммуникационных систем)»;
1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)»;
направление специальности:
1-98 01 01-02 «Компьютерная безопасность (радиофизические методы и программно-технические средства)»

Регистрационный № 2.4.2-12/102

Авторы:
Ахраменко В. К., старший преподаватель;
Ильинкова Н. И., кандидат физико-математических наук, доцент;
Рушнова И. И., кандидат физико-математических наук;
Чехменок Т. А., старший преподаватель.

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ 28.09.2020 г., протокол № 1.

Минск 2020

УДК 517(075.8)
М 34

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ.
Протокол № 1 от 28.09.2020 г.

Решение о депонировании вынес:
Совет физического факультета
Протокол № 2 от 24.09.2020 г.

А в т о р ы:

Ахраменко Виктор Корнеевич, старший преподаватель кафедры высшей математики и математической физики физического факультета БГУ;

Ильинкова Наталья Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета БГУ;

Рушнова Ирина Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета БГУ;

Чехменок Татьяна Александровна, старший преподаватель кафедры высшей математики и математической физики физического факультета БГУ.

Рецензенты:

Гуло И. Н., заведующий кафедрой математики и методики преподавания математики БГПУ им. М. Танка, кандидат физико-математических наук, доцент;

Толстик А. Л., заведующий кафедрой лазерной физики и спектроскопии физического факультета БГУ, доктор физико-математических наук, профессор.

Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : электронный учебно-методический комплекс для специальностей: 1-31 04 02 «Радиофизика», 1-31 04 03«Физическая электроника», 1-31 04 04 «Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии», 1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)», 1-31 03 07-02 «Прикладная информатика (информационные технологи телекоммуникационных систем)», 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)», 1-98 01 01-02 «Компьютерная безопасность (радиофизические методы и программно-технические средства)» / В. К. Ахраменко [и др.] ; БГУ, Физический фак., Каф. высшей математики и математической физики. – Минск : БГУ, 2020. – 180 с. : ил. – Библиогр.: с. 177–178.

В электронном учебно-методическом комплексе (ЭУМК) по учебной дисциплине «Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной» изложены теория пределов, основные понятия дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной, которые сопровождаются большим количеством примеров и задачами. ЭУМК предназначен для студентов и преподавателей учреждений высшего образования.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Математический анализ является базой для изучения студентами физических специальностей многих математических дисциплин, таких как дифференциальные уравнения, уравнения математической физики и др.

Согласно типовому учебному плану по специальностям 1-31 04 02 Радиофизика; 1-31 04 03 Физическая электроника; 1-31 04 04 Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии; 1-31 03 07 Прикладная информатика (по направлениям), направлению специальности 1-31 03 07-02 Прикладная информатика (информационные технологии телекоммуникационных систем); 1-98 01 01 Компьютерная безопасность (по направлениям), направлению специальности 1-98 01 01-02 Компьютерная безопасность (радиофизические методы и программно-технические средства) – на проведение лекционных занятий по курсу «Математический анализ» в первом семестре отводится 68 часов, на практические занятия – 68.

Цель дисциплины математический анализ в первом семестре – овладение фундаментальными понятиями теории пределов, дифференцирования и интегрирования функций одной переменной; постижение навыков использования полученных знаний в смежных математических и физических курсах при решении прикладных и исследовательских задач.

Основная задача дисциплины – обеспечить глубокую математическую подготовку, выработать навыки исследования и решения различных задач современной математики и физики.

В результате изучения учебной дисциплины в первом семестре студент должен:

знать:

– *теорию пределов;*

– *основы дифференциального и интегрального исчисления и их приложения;*

– *методы исследования функций одной переменной с использованием аппарата дифференциального исчисления;*

– *принципы построения и использования интегралов при математическом моделировании прикладных задач;*

– *принципы построения и исследования несобственных интегралов;*

уметь:

– *вычислять пределы;*

– *дифференцировать и интегрировать функции;*

– *исследовать свойства функций методами дифференциального исчисления;*

– *исследовать сходимость последовательностей и несобственных интегралов;*

– *применять методы математического анализа при построении и исследовании математических моделей прикладных задач;*

владеть:

– навыками применения знаний в области математического анализа в профессиональной деятельности;

– аппаратом математического анализа;

– основными подходами к исследованию функциональных зависимостей;

– навыками построения и исследования математических моделей естественных процессов.

Данный электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для оказания помощи студентам в усвоении учебного материала, подборке литературы при подготовке к практическим занятиям, зачету, экзамену, развитии навыков принятия самостоятельных решений при исследовании прикладных задач. Также настоящий ЭУМК предназначен начинающим преподавателям для разработки лекционных и практических занятий.

Результативность самостоятельной работы студентов рекомендуется проверять в форме коллоквиумов, контрольных работ, компьютерных тестов, устных опросов по разделам дисциплины.

Рекомендации по изучению курса математического анализа

Настоящий ЭУМК состоит из четырех разделов: пояснительная записка, теоретический раздел, практический раздел, раздел контроля знаний. Теоретический раздел содержит шесть глав. В конце каждой главы приводится список вопросов, цель которых – дать возможность студенту самостоятельно проконтролировать степень усвоения предложенного материала. Лекционный материал сопровождается большим количеством разобранных практических примеров, их рассмотрение обеспечит возможность самостоятельного решения типовых задач. Изобилие задач различной сложности предложено в практическом разделе, который в свою очередь разделен на темы согласно учебному плану. Каждая тема сопровождается задачами для решения в условиях аудиторных занятий (онлайн занятий) и домашним заданием. После того, как изучен материал главы (глав), решены примеры из соответствующих тем практической части курса с целью диагностики уровня усвоения материала, студенту предлагается выполнить задания из раздела контроля знаний. В конце ЭУМК приводятся задания для подготвки к зачету и вопросы к экзамену. После изучения настоящего материала студент будет понимать связи между основными понятиями и результатами математического анализа; уметь давать ответы на контрольные вопросы; решать основные типовые задачи.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1.1. Введение

1.1.1. Элементы теории множеств и математической логики

Понятие множества является одним из основных в математике. Оно принадлежит к так называемым первичным понятиям, которые не определяются через более простые. Под ***множеством*** понимают совокупность объектов, объединяемых в одну группу по определённым признакам. Примеры множеств: *множество студентов в аудитории; множество тех из них, кто изучал в школе немецкий язык.*

Множества будем обозначать большими буквами: $A, \mathrm{X}, \mathrm{N}, \Delta, \Omega$, а также $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$. Объекты, из которых состоит множество, называются его ***элементами***. Запись $x \in X$ означает, что x является элементом множества X, или x принадлежит X. Если y не является элементом множества X, то пишут $y \notin X$. Запись $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ означает, что множество X является конечным и состоит из n элементов $x_1, x_2, ..., x_n$.

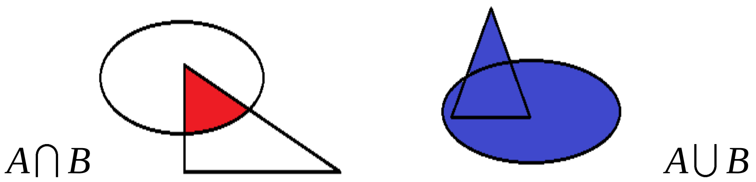
Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то множество A называют ***подмножеством*** множества B и пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. При этом говорят, что A содержится в B, или B содержит A. Если существует элемент $a \in A$ такой, что $a \notin B$, то множество A не является подмножеством множества B, что обозначают: $A \not\subset B$. Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными. Если A и B равные множества, то пишут $A = B$.

Для выделения из множества Y подмножества X тех элементов x, которые имеют определённое свойство P, используют запись $X = \{x \in Y : P\}$ (: – такой что). Например, $X = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$.

Может случиться, что ни один элемент множества Y не имеет свойства P. Тогда множество $\{x \in Y : P\}$ называется ***пустым множеством*** и обозначается $\varnothing$. Например, $X = \{x \in \mathbb{R} : x^4 + 1 = 0\} = \varnothing$. Пустое множество считается подмножеством любого множества.

Пересечением множеств A и B называется множество тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, и обозначается $A \bigcap B$.

Объединением множеств A и B называется множество всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B и обозначается $A \bigcup B$. Операции пересечения и объединения множеств хорошо иллюстрируются диаграммами Эйлера-Вена:



Иногда рассматривают более двух множеств и тогда запись $S = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ означает, что множество S состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A_k, $k = \overline{1,n}$, а запись $P = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$, что P состоит из элементов, принадлежащих каждому из множеств A_k, $k = \overline{1,n}$.

Два элемента a и b, $a \in A,\ b \in B$, записанные в виде $(a;b)$, будем называть ***упорядоченной парой***. Две пары $(a_1;b_1)$ и $(a_2;b_2)$ называются равными, когда и только когда $a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$. Если $a \neq b$, то $(a;b) \neq (b;a)$.

Множество, элементами которого являются все упорядоченные пары $(a;b),\ a \in A,\ b \in B$, называется ***декартовым произведением*** множеств A и B и обозначается $A \times B$. Если, например, $A = \{1,2\},\ B = \{2,3\}$, то $A \times B = \{(1;2), (1;3), (2;2\}, (2;3)\}$, $B \times A = \{(2;1), (2;2), (3;1), (3;2)\}$. Очевидно, что $A \times B \neq B \times A$.

Пусть даны два множества X и Y. Пусть каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие определённый элемент $y \in Y$. Само соответствие будем обозначать буквой f, а то, что элемент $x \in X$ при этом соответствии переходит в элемент $y \in Y$, будем записывать символически $y = f(x)$. При такой записи x называют ***аргументом*** или ***независимой переменной***, y – ***зависимой переменной***. Такое соответствие f будем называть ***отображением*** множества X во множество Y или ***функцией*** из множества X во множество Y, что записывают также в виде $f : X \to Y$. Множество X, на котором определена функция f, будем называть ***областью определения*** функции f и при этом будем использовать обозначение $D(f) = X$.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X и отображает множество X во множество Y. Через $f(X)$ будем обозначать множество всех тех элементов из Y, которые являются значениями функции $f(x)$ при всех $x \in X$.

Множество $f(X)$ будем называть ***множеством значений*** функции $f(x)$ на множестве X. Понятно, что $f(X) \subset Y$.

Если же $f(X) = Y$, т.е. каждый элемент множества Y является значением функции $f(x)$ при некотором $x \in X$, то говорят, что функция $f(x)$ отображает X на Y.

а) Числовые функции чаще всего задают формулами, позволяющими вычислить значение величины y для любого значения величины x. Такой способ задания называют ***аналитическим***. Например, $y = x^2$, $y = \sin^3 2x$.

В качестве примеров рассмотрим несколько простых функций, задаваемых разными способами, которые будем в дальнейшем использовать.

1) Функция **Антье** $y = [x]$ –целая часть числа x. Так называют наибольшее целое число, не превосходящее числа x. Например, $[2{,}5] = 2, [\pi] = 3, [5] = 5, [-\pi] = -4$.

2) Величина $x - [x]$ называется дробной частью числа x. Функция $y = x - [x]$ – периодическая с периодом 1 и всегда $0 \le x - [x] < 1$.

3) Функция **эн-факториал** $y = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, n–целые положительные числа. Например, $3! = 6,\ 4! = 3! \cdot 4 = 24,\ n! = (n-1)! \cdot n$.

б) На практике часто соответствие между значениями аргумента и значениями функции задаются рисунками.

Множество упорядоченных пар $(x; f(x)), x \in X$ называется графиком функции $f(x)$ на множестве X. График функции обладает важным свойством: всякая вертикальная прямая $x = x_0,\ x_0 \in X$ пересекает график функции только в одной точке.

Следует заметить, что функция на различных частях её определения может быть задана разными формулами.

4) Функция **сигнум** или **знак-функция** $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

Если $f(X) = Y$ и при любых $x_1 \ne x_2,\ x_1, x_2 \in X$ также $f(x_1) \ne f(x_2)$, то отображение f множества X на множество Y называется ***взаимно однозначным***.

Например, функция $y = x^2$ задаёт взаимно однозначное отображение множества $X_1 = [0,1]$ на множество $Y = [0,1]$. В то же время множество $X_2 = [-1,1]$ тоже отображается этой функцией на множество $Y = [0,1]$, но это отображение не является взаимно однозначным.

В случае взаимно однозначного отображения на множестве $Y = f(X)$ можно определить функцию $x = \varphi(y)$, поставив в соответствие каждому элементу $y \in Y$ такой элемент $x \in X$, что $y = f(x)$. Эта функция называется ***обратной функцией для функции*** f и обозначается $x = f^{-}(y)$. Функции $y = f(x)$ и $x = f^{-}(y)$ называются при этом ***взаимно обратными***.

Пусть даны функции $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ (или $f(x) = y, g(y) = z$). Функцию $g \circ f: X \to Z$ (или $g\left(f(x)\right)$) будем называть ***сложной функцией*** или ***композицией*** функций f и g. Например, функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ является композицией функций $y = \sqrt{u}, u = 1 - v, v = x^2$.

Функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и композиций, называются ***элементарными функциями***. А под основными элементарными функциями понимают те, которые изучали в средней школе: постоянная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

В математике наряду с понятиями теории множеств широко используется язык математической логики, основу которого составляет теория высказываний. Высказывание как и множество является первичным неопределяемым понятием. ***Высказыванием*** считается всякое предложение, о котором можно сказать, что его утверждение является или истинным, или ложным. Так к высказываниям принадлежат следующие утверждения: “Если четырёхугольник является квадратом, то он прямоугольник”– истинное утверждение. “Если четырёхугольник является прямоугольником, то он квадрат”– ложнае утверждение. “Во время лекции по математическому анализу всегда светит солнце” – ложное.

Импликацией высказываний A и B называется высказывание $A \Rightarrow B$, которое читается: *“если A, то B”*. Высказывание $A \Rightarrow B$ читают также: *“из A следует B”, “Для того чтобы B, достаточно A”, “Для того чтобы A, необходимо B”*. При этом A называют ***условием***, а B – ***следствием***. Говорят также, что A является ***достаточным условием*** для B, а B является ***необходимым условием*** для A $\left(\underset{(Д.)}{A} \Rightarrow \underset{(Н.)}{B}\right)$.

Пример 1. A: “Четырёхугольник является ромбом”; B: “Четырёхугольник является параллелограммом”. Имеем $A \Rightarrow B$, т.е.:

► 1. Для того чтобы четырёхугольник был ромбом, необходимо, чтобы он был параллелограммом.

2. Для того чтобы четырёхугольник был параллелограммом, достаточно, чтобы он был ромбом. ◄

Если для высказываний A и B имеют место импликации $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то высказывания A и B называют ***эквивалентными*** или ***равносильными*** и пишут $A \Leftrightarrow B$. Высказывание $A \Leftrightarrow B$ читают также: *“Для того чтобы A, необходимо и достаточно чтобы B”, “A когда и только когда B”*. Теоремы с такими высказываниями будем называть ***критериями***.

Пример 2. A: “Треугольник является равнобедренным”; B: “Два угла треугольника равны”.

► Имеем $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, т.е. $A \Leftrightarrow B$. Таким образом, имеют место утверждения: “Для того чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы два его угла были равными”, или “Для того чтобы два угла треугольника были равными, необходимо и достаточно, чтобы треугольник был равнобедренным”. То же самое можно сформулировать при помощи других слов: “Треугольник является равнобедренным, когда и только когда два его угла равны”, или: “Два угла треугольника равны, когда и только когда он равнобедренный”. ◄

В математике кроме высказываний встречаются утверждения, которые зависят от одной или нескольких переменных. В математической логике их называют ***предикатами*** и обозначают $A(x), B(x,y)$ и т.д. При этом обязательно отмечается на каком множестве рассматриваются переменные. Предложение “$A(x),\ x \in X$” не является высказыванием на всём множестве X. Но если взять $x_0 \in X$, то $A(x_0)$ – высказывание. С предикатами связаны два вида предложений:

1) Для всех x из множества X имеет место $A(x)$.

2) Существует элемент x_0 из множества X такой, что имеет место $A(x_0)$.

Эти предложения можно записать кратким способом:

1) $\forall x \in X \mapsto A(x)$; 2) $\exists x_0 \in X : A(x_0)$.

Знаки $\forall, \exists$ называются соответственно ***квантором общности*** и ***квантором существования***.

Квантор $\forall$ заменяет словосочетания: *“для всех”, “для каждого”*.

Квантор $\exists$ замяняет словосочетания: *“существует”, “найдётся”*.

Символ $\mapsto$ означает: *“имеет место”*, а символ : – *“такой, что”*.

Отрицанием высказывания A называется высказывание $\overline{A}$ (читается: *“не A”*), которое истинно, когда и только когда A ложно. Так высказывание “5 является чётным числом” есть отрицание высказывания “5 является нечётным числом”.

Рассмотрим правила построения отрицаний некоторых утверждений.

1º. Пусть имеет место утверждение: “$\forall x \in X \mapsto A(x)$”. Тогда его отрицанием $\overline{\forall x \in X \mapsto A(x)}$ является утверждение: “не для каждого элемента x из множества X имеет место $A(x)$”, или иначе “существует элемент x из множества X такой, что имеет место $\overline{A(x)}$”. Таким образом, имеем $\overline{\forall x \in X \mapsto A(x)} \Leftrightarrow \exists x \in X : \overline{A(x)}$.

2º. Аналогично получается $\overline{\exists x \in X : A(x)} \Leftrightarrow \forall x \in X \mapsto \overline{A(x)}$.

Полученные правила построения отрицаний называют ***правилами де Моргана***.

1.1.2. Действительные числа

Вопрос о том, что представляют собой числа, является в большей степени предметом многочисленных исследований философии, чем математики. Мы же будем рассматривать числа как нечто непосредственно данное. И прежде всего это целые положительные или ***натуральные*** числа, множество которых будем обозначать $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Знакомство с натуральными числами возникает у человека в самом начале его мыслительной деятельнльности, например при оценке количества предметов. Точно также и правила, по которым можно производить действия над натуральными числами, мы тоже будем считать данными.

Часто встречаются задачи следующего типа: доказать истинность утверждения $A(n),\ n \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \geq 1.$ При этом пользуются методом ***математической индукции*:** утверждение $A(n)$ считают истинным $\forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N},$ если выполняются следующие два условия: **1)** высказывание $A(n)$ истинно при $n = n_0$; **2)** из истинности высказывания $A(m)$ следует истинность высказывания $A(m+1)$ для всех натуральных $m > n_0$. Условие истинности высказывания $A(n_0)$ называется ***базой индукции*** (чаще всего $n_0 = 1$), а предположение истинности высказывания $A(m)$ – ***индуктивным соглашением***.

Пример. Докажем ***неравенство Бернулли*** $(1+x)^n \geq 1+nx$, справедливое $\forall n \in \mathbb{N}$ и при $x > -1$.

► При $n = 1$ это неравенство верно. Предположим, что оно верно при $n = m > 1$, т.е. $(1+x)^m \geq 1+mx$ и докажем, что тогда верно неравенство $(1+x)^{m+1} \overset{?}{\geq} 1+(m+1)x$. Умножив обе части верного неравенства на $1+x>0$, получим, что верно неравенство $\left(1+x\right)^{m+1} \geq (1+mx)(1+x) = 1+(m+1)x+mx^2$. Отбросив справа неотрицательное число mx^2, правую часть неравенства мы только уменьшим, что и приводит к справедливости неравенства $\left(1+x\right)^{m+1} \geq 1+(m+1)x$. Согласно принципу математической индукции неравенство Бернулли доказано. ◄

В множестве $\mathbb{N}$ операции сложения и умножения всегда выполнимы, т.е. сумма и произведение двух натуральных чисел всегда являются также натуральным числом. Но вот обратные операции, скажем 3-5 или 3:5, не всегда выполнимы в $\mathbb{N}$.

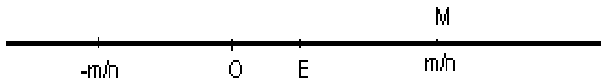
Это обстоятельство вынудило уже очень давно создать число 0 и отрицательные числа, что привело к появлению множества ***целых чисел*** $\mathbb{Z} = \left\{0; \pm 1; \pm 2; \ldots\right\}$. После введения множества целых чисел $\mathbb{Z}$ становится возможной операция вычитания во множестве $\mathbb{Z}$. Во множестве ***рациональных чисел*** $Q = \left\{\dfrac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$ становятся возможными все 4 арифметические действия. Легко проверяется важное свойство множества рациональных чисел, которое формулируется так: множество рациональных чисел является всюду плотным. Это означает, что между двумя сколь угодно близкими друг к другу рациональными числами имеются другие рациональные числа. Действительно, если a и b - рациональные числа, причём $a < b$, то, прибавив к обеим частям неравенства поочерёдно числа a и b, получим неравенства $2a < a+b,\ a+b < 2b$, т.е. $2a < a+b < 2b \Leftrightarrow a < \dfrac{a+b}{2} < b$. Поскольку число $\dfrac{a+b}{2}$ – рациональное, то это означает справедливость свойства плотности рациональных чисел: между любыми двумя рациональными числами всегда существует рациональное число.

Числовой осью называют прямую, на которой выбрана точка O (*начало отсчёта*), масштабный отрезок OE (*длина его считается равной* 1) и *положительное направление* от O до E.

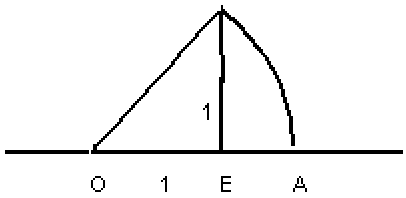
Возникает задача о возможности поставить в соответствие каждой точке M числовой оси определённое число, выражающее длину отрезка OM. Это число будем считать положительным, если M и E находятся по одну сторону от O, и отрицательным – в противоположном случае.

Отметим, что при этом каждому рациональнаму числу m/n соответствует на числовой оси определённая точка. Действительно, мы знаем способ построения отрезка, длина которого составляет $1/n$ часть длины отрезка OE,

$n \in \mathbb{N}$ (теорема Фалеса). Откладывая эту $1/n$-ю часть m раз, мы получим точку M, находящуюся на расстоянии m/n от O. Таким образом, точке M соответствует действительное число m/n.



Однако не каждой точке числовой оси соответствует рациональное число. Для доказательства этого утверждения рассмотрим точку A на числовой оси такую, что длина отрезка равна длине диагонали квадрата со стороной OE. Очевидно $OA^2 = 2$. Убедимся, что точке A не соответствует никакое рациональное число.



(*От противного*) Пусть $|OA| = p/q$ – несократимая дробь. Тогда $(p/q)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$, т.е. число p^2 является чётным, а тем самым p – чётное. Пусть $p = 2p_1$. Имеем $4p_1^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2p_1^2$, т.е. q – чётное число ?!? (знак противоречия).

Возникает необходимость расширения множества рациональных чисел. Нетрудно убедиться, что каждое рациональное число можно представить как бесконечную периодическую десятичную дробь. И наоборот, каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом, т.е. её можно представить в виде p/q.

Бесконечные непериодические десятичные дроби называются ***иррациональными числами***. Объединение множества рациональных и иррациональных чисел называют множеством ***действительных чисел*** и обозначают $\mathbb{R}$.

Отметим два важных для дальнейшего свойства действительных чисел:

1º.(Аксиома Архимеда) $\forall r \in \mathbb{R}_+ \ \exists n \in \mathbb{N}:\ n > r$ (здесь $\mathbb{R}_+$ – множество положительных действительных чисел);

2º.(Плотность множества $\mathbb{R}$**)** $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ \exists c \in \mathbb{R}:\ a < c < b$. Среди наиболее используемых множеств действительных чисел назовём:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}:\ a \le x \le b\}$ – *отрезок (замкнутый промежуток)*;

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}:\ a < x < b\}$ – *интервал (открытый промежуток)*;

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}:\ x > a\}$; $(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R}:\ x < b\}$;

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}:\ x > 0\}$; $\quad \mathbb{R}_0 = \{x \in \mathbb{R}:\ x \geq 0\}$.

Множество $\mathbb{R}$ записывают также в виде промежутка $(-\infty; +\infty) = \{x:\ x \in \mathbb{R}\}$.

Определение. Произвольный интервал (α, β), которому принадлежит точка x_0, будем называть ***окрестностью*** точки x_0. Симметричную относительно x_0 окрестность, т.е. интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, называют ε-***окрестностью*** точки x_0, которую также обозначают $\mathrm{U}_\varepsilon(x_0)$.

Определение. Множество X называется ***ограниченным сверху*** [***снизу***], если $\exists$ действительное число $A\,[a]$ такое, что $\forall x \in X \mapsto x \leq A\,[x \geq a]$. Числа A и a называют соответственно ***верхней*** и ***нижней*** границами множества X. Множество, ограниченное как сверху, так и снизу называется ***ограниченным***. Если множество X ограничено, то существуют A, a: $\forall x \in X \mapsto a \leq x \leq A$. Если $L = \max\{|a|, |A|\}$, то $\forall x \in X \mapsto |x| \leq L$. Таким образом, определение ограниченного множества можно сформулировать и в другом виде: если существует число $L > 0 : \forall x \in X \mapsto |x| \leq L$, то множество X ограничено.

Очевидно, что всякое ограниченное множество имеет бесконечно много как верхних, так и нижних границ.

Определение. Наибольшая из нижних границ ограниченного снизу множества X называется его ***точной нижней границей*** и обозначается $\inf X$ (читается: *инфимум*). Наименшая из верхних границ ограниченного сверху множества X называется его ***точной верхней границей*** и обозначается $\sup X$ (читается: *супремум*).

Понятно, что приведенные определения верхней и нижней границ можно следующим образом записать при помощи математических символов:

$$M = \sup X \iff \begin{cases} 1)\ \forall x \in X \mapsto x \leq M,\ (M - \text{верхняя граница}) \\ \left[\begin{array}{l} 2)\ \forall M' < M\ \exists x' \in X : x' > M', \\ 2')\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon > M - \varepsilon,\ (M - \text{наименьшая}). \end{array}\right. \end{cases}$$

$$m = \inf X \iff \begin{cases} 1)\ \forall x \in X \mapsto x \geq m,\ (m - \text{нижняя граница}) \\ \left[\begin{array}{l} 2)\ \forall\ m' > m\ \exists x' \in X : x' < m', \\ 2')\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon < m + \varepsilon,\ (m - \text{наибольшая}). \end{array}\right. \end{cases}$$

Теорема (о гранях). Каждое непустое ограниченное сверху [снизу] множество действительных чисел имеет точную верхнюю [нижнюю] границу**.**

Замечание. Если множество неограничено сверху, то оно не имеет верхней границы, и поэтому для неограниченного сверху множества X будем писать $\sup X = +\infty$. Соответственно для неограниченного снизу множества X

имеет место $\inf X = -\infty$.

Определение. ***Модулем*** действительного числа a называется неотрицательное число $|a|$:

$$|a| = \left[\begin{array}{l} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a<0, \end{array}\right. \text{ или иначе } |a| = a\,\mathrm{sgn}\,a.$$

Основные свойства модуля:

1) $|a| \geq 0 \ \ \forall a \in \mathbb{R}$;
2) $|a| = |-a| \ \ \forall a \in \mathbb{R}$;
3) $-|a| \leq a \leq |a| \ \ \forall a \in \mathbb{R}$;
4) $|x| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$; $|x| > \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \Leftrightarrow x < -\varepsilon,\ x > \varepsilon$;
5) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (неравенство треугольника);
6) $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$ (в частности $|a-b| \geq |a| - |b|$);
7) $|ab| = |a||b|$;
8) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|},\ b \neq 0.$

1.1.3. Комплексные числа

Решая два простых квадратных уравнения $x^2 - 1 = 0$ и $x^2 + 1 = 0$, мы с удивлением задаёмся вопросом: почему в первом случае уравнение имеет два решения ± 1, а во втором их вовсе нет. Мы с вами расширили понятие числа до множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Возможно в том и суть проблемы, чтобы каким то образом расширить множество $\mathbb{R}$ до некоторого множества, в которое бы $\mathbb{R}$ входило как подмножество и чтобы всякое квадратное уравнение с действительными коэффициентами было разрешимо на этом множестве.

Определение. ***Комплексными числами*** z называют упорядоченные пары действительных чисел $z = (x; y),\ x, y \in \mathbb{R}$, для которых следующим образом определены понятие равенства и операции сложения и умножения: два комплексных числа $z_1 = (x_1; y_1),\ z_2 = (x_2; y_2)$ считаются равными в том и только том случае, когда $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$; сумма $z_1 + z_2$ и произведение $z_1 \cdot z_2$ определяются формулами: $z_1 + z_2 \overset{def}{=} (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$,

$z_1 \cdot z_2 \overset{def}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2;\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Из этих формул следуют соотношения:
$(x_1;0) + (x_2;0) = (x_1 + x_2;0),\ (x_1;0)\cdot(x_2;0) = (x_1 \cdot x_2;0)$, из которых видно, что

арифметические операции над числами вида $(x;0)$ приводят к числам того же вида и с теми же действиями над действительными числами x_1 и x_2. Поэтому разумно отождествить комплексное число $(x;0)$ с ***действительным числом*** x, т.е. $(x;\,0)=x\in\mathbb{R}$. Таким образом, множество действительных чисел вкладывается во множество комплексных чисел.

Поскольку число $(1;0)=1$, то число $(0;1)$ называется ***мнимой единицей*** и обозначается буквой i, т.е. $i\overset{def}{=}(0;1)$. Вычислив произведение $i\cdot i=(0;1)\cdot(0;1)=(-1;0)=-1$, мы получили $i^2=-1$. Это значит, что уравнение $x^2+1=0$ имеет решение i. Легко проверить, что $-i$ тоже является его корнем.

Вычислив произведение действительного числа y на мнимую единицу i, получим $y\cdot i=(y;0)\cdot(0;1)=(0;y)$. Такое число называют ***чисто мнимым*** и обозначают iy.

Имеет место следующее преобразование $z=(x;y)=(x;0)+(0;y)=x+iy$. Поэтому комплексное число $z=(x;y)$ записывают также в виде $z=x+iy$ и такую запись называют ***алгебраической формой*** комплексного числа. При этом число x называют действительной частью комплексного числа z и обозначают $\operatorname{Re}z\overset{def}{=}x$, а число y – мнимой частью комплексного числа z и обозначают $\operatorname{Im}z\overset{def}{=}y$. Из алгебраической формы комплексного числа следует правило: *произведение двух комплексных чисел можно вычислить как произведение многочленов, заменяя при этом i^2 на -1*. Действительно,

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1x_2+iy_1x_2+x_1iy_2-y_1y_2=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Определение. Комплексное число z называют ***разностью*** чисел z_1 и z_2: $z=z_1-z_2$, если $z+z_2=z_1$. Из определения следует, что $z_1-z_2=x_1-x_2+i(y_1-y_2)$. Почему?

Комплексное число $z=x+iy$ геометрически представляется как точка M с координатами $(x;y)$ в прямоугольной декартовой системе координат или как радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, проекции которого на оси координат Ox и Oy соответственно равны x и y. При этом плоскость xOy называется ***комплексной плоскостью***. Поскольку на оси Ox располагаются действительные числа, то её называют действительной осью. Соответственно ось Oy – мнимая ось.

Число $\sqrt{x^2+y^2}$ называют ***модулем*** комплексного числа $z=x+iy$ и обозначают $|z| \overset{def}{=} \sqrt{x^2+y^2}$. В случае действительного числа это определение совпадает с модулем действительного числа. Геометрически модуль означает расстояние от начала координат до соответствующей точки плоскости или длину радиуса-вектора, представляющего это число. Поскольку $|z_1-z_2| = |x_1-x_2+i(y_1-y_2)| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, то геометрически $|z_1-z_2|$ означает расстояние между точками z_1 и z_2.

Определение. Комплексное число $x-iy$ называется ***комплексно-сопряжённым*** числу $z=x+iy$ и обозначается $\overline{z} \overset{def}{=} x-iy$. Очевидны следующие свойства комплексно-сопряжённых чисел:

1) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$;

2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

3) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Определение. ***Частным от деления числа*** z_1 ***на число*** $z_2 \neq 0$ называется такое комплексное число z, которое удовлетворяет уравнению

$$z \cdot z_2 = z_1. \tag{1}$$

Частное обозначают $z_1 : z_2$ или z_1 / z_2. Убедимся, что при всех z_1 и z_2, если $z_2 \neq 0$, уравнение (1) имеет единственное решение. Действительно, умножим обе части равенства (1) на число $\overline{z}_2 = x_2 - iy_2$ и получится уравнение $z \cdot z_2 \cdot \overline{z}_2 = z_1 \cdot \overline{z}_2$, равносильное уравнению (1). Поделив это равенство на $|z_2|^2$ и заменив z на z_1/z_2, получим

$$z = \frac{z_1\overline{z_2}}{\overline{z_2}^{\,2}}, \tag{2}$$

что и доказывает единственность решения уравнения (1). При этом мы приходим к возможности придать формуле (2) вычисления частного комплексных чисел следующий вид

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}.$$

Нами получено **правило деления комплексных чисел**: *чтобы поделить два комплексных числа, достаточно числитель и знаменатель дроби домножить на число, комплексно-сопряжённое знаменателю.*

Пример 1. Вычислить $5/(1+2i)$.

► $\frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5(1-2i)}{5} = 1-2i.$ ◄

Введём на комплексной плоскости ***полярную систему координат*** так, чтобы её полюс находился в точке O декартовой прямоугольной системы координат, а полярная ось совпадала с положительным направлением оси Ox. Из геометрических соображений получаем формулы $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, связывающие полярные и декартавы координаты. Отсюда следует так называемая ***тригонометрическая форма*** комплексного числа $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Определение. Число r является ***модулем*** комплексного числа z, а число φ – его ***аргументом***. При этом используются обозначения $r \overset{def}{=} |z|,\ \varphi \overset{def}{=} \mathrm{Arg}\, z$.

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определён, а его модуль равен нулю. Отметим, что аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, т.е. если $\mathrm{Arg}\, z = \varphi$, то каждое из чисел $\varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ также является аргументом числа z. Значение аргумента, удовлетворяющее неравенствам $-\pi < \varphi \le \pi$, называется ***главным*** и обозначается $\arg z$.

Из системы $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ имеем $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \mathrm{tg}\,\varphi = y/x. \end{cases}$.

Отметим, что эти системы не являются равносильными, поскольку аргументы обоих чисел $(x; y)$ и $(-x; -y)$ являются решениями второй системы.

Замечание 1. При вычислении аргумента из равенства $\mathrm{tg}\,\varphi = y/x$ пользуются правилом: $\mathrm{Arg}\, z = \mathrm{arctg}(y/x),\ x > 0;\ \ \mathrm{Arg}\, z = \pi + \mathrm{arctg}(y/x),\ x < 0.$

Пример 2. Найти тригонометрическую форму комплексных чисел: $1;\ -2;\ 3i;\ -1 + i\sqrt{3}.$

► **1)** $1 = 1 + 0i = \cos 0 + i\sin 0;$

2) $-2 = 2(-1 + 0i) = 2(\cos\pi + i\sin\pi);$

3) $3i = 3(0 + i) = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2});$

4) $-1 + i\sqrt{3} = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}).$ ◄

Тригонометрическая форма комплексного числа является очень удобной для умножения и деления комплексных чисел. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Вычислим их произведение:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Из этого раенства имеем $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2$, т.е. *при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.* Аналогично получается: *при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:*
$|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$, $Arg(z_1 / z_2) = Arg\, z_1 - Arg\, z_2$. Если перемножить n равных комплексных чисел, то получается равенство $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. При $r = 1$ имеет место ***формула Муавра:*** $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Из геометрического представления комплексных чисел следует *правило равенства комплексных чисел в тригонометрической форме* :

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2|, \\ Arg\, z_1 = Arg\, z_2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Определение. Комплексное число w называется ***корнем*** $n-$***й степени из комплексного числа*** z, $w \overset{def}{=} \sqrt[n]{z}$, если $z = w^n$.

Получим формулы для вычисления значений корня $n-$й степени из комплексного числа z. Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Из равенства $z = w^n$ и формулы возведения в степень следует $\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

На основании правила равенства комплексных чисел в тригонометрической форме имеем:

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Таким образом, мы получаем формулу:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Покажем, что *среди комплексных чисел* $\sqrt[n]{z}$ *имеется ровно* n *разных*. Действительно, среди комплексных чисел w_k, вычисленных по формуле (3) при $k \in \overline{0, n-1}$ все разные потому, что их аргументы $\psi_0 = \dfrac{\varphi}{n}, \psi_1 = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n}, ..., \psi_{n-1} = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi(n-1)}{n}$ отличаются один от другого меньше чем на 2π ($\psi_{n-1} - \psi_0 = 2\pi \cdot \dfrac{n-1}{n} < 2\pi$ – наибольшая из разностей). Тогда согласно правилу равенства комплексных чисел в тригонометрической форме все w_k, $k \in \overline{0, n-1}$ разные. Далее имеем $w_n = w_0$, ибо $|w_n| = |w_0| = \sqrt[n]{r}$ и

$\psi_n = \psi_0 + 2\pi$. Аналогично $w_{n+1} = w_1, \ w_{-1} = w_{n-1}, \ldots$. Таким образом, имеется ровно n разных значений корня n–й степени из комплексного числа $w_k = \sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}), \ k \in \overline{0, n-1}$.

Замечание 2. Здесь $\sqrt[n]{r}$ является арифметическим корнем из положительного числа. Поэтому $\sqrt{1}$ как арифметический из действительного числа 1 равен 1. В то же время $\sqrt{1}$ как корень из комплексного числа, т.е. $\sqrt{1+0i}$ имеет два значения ± 1.

Пример 3. Вычислить $\sqrt[3]{-8}$

► $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) \Rightarrow \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}(\cos\dfrac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{\pi + 2\pi k}{3}), \ k = 0,1,2.$

$$k = 0, \quad w_0 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3};$$

$$k = 1, \ w_1 = 2(\cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3}) = -2;$$

$$k = 2, \ w_2 = 2(\cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3}) = 1 - i\sqrt{3}. \ ◄$$

Замечание 3. На комплексной плоскости точки $w_k = \sqrt[n]{z}, \ k \in \overline{0, n-1}$ располагаются в вершинах правильного n–угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в точке O потому, что

$$|w_k| = \sqrt[n]{r} \cdot \left|\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right| = \sqrt[n]{r}, \ \Psi_k - \Psi_{k-1} = \frac{2\pi}{n} \ \ \forall k .$$

1.1.4. Многочлены и рациональные функции

Определение. ***Многочленом*** или ***полиномом*** n***–й степени*** называется выражение

$$P_n(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0 = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k,$$

где $z = x + iy$ – комплексная переменная величина, $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0$ – комплексные константы, причём $c_n \neq 0$.

Определение. Число a называется ***корнем*** многочлена $P_n(z)$, если $P_n(a) = 0$. Разделить многочлен $P_n(z)$ на двучлен $z - a$, где a – заданное число, означает представить его в виде $P_n(z) = (z - a)P_{n-1}(z) + r$, где $P_{n-1}(z)$ – многочлен степени $n-1$, r – некоторое число. Его называют остатком от деления многочлена на двучлен. Если $r = 0$, то говорят, что многочлен делится без остатка на $z-a$.

При делении многочлена на двучлен удобно пользоваться ***схемой Горнера***. Например, поделим $3x^4+5x^3+x-6$ на $x+2$. Имеем

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & 3 & 5 & 0 & 1 & -6 \\ \hline -2 & 3 & (3\cdot(-2)+5=)-1 & (-1\cdot(-2)+0=)2 & (2\cdot(-2)+1=)-3 & (-3\cdot(-2)+(-6)=)0 \end{array}.$$

Таким образом, $3x^4+5x^3+x-6=(x+2)\left(3x^3-x^2+2x-3\right)$. Многочлен разделился на двучлен $x+2$ без остатка, а число $x=-2$ является его корнем. Случайно? Нет. Имеет место

Теорема 1. (Безу). Число a является корнем многочлена $P(z)$, когда и только когда этот многочлен делится на двучлен $z-a$.

Может случиться, что среди корней многочлена имеются одинаковые. Например, $x^2-2x+1=(x-1)^2$.

Определение. Число a называется ***корнем многочлена*** $P(z)$ ***кратности*** k, если имеет место представление $P(z)=(z-a)^k\cdot S(z),\ S(a)\neq 0.$

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один корень.

На самом деле из этой теоремы следуют:

Теорема 2. (о числе корней многочлена**).** Многочлен $P_n(z)$ имет n и только n корней, если учесть их кратность.

Теорема 3. (о комплексных корнях многочлена с действительными коэффициентами). Если комплексное число z_0 является корнем многочлена $P(z)$ с действительными коэффициентами, то и комплексно сопряжённое число $\bar{z}_0$ также является его корнем.

Пусть многочлен $P_n(z)$ имеет представление

$$P_n(z)=c_n(z-a_1)\cdot(z-a_2)\cdot\ldots\cdot(z-a_n). \tag{1}$$

Следствие 1. Если число $z_0=\alpha+i\beta$ является корнем кратности k многочлена с действительными коэффициентами $P_n(z)$, то и число $\overline{z_0}=\alpha-i\beta$ – также является его корнем кратности k.

Следствие 2. Если многочлен $P_n(z)$ с действительными коэффициентами имеет действительные корни $a_1, a_2,\ldots,a_r$ соответственно кратности $k_1, k_2,\ldots,k_r$, а $b_1=\alpha_1+i\beta_1, \overline{b_1}=\alpha_1-i\beta_1,\ldots,b_s=\alpha_s+i\beta_s,\overline{b_s}=\alpha_s-i\beta_s$ – комплексные корни этого многочлена соответственно кратности $l_1, l_2,\ldots,l_s$, то на основании (1) получим

$$P_n(z)=c_n\left(z-a_1\right)^{k_1}\ldots\left(z-a_r\right)^{k_r}\left(z^2+p_1z+q_1\right)^{l_1}\ldots\left(z^2+p_sz+q_s\right)^{l_s}, \tag{2}$$

где $p_j = -2\alpha_j,\ q_j = \alpha_j^2 + \beta_j^2,\ j = \overline{1,s},\ \sum_{m=1}^{r} k_m + 2\sum_{j=1}^{s} l_j = n$.

Таким образом, зная все корни многочлена с действительными коэффициентами $P_n(z)$, можно его разложить на множители с действительными коэффициентами, т.е. представить в виде (2), где числа $c_n, a_1, ..., a_r, p_1, ..., p_s, q_1, ...q_s$ – действительные, а все квадратные трёхчлены имеют отрицательные дискриминанты.

Далее займёмся рассмотрением рациональной функции $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x),\ Q_n(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами соответственно степеней m и n. Если $m < n$, то рациональная функция называется ***правильной***, в случае $m \geq n$ – ***неправильной***.

Если рациональная функция $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ является неправильной, то, разделив числитель на знаменатель, например, способом “деления столбиком”, эту дробь можно записать в виде $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = S_{m-n}(x) + \dfrac{R_l(x)}{Q_n(x)},\ l < n,$ где $S_{m-n}(x),\ R_l(x)$ – многочлены степеней $m-n$ и $l \leq n-1$, которые называют соответственно частным и остатком от деления многочлена $P_m(x)$ на $Q_n(x)$. Таким образом, всякую неправильную рациональную функцию $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно представить в виде целой части $S_{m-n}(x)$ и правильной рациональной функции $\dfrac{R_l(x)}{Q_n(x)}$.

В качестве примера рассмотрим деление многочлена $x^4 + x^3 + x + 2$ на многочлен $x^2 - 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + x^3 + x + 2 & x^2 - 1 \\
\cline{2-2}
 & x^2 + x + 1 \\
-(x^4 - x^2) & \\
\hline
x^3 + x^2 + x + 2 & \\
-(x^3 - x) & \\
\hline
x^2 + 2x + 2 & \\
-(x^2 - 1) & \\
\hline
2x + 3 &
\end{array}
$$

При этом имеет место равество $\dfrac{x^4+x^3+x+2}{x^2-1}=x^2+x+1+\dfrac{2x+3}{x^2-1}$.

Правильные рациональные функции:

$\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, $k\geq 1,\ p^2-4q<0$ называются ***простыми дробями***. Имеет место

Теорема 4. (о разложении правильной рациональной функции на простые дроби). Правильную рациональную функцию $P(x)/Q(x)$ с действительными коэффициентами всегда можно представить в виде суммы простых дробей.

Существует несколько способов вычисления коэффициентов разложения правильной рациональной функции на сумму простых дробей.

1$^{\text{o}}$. Способ соответствующих коэффициентов. Функцию $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ представим в виде суммы простых дробей с неопределёнными пока коэффициентами $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$. Умножая обе части этого равенства на $(x-2)(x^2+1)^2$, получим:

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)(x^2+1)+(Dx+E)(x-2)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов из обеих частей равенства, приходим к системе

$$\left.\begin{array}{l} x^4:\ \ A+B=0 \\ x^3:\ -2B+C=0 \\ x^2:\ \ 2A+B-2C+D=2 \\ x\ \ :\ -2B+C-2D+E=2 \\ x^0:\ \ A-2C-2E=13 \end{array}\right\} \Rightarrow\ A=1,\ B=-1,\ C=-2,\ D=-3,\ E=-4.$$

Таким образом, $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x+2}{x^2+1}-\dfrac{3x+4}{(x^2+1)^2}$.

2$^{\text{o}}$. Способ домножения. Функция $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2-x-2}$ правильная. Сначала следует найти корни знаменателя и разложить его на множители. Затем записать функцию в виде суммы простых дробей $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2-x-2}=\dfrac{3x^2+2x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x+2}$. Домножим обе части на $x-1$, получим $\dfrac{3x^2+2x+1}{(x+1)(x+2)}=A+\dfrac{B(x-1)}{x+1}+\dfrac{C(x-1)}{x+2}$. Взяв в обеих частях этого равенства

$x=1$ (корень двучлена $x-1$), имеем $A=1$. Аналогично $B=-1, C=3$. Итак, $\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x+2}$.

3°. Способ частных значений. $\frac{x^2+16x+12}{(x+2)(x^2-4)}=\frac{A}{(x+2)^2}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}$.

Сначала методом домножения вычислим $A=4,\ C=3$. После этого возьмём в равенстве значение $x=0$ (произвольное число, не равное корню знаменателя рациональной функции) и получим $-\frac{3}{2}=\frac{A}{4}+\frac{B}{2}-\frac{C}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2}=1+\frac{B}{2}-\frac{3}{2} \Rightarrow B=-2$.

Вопросы

1. Даны два множества $A = \{\textit{простые числа} < 25\}$ и $B = \{\textit{нечетные числа} < 25\}$. Найти следующие множества: а) $A \bigcup B$; б) $A \bigcap B$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus A$.

2. Перечислите все подмножества множества $\{a;b;c\}$ (всего таких подмножеств восемь).

3. Укажите целую часть числа, если: а) $1,54$; б) $-2,35$; в) $-0,5$; г) $-0,999$.

4. Пусть $a \geq 0$. Для каких чисел b имеет место соотношение $|a+b| = |a| + |b|$?

5. Имеет ли место для $\forall n \in \mathbb{N}$ равенство $(2n)! = 2^n \cdot n!$?

6. Сформулируйте, используя кванторы $\forall$ и $\exists$, следующие утверждения: а) множество A не ограничено сверху; б) множество A не ограничено снизу; в) множество A не является ограниченным.

7. Пусть $\varphi(x) = ax^2 + b$. Найдите на отрезке $[0;1]$ а) $\inf \varphi(x)$; б) $\sup \varphi(x)$.

8. Запишите следующие комплексные числа в алгебраической форме: а) $\dfrac{(2i)^7}{\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^6}$; б) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{10}$; в) $\left(\cos 24^0 + i \sin 24^0\right)^{-10}$.

9. Найдите все значения $\sqrt[n]{z}$, если: а) $z = 8i$, $n = 3$; б) $z = 1$, $n = 4$; в) $z = -1, n = 3$; г) $z = 1 + i$, $n = 2$.

10. Разложите рациональные дроби на сумму простых дробей: а) $\dfrac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$; б) $\dfrac{6}{x^3 - 1}$.

1.2. Теория пределов

Понятие предела является основным понятием математического анализа. Начало изучения понятия предела сделано в элементарной математике, где при помощи предельных переходов определяется длина окружности, площадь круга, объём цилиндра, конуса и др. В этой главе мы изучим вопросы, связанные с предельным переходом в числовых последовательностях и функциях.

1.2.1. Числовые последовательности

Определение. Если каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ ставится в соответствие действительное число $x_n \in \mathbb{R}$, то такую функцию $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называют ***числовой последовательностью*** и обозначают (x_n). Иначе говоря, числовая последовательность есть занумерованное бесконечное множество действительных чисел $(x_n) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Числа $x_1, x_2, ...$ называются ***членами числовой последовательности*** (x_n), символ x_n называется ***общим членом числовой последовательности***, а n – его ***номером***. Таким образом, каждая числовая последовательность содержит бесконечно много членов, но множество её значений может состоять и из конечного числа членов.

Примеры:

1) Если числовая последовательность (x_n) имеет общий член $x_n = \dfrac{1}{n}$, т.е. $(x_n) = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ..., \dfrac{1}{n}, ...\right\}$, то множество её значений является бесконечным и состоит из рациональных чисел типа $\dfrac{1}{n}$.

2) У последовательности $x_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$, т.е. $(x_n) = \{1, 0, 1, 0, ...\}$ множество значений состоит из двух чисел: 0 и 1.

3) Числовая последовательность $x_n = a$ называется ***постоянной последовательностью*** и множество её значений состоит из единственного действительного числа a.

Определение. Числовая последовательность (x_n) называется ***ограниченной сверху*** [***снизу***], если множество её значений ограничено сверху [снизу], т.е. $\exists\, M \in \mathbb{R}$ $[m \in \mathbb{R}]$: $\forall n \in \mathbb{N} \mapsto x_n \le M$ $[x_n \ge m]$. Если числовая последовательность ограничена как сверху, так и снизу, то она называется ***ограниченной***, т.е. $\exists L > 0: |x_n| \le L \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Следует ли из условия

$\forall n \in \mathbb{N} \mapsto x_n \le M$ ограниченность последовательности (x_n)? Нет, она может быть неограниченной снизу.

Упражнение. Сформулировать определение ***неограниченности*** числовой последовательности (x_n).

Примеры:

1) Числовая последовательность (n) – ограниченная снизу, но неограниченная сверху (1 – нижняя граница). Таким образом, числовая последовательность (n) – неограниченная.

2) Числовая последовательность $(1/n)$ – ограниченная. (0, 1 – соответственно нижняя и верхняя границы)

3) Числовая последовательность $x_n = (-1)^n \cdot n$ – неограниченная, причём с обеих сторон. Почему?

Определение. Числовая последовательность (x_n) называется ***сходящейся***, если существует такое число a, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} : \forall n > \nu \mapsto |x_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, или $(x_n) \to a$ и говорят, что последовательность (x_n) ***имеет предел*** a. Если числовая последовательность не является сходящейся, то она называется ***расходящейся***, т.е. последовательность называется расходящейся, если никакое число не является её пределом.

Из определения предела последовательности следует, что последовательность (x_n) имеет предел a тогда и только тогда, когда последовательность $(x_n - a)$ имеет предел, равный нулю, т.е. $(x_n) \to a \Leftrightarrow (x_n - a) \to 0$. Таким образом, если $\alpha_n = x_n - a$, то число a является пределом последовательности (x_n), когда и только когда $x_n = a + \alpha_n$, где $(\alpha_n) \to 0$.

Пример 1. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

► Рассмотрим $|x_n - a| = |1/n - 0| = 1/n$ Очевидно, что $1/n < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1/\varepsilon$. Возьмём $\nu(\varepsilon) = 1/\varepsilon$. Таким образом, $|x_n - 0| < \varepsilon\ \forall n > \nu(\varepsilon)$. ◄

Пример 2. Постоянная последовательность $x_n = a$ является сходящейся и её предел равен a.

► Действительно, $|x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. ◄

М-Лемма для числовой последовательности. Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) > 0 : \forall n > N(\varepsilon) \mapsto |x_n - a| < M \cdot \varepsilon,$ где $M > 0$ не зависит ни от ε, ни от n, то числовая последовательность (x_n) сходится к пределу a.

Рассмотрим **основные свойства** сходящихся числовых последовательностей.

Теорема 1. Сходящаяся числовая последовательность имеет только один предел.

Теорема 2. Сходящаяся числовая последовательность является ограниченной.

Замечание. Ограниченность числовой последовательности является условием необходимым, но не достаточным для её сходимости.

Пример 3. Числовая последовательность $\left((-1)^n\right)$ является ограниченной, но расходящейся последовательностью.

► Действительно, если предположить противоположное, что эта последовательность имеет предел a, то для $\varepsilon = 1/2 \ \exists \nu: \ \forall n > \nu \ \mapsto \ |x_n - a| < 1/2.$ Но x_n принимает по очереди значения -1 или 1 и поэтому имеют место два неравенства $|1-a| < 1/2, \ |-1-a| < 1/2$. Учитывая эти неравенства, выполним следующие преобразования:

$$2 = |2| = |1+1| = |(1-a)+(a+1)| \le |1-a| + |a+1| = |1-a| + |-a-1| < 1/2 + 1/2 = 1.$$

Получили $2 < 1$?!?. Это означает, что числовая последовательность $\left((-1)^n\right)$ не имеет предела, и тем самым является расходящейся. ◄

Введём арифметические действия над числовыми последовательностями.

Определение. Пусть заданы две числовые последовательности $(x_n), (y_n)$. ***Суммой числовых последовательностей*** (x_n) и (y_n) называется числовая последовательность $(x_n + y_n)$; ***разностью*** – $(x_n - y_n)$; ***произведением*** – $(x_n \cdot y_n)$; ***частным*** – $\left(x_n / y_n\right)$, если $y_n \ne 0$; ***произведением числовой последовательности*** (x_n) ***на число*** c называется числовая последовательность $(c \cdot x_n)$. Таким образом,

$$(x_n) \pm (y_n) \overset{def}{=} (x_n \pm y_n); (x_n) \cdot (y_n) \overset{def}{=} (x_n \cdot y_n);$$

$$(x_n)/(y_n) \overset{def}{=} (x_n / y_n), \ y_n \ne 0; \ \ c \cdot (x_n) \overset{def}{=} (c \cdot x_n).$$

Теорема 3. Если $(x_n) \to a$, $(y_n) \to b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a + b$. Иными словами сумма двух сходящихся числовых последовательностей (x_n) и (y_n) является сходящейся числовой последовательностью, имеющей пределом сумму пределов последовательностей (x_n) и (y_n).

Теорема 4. Произведение двух сходящихся числовых последовательностей (x_n) и (y_n) является сходящейся числовой последовательностью, предел которой равен произведению пределов последовательностей (x_n) и (y_n).

Следствие 1. Если $(x_n)\to a$, то $\forall A\in\mathbb{R}$ последовательность (Ax_n) сходится, причём $(Ax_n)\to A\cdot a$. Доказательство следует из сходимости постоянной последовательности $y_n=\alpha$ и теоремы 4.

Следствие 2. Если $(x_n)\to a$, $(y_n)\to b$, то $\forall A,B\in\mathbb{R}$ последовательность (Ax_n+By_n) сходится, причём $(Ax_n+By_n)\to Aa+Bb$. В частности $(x_n-y_n)\to a-b$.

Замечание. Если последовательность (x_n) расходится, то при $A\neq 0$ последовательность (Ax_n) тоже расходится.

Теорема 5. Если $(x_n)\to a,\ (y_n)\to b$ и $y_n\neq 0\ \forall n,\ b\neq 0$, то $(x_n/y_n)\to a/b$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$.

► $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n+1/n^2}{3-1/n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+1/n+1/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3-1/n^2)}=\frac{2}{3}.$$ ◄

Теорема 6. (о предельном переходе в неравенствах). Если для членов двух сходящихся числовых последовательностей (x_n) и (y_n) справедливы неравенства $x_n\le y_n\ \forall n\in\mathbb{N}$, то пределы этих последовательностей удовлетворяют неравенству $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\le\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

Замечание 1. Теорема справедива также и в том случае, когда неравенство $x_n\le y_n$ выполняется только $\forall n\ge n_0$, т.е. начиная с некоторого номера.

Замечание 2. Если имеют место строгие неравенства $x_n<y_n$, то тем не менее можно лишь утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\le\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, т.е. пределы могут быть равными. Например, для числовых последовательностей $x_n=1-\dfrac{1}{n},\ y_n=1+\dfrac{1}{n}$ имеет место неравенство $x_n<y_n$, но $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$.

Замечание 3. Из теоремы следует, что если $x_n\ge\alpha\ (x_n\le\beta)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ge\alpha\ \ (\lim\limits_{n\to\infty}x_n\le\beta)$. Отсюда следует, что если все члены последовательности (x_n) принадлежат отрезку $[a,b]$, т.е. $a\le x_n\le b$, то и предел последовательности принадлежит отрезку $[a,b]$, т.е. $a\le\lim\limits_{n\to\infty}x_n\le b$.

Теорема 7. (о сжатой последовательности, или ***принцип двух миллиционеров***). Если $\forall n\in\mathbb{N}$ имеет место неравенство $x_n\le y_n\le z_n$ и $(x_n)\to a,\ (z_n)\to a$, то и $(y_n)\to a$.

Пример 5. Исследовать на сходимость последовательность $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$.

► Имеют место следующие оценки $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \le x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = 1$, или $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \le x_n < 1$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n}} = 1$, то, согласно теореме о сжатой последовательности, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. ◄

А теперь иначе:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 0 + \ldots + 0 = 0.$$

Почему получился иной результат?

Рассмотрим несколько важных для дальнейшего пределов.

Пример 6. Докажем, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{1+\alpha_n} = 1$, если $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \ge -1\ \forall n$ и $(\alpha_n) \to 0$.

► При $\alpha_n \ge 0$ имеем $1 \le \sqrt[k]{1+\alpha_n} \le \left(\sqrt[k]{1+\alpha_n}\right)^k = 1+\alpha_n = 1+|\alpha_n|$.

При $-1 \le \alpha_n < 0$ имеем $1 \ge \sqrt[k]{1+\alpha_n} \ge \left(\sqrt[k]{1+\alpha_n}\right)^k = 1+\alpha_n = 1-|\alpha_n|$.

Итак, для всех рассматриваемых значений α_n имеем $1-|\alpha_n| \le \sqrt[k]{1+\alpha_n} \le 1+|\alpha_n|$. Так как при $(\alpha_n) \to 0$ имеют место $\left(1-|\alpha_n|\right) \to 1$, $\left(1+|\alpha_n|\right) \to 1$, то по теореме о сжатой переменной $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{1+\alpha_n} = 1$. ◄

Пример 7. Докажем, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 1$.

► При $a > 1 \to \sqrt[n]{a} > 1$. Пусть $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$, $\sqrt[n]{a} = 1+\alpha_n$, $\alpha_n > 0\ \forall n$. Тогда $a = (1+\alpha_n)^n > \left[\text{неравенство Бернулли}\right] > \alpha_n \cdot n$. Так как $\alpha_n > 0$, то $\alpha_n < \frac{a}{n}$, т.е. $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n}$. Так как $\left(\frac{a}{n}\right) \to 0$, то по теореме о сжатой переменной $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a} - 1) = 0$, а тем самым $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. ◄

Пример 8. Убедимся, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

► Очевидно, что $\sqrt[n]{n} = 1+\alpha_n > 0$ при $n > 1$. Поэтому

$n=(1+\alpha_n)^n=\left[\text{ формула бинома Ньютана}\right]=$

$=1+\alpha_n n+\dfrac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2+...+\alpha_n^n>1+\dfrac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2,$

т.е. $\alpha_n^2<\dfrac{2}{n}$, или $0<\alpha_n<\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}<\varepsilon\ \forall n>\dfrac{2}{\varepsilon^2}=\nu(\varepsilon)$. Таким образом, $\left(\alpha_n\right)\to 0$ или $\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\to 0$, а тем самым $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. ◄

1.2.2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение. Сходящаяся числовая последовательность (α_n) называется ***бесконечно малой последовательностью*** или (***бмп***), если её предел равен нулю, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\nu=\nu(\varepsilon): \forall n>\nu\ \mapsto|\alpha_n|<\varepsilon$.

Пример. Покажем, что числовая последовательность (q^n) при $|q|<1$ – (*бмп*).

► Если $q=0$, то последовательность является (*бмп*). Пусть $0<|q|<1\Rightarrow\dfrac{1}{|q|}>1\Rightarrow\exists\delta>0:\dfrac{1}{|q|}=1+\delta,\Rightarrow|q|=\dfrac{1}{1+\delta}$. На основании неравенства Бернулли **[**$(1+a)^n\geq 1+na\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall a>-1$, причём равенство только при $a=0$**]** имеем $|q|^n=\dfrac{1}{(1+\delta)^n}<\dfrac{1}{1+n\delta}<\dfrac{1}{n\delta}\overset{?}{<}\varepsilon\Leftrightarrow n>\dfrac{1}{\varepsilon\delta}=\nu(\varepsilon)$ т.е. числовая последовательность (q^n) – (*бмп*) при $|q|<1$. ◄ А что будет при $|q|=1$?

Так как (*бмп*) является сходящейся, то имеют место следующие свойства бесконечно малых последовательностей:

1) сумма и разность конечного числа *(бмп)* является также *(бмп);*

2) произведение конечного числа *(бмп)* является также *(бмп)*;

3) произведение бесконечно малой последовательности на число является бесконечно малой последовательностью т.е. если $\left(\alpha_n\right)$ – *(бмп),* то $\forall a\in\mathbb{R}$ последовательность $\left(a\cdot\alpha_n\right)$ – *(бмп).*

Замечание. Частное двух (*бмп*) может и не быть (*бмп*). Например, если $\alpha_n=1/n,\ \beta_n=1/n$, то $\alpha_n/\beta_n=1$ – не является (*бмп*); если же $\alpha_n=1/n,\ \beta_n=1/n^2$, то $\beta_n/\alpha_n=1/n$ – (*бмп*).

Теорема 1. Произведение ограниченной числовой последовательности на (*бмп*) является (*бмп*).

Определение. Числовая последовательность (A_n) называется ***бесконечно***

большой последовательностью (*ббп*), если $\forall E>0\ \exists N=N(E)>0:\ \forall n>N\ \mapsto\ |A_n|>E$. Это определение равносильно утверждению: в *(ббп)* только конечное число членов принадлежит отрезку $[-E,E]$. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. Если при этом $|A_n|>E\quad\forall n>N$, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. Если $|A_n|<-E\quad\forall n>N$, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$.

Чем отличается бесконечно большая последовательность от неограниченнай числовой последовательности?

Замечание. Бесконечно большая последовательность является неограниченной, но неограниченная числовая последовательность может и не быть бесконечно большой. Например, неограниченная числовая последовательность $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}\cdot n\Leftrightarrow\{0,2,0,4,0,6,...\}$ не является бесконечно большой последовательностью потому, что при $E>1$ неравенство $|A_n|>E$ неверное для всех членов последовательности с нечётными номерами.

Теорема 2. (связь между (*бмп*) и (*ббп*)). Если числовая последовательность (A_n) является (*ббп*) и $A_n\neq 0\ \forall n,$ то числовая последовательность $(1/A_n)$ является (*бмп*). Если числовая последовательность (α_n) – (*бмп*) и $\alpha_n\neq 0\ \forall n,$ то числовая последовательность $(1/\alpha_n)$ – (*ббп*).

Замечание. На основании теоремы 2 числовая последовательность (q^n) при $|q|>1$ является (*ббп*).

1.2.3. Монотонные последовательности

1°. Условие сходимости монотонной последовательности.

Определение. Числовая последовательность (x_n) называется ***неубывающей*** [***невозрастающей***], если $\forall n\in\mathbb{N}\mapsto\quad x_n\le x_{n+1}\quad[x_n\ge x_{n+1}]$. Обозначать их будем соответственно $(x_n)\uparrow$ [$(x_n)\downarrow$]. Невозрастающие и неубывающие последовательности называют ***монотонными*** и обозначают $(x_n)\updownarrow$. Числовая последовательность (x_n) называется ***возрастающей*** [***убывающей***], если $\forall n\in\mathbb{N}\mapsto x_n<x_{n+1}\quad[x_n>x_{n+1}]$. Обозначать их будем соответственно $(x_n)\uparrow\uparrow$ [$(x_n)\downarrow\downarrow$]. Возрастающие и убывающие последовательности называют ***строго монотонными*** и обозначают $(x_n)\updownarrow\updownarrow$.

Примеры:

1) последовательность $x_n = 1\Big/\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, т.е. 1; 1; 1/2; 1/2; ...– невозрастающая;

2) последовательность 1/2; 2/3; 3/4; ... $\left(x_n = \dfrac{n}{n+1}\right)$– возрастающая, так как

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2},\ \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1,\ x_n < x_{n+1} \forall n \quad .$$

Замечание 1. Неубывающие последовательности всегда ограничены снизу ($x_n \geq x_1\ \forall n$), а невозрастающие сверху ($x_n \leq x_1\ \forall n$), т.е. монотонные последовательности всегда ограничены хотя бы с одной стороны.

Теорема 1. (Признак сходимости монотонной последовательности). Если последовательность (x_n) не убывает [не возрастает] и ограничена сверху [снизу], то существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Если же монотонная последовательность (x_n) неограничена сверху [снизу], то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \left[\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\right]$.

Замечание 2. Теорема остаётся верной, если последовательность является монотонной, начиная только с некоторого номера.

Замечание 3. Если числовая последовательность $(x_n)\uparrow$ и $(x_n)\to a$, то $x_n \leq a\ \forall n$; если числовая последовательность $(x_n)\downarrow$ и $(x_n)\to b$, то $x_n \geq b\ \forall n$. Это следует из того, что $a = \sup\{x_n\}$, $b = \inf\{x_n\}$.

Пример 1. Исследовать на сходимость и вычислить предел последовательности $x_n = \dfrac{a^n}{n!},\ a > 0.$

► Докажем, что эта числовая последовательность – убывающая. Имеем $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{a^n} = \dfrac{a}{n+1} < 1\ (\forall n > a)$.

Это значит, что последовательность убывающая при всех $n > a$. При этом она ограничена снизу, ибо $x_n > 0\ \forall n$, а поэтому – сходящаяся. Вычислим её предел. Пусть $(x_n)\to A$, при этом $(x_{n+1})\to A$. Поскольку $x_{n+1} = x_n\cdot\dfrac{a}{n+1}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n+1}$ (как произведение двух сходящихся последовательностей), что приводит к равенству $A = A\cdot 0$, откуда имеем $A = 0$, или $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0.$ ◄

Замечание 4. Так как последовательность $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$ является бесконечно малой, то для $\varepsilon = 1$ найдётся число $\nu_1 > 0$ такое, что $\dfrac{a^n}{n!} < 1 \ \forall n > \nu_1$, или $a^n < n! \ \forall n > \nu_1$. Таким образом, $\boxed{n! >> a^n \ \ \forall a > 0}$.

Пример 2. Исследуем на сходимость последовательность $x_n = \sqrt[n]{n!}$.

► Выберем произвольно $a > 0$. Так как $\exists \nu : \forall n > \nu \mapsto n! > a^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{n!} > a \ \forall n > \nu$, то это и значит что последовательность $x_n = \sqrt[n]{n!}$ бесконечно большая, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. ◄

2°. Вложенные отрезки.

Определение. Последовательность отрезков числовой прямой $\{[a_1,b_1],[a_2,b_2],...,[a_n,b_n],...\}$ таких, что $[a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}] \forall n \in \mathbb{N}$, называется ***последовательностью вложенных отрезков***. При этом справедливы неравенства $a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Например, $\{[-1/n, 1+1/n]\}$.

Теорема 2. (о вложенных отрезках). Для всякой последовательности вложенных отрезков существует точка, принадлежащая всем отрезкам последовательности.

Определение. Если выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, то последовательность вложенных отрезков называется ***последовательностью стягивающихся отрезков***. Например, $\{[-1/n, 1/n]\}$.

Теорема 3. (о стягивающихся отрезках). Для всякой последовательности стягивающихся отрезков существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам последовательности.

Замечание 5. Теорема, вообще говоря, неверна, если вместо отрезков рассматривать интервалы.

Например, для последовательности вложенных интервалов $\{(0, 1/2^{n-1})\}$, т.е. $(0,1) \supset \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \supset \left(0, \dfrac{1}{4}\right) \supset ... \supset \left(0, \dfrac{1}{2^n}\right) \supset ...$ не существует точки, принадлежащей всем интервалам. Действительно, какую бы точку c из интервала (0,1) мы ни взяли, всегда найдётся такой номер n_0, что $\dfrac{1}{2^{n_0}} < c$. Тогда $\dfrac{1}{2^n} < c \quad \forall n > n_0$, т.е. $c \notin (0, \dfrac{1}{2^n}) \ \forall n > n_0$. Таким образом, точка c не принадлежит бесконечному множеству интервалов рассматриваемой последовательности.

Однако последовательность стягивающихся интервалов $\{(-1/n, 1/n)\}$ имеет общую точку 0.

1.2.4. Число e

1°. Число e как предел последовательности.

Рассмотрим числовую последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Докажем, что последовательность (x_n) монотонна и ограничена, а значит имеет предел. Используя формулу бинома Ньютона, получим

$$x_n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) +$$
$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Если таким же образом расписать x_{n+1}, то получится на одно слагаемое больше, чем у x_n, и при этом каждый множитель типа $\left(1-\dfrac{k}{n}\right)$ заменится на больший $\left(1-\dfrac{k}{n+1}\right)$, т.е. имеем $x_{n+1} > x_n$ и последовательность (x_n) монотонно возрастает. Докажем ее ограниченность сверху.

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$
$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n-1)} =$$
$$= 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < 3$$

Итак, последовательность (x_n) ограничена $2 < x_n < 3$ и монотонно возрастает. Ее предел по предложению Эйлера обозначают буквой e: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e}$. Число e – иррациональное. Его приближённое значение $e \approx 2{,}7182$.

Как мы убедимся позже, число e является очень удобным для использования в качестве основания логарифма. Логарифмы с таким основанием называются ***натуральными*** и обозначаются $\ln a \overset{def}{=} \log_e a$.

1.2.5. Подпоследовательности

Определение. Пусть (x_n) есть некоторая числовая последовательность, а (k_n) произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, т.е. $k_n < k_{n+1}\ \forall n, k_n \in \mathbb{N}$, причём $k_n \geq n.$ Последовательность (y_n), общий член которой $y_n = x_{k_n}$, т.е. последовательность $\left(x_{k_n}\right)$, называют ***подпоследовательностью*** числовой последовательности (x_n). Таким образом, если из последовательности (x_n) выбрать члены с номерами $k_1, k_2, \dots$, то получится подпоследовательность (x_{k_n}).

Примеры:

1) Пусть $k_n = 10 + n$, тогда $x_{k_n} = x_{10+n}$, или $x_{k_1} = x_{11}$, $x_{k_2} = x_{12}$, ..., что равносильно отбрасыванию десяти первых членов последовательности и их новой перенумерации.

2) Если $k_n = 2n$, то $x_{k_n} = x_{2n}$, т.е. $x_{k_1} = x_2$, $x_{k_2} = x_4, \dots$ – из последовательности выбраны члены с чётными номерами.

Если подпоследовательность (x_{k_n}) сходящаяся, то её предел называется ***частичным пределом*** последовательности (x_n). Например, последовательность $x_n = (-1)^n$ имеет два частичных предела –1 и 1.

Теорема 1. Если числовая последовательность (x_n) сходится, то каждая её подпоследовательность (x_{k_n}) также сходится и имеет тот же предел, что и (x_n), т.е. каждый частичный предел сходящейся подпоследовательности равен пределу самой последовательности.

Следствие. Если последовательность имеет два разных частичных предела, то сама последовательность является расходящейся. Например, последовательность $\left((-1)^n\right)$ имеет две подпоследовательности $(1) \to 1$, $(-1) \to -1$ и поэтому она расходящаяся.

Теорема 2. (Больцано-Вейерштрасса или принцип выбора). Из каждой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

1.2.6. Фундаментальные последовательности

Определение сходящейся последовательности не даёт возможности исследовать последовательность на сходимость, если мы не знаем её предела. Мы только можем ответить на вопрос: является ли определённое число её пределом, или нет. Поэтому для нас важно иметь “внутренний” признак сходимости последовательности, который мы введём далее (*критерий Коши*).

Определение. Числовая последовательность (x_n) называется ***фундаментальной***, если:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu = \nu(\varepsilon) > 0 : \ \forall n, m > \nu, \ n, m \in \mathbb{N} \ \mapsto \ |x_n - x_m| < \varepsilon$, или иначе
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu = \nu(\varepsilon) > 0 : \ \forall n > \nu, \ n \in \mathbb{N}, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \mapsto \ |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.

Теорема 1. (необходимое условие фундаментальности). Если числовая последовательность фундаментальная, то она ограничена.

Теорема 2. (Критерий Коши сходимости числовой последовательности). Для того чтобы числовая последовательность (x_n) была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

1.2.7. Предел функции

Определение. Если каждому числу $x \in X \subset \mathbb{R}$ поставлено в соответствие по некоторому правилу определённое число $y \in Y \subset \mathbb{R}$, то говорят, что на множестве X определена ***числовая функция***. Правило, по которому устанавливается это соответствие, записывается: $y = f(x), \ x \in X$, или $f : X \to Y$. При этом x называется ***аргументом*** или ***независимой переменной***, y – ***значением*** функции f, множество X называют ***областью определения*** функции и обозначают $D(f)$. Множество тех чисел из Y, каждое из которых является значением функции f хотя бы для одного значения $x \in X$ называют ***областью значений*** функции и обозначают $f(X)$. Это означает, что если $y_0 \in f(X)$, то существует хотя бы одно значение $x_0 \in D(f) : \ f(x_0) = y_0$.

Определение. Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называют ***ε–окрестностью*** точки a и обозначают $\mathrm{U}_\varepsilon(a)$, т.е. $\mathrm{U}_\varepsilon(a) \overset{def}{=} \{x : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Если из ε–окрестности удалить точку a, то полученное множество называют ***проколотой ε–окрестностью*** точки a и обозначают $\overset{o}{\mathrm{U}}_\varepsilon(a) \overset{def}{=} \{x : 0 < |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$.

Определение. Число A называют ***пределом функции*** $f(x)$ в точке $x = a$, если эта функция определена в некоторой проколотой окрестности точки a (в самой точке a функция может быть и не определённой) и $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x, 0 < |x - a| < \delta \ \mapsto \ |f(x) - A| < \varepsilon$, или

$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \mapsto f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Это определение называют определением по Коши или на языке **“**$\varepsilon - \delta$**”**. При этом пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Для функции $\operatorname{sgn} x$ имеем $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Верно ли, что $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x = 0$?

Определение. Число A называют ***правосторонним*** (***левосторонним***) ***пределом функции*** $f(x)$ в точке $x = a$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x,\ 0 < x - a < \delta$ ($\forall x,\ 0 < a - x < \delta$) $\mapsto \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$, что обозначают соответственно $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$, или $f(a+0) = A$ ($\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$, или $f(a-0) = A$). При этом говорят также, что функция $f(x)$ имеет предел A, когда x стремится к a справа (слева). Например, для функции Хевисайда $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ левосторонний и правосторонний пределы соответственно равны $\eta(-0) = 0,\ \eta(+0) = 1.$

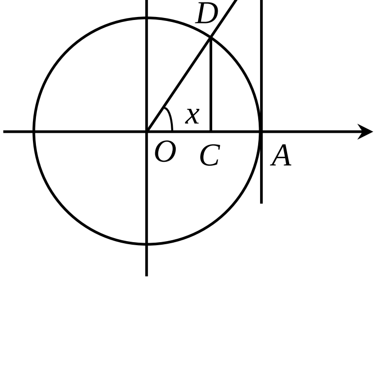
Вопрос: Существует ли предел у функции $\eta(t)$ в точке $x=0$? Существует ли предел у функции $y = \left| \operatorname{sgn} x \right|$ в точке $x=0$? Имеет место:

Теорема 1. (об односторонних пределах). Функция $f(x)$ имеет предел в точке a, если и только если существуют правосторонний и левосторонний пределы в точке a и эти пределы совпадают, т.е. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$.

Пример 1°. (Замечательный тригонометрический предел) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

► Согласно теореме об односторонних пределах достаточно доказать, что $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

а) правосторонний предел. Рассмотрим в координатной плоскости круг единичного радиуса с центром в точке O. Пусть $0 < x < \pi/2$. Из рисунка видно,



что $CD=\sin x,\ AB=\operatorname{tg} x,\ \overset{\smile}{AD}=x$.

Поскольку $|CD|<\overset{\smile}{AD}<|AB|$, то $\sin x<x<\operatorname{tg} x$. Все величины в этих неравенствах положительны и поэтому $\frac{1}{\operatorname{tg} x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}$. Дальше имеем $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,\quad -\cos x>-\frac{\sin x}{x}>-1,\ 1-\cos x>1-\frac{\sin x}{x}>0$. Таким образом,

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|=1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<2\cdot\frac{x}{2}=x.$$

На основании этого неравенства получаем

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)=\varepsilon>0:\ \forall x,\ 0<x<\delta\ \mapsto\ \left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon$. Это и означает, что

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

б) левосторонний предел.

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\begin{bmatrix}-x=t,\\ x\to-0,\ t\to+0\end{bmatrix}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1.\ \blacktriangleleft$$

Определение. Если функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки a и $\forall \mathrm{E}>0\ \exists\delta=\delta(\mathrm{E})>0:\ \forall x,\ 0<|x-a|<\delta\ \mapsto\ |f(x)|>\mathrm{E}$, то говорят, что функция $f(x)$ является ***бесконечно большой*** или ***имеет своим пределом*** ∞ при $x\to a$, и пишут $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$. Если $f(x)>\mathrm{E}\ \ \forall x,\ 0<|x-a|<\delta$, то пишут $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ (при этом $\exists\delta_0:\ f(x)>0\ \forall x,\ 0<|x-a|<\delta_0$). Если $f(x)<-\mathrm{E}\ \ \forall x,\ 0<|x-a|<\delta$, то пишут $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ (при этом $\exists\delta_0:\ f(x)<0\ \forall x,\ 0<|x-a|<\delta_0$).

Определение. Если функция $f(x)$ определена $\forall x,\ |x|\ge x_0$ и $\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta=\Delta(\varepsilon)>0:\ \ \forall x,\ |x|>\Delta\ \mapsto\ |f(x)-A|<\varepsilon$, то говорят, что ***число*** A ***является пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x\to\infty$ и пишут $\lim_{x\to\infty}f(x)=A$. Если $|f(x)-A|<\varepsilon\ \ \forall x,\ x>\Delta$, то пишут $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$. Если $|f(x)-A|<\varepsilon\ \ \forall x,\ x<-\Delta$, то пишут $\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$.

Например,

$$\lim_{x\to0}\lg x^2=-\infty,\ \lim_{x\to0}(2\lg x)\ \nexists,\quad \lim_{x\to+0}(2\lg x)=-\infty;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\ \lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty,\ \lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

А что означает $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$? ($\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta=\Delta(\varepsilon)>0:\ \forall x,\ |x|>\Delta\ \mapsto |f(x)|>\varepsilon$)

Теорема 2. (критерий Гейне существования предела функции). Для того чтобы функция $f(x)$ имела пределом число A в точке $x=a$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой числовой последовательности (x_n) значений аргумента функции $f(x)$, $x_n\in D(f),\ (x_n)\to a,\ x_n\neq a$ соответствующая числовая последовательность значений функции $(f(x_n))\to A$.

Пример 2°. (Замечательный степенно-показательный предел) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

► Сначала докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$ Согласно критерию Гейне мы должны показать, что $\forall(x_n)\to+\infty\mapsto\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e.$ Как известно $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$, т.е. при $x_n=n\in\mathbb{N}\mapsto\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e$. Покажем сначала, что для каждой числовой последовательности $(k_n)\to\infty,\ k_n\in\mathbb{N}\ \mapsto\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{k_n}\right)^{k_n}=e.$ Если $(k_n)\uparrow\uparrow$ – возрастающая, то это подпоследовательность числовой последовательности (n) и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{k_n}\right)^{k_n}=e$ как частичный предел числовой последовательности $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Если же (k_n) является произвольной, не обязательно возрастающей, последовательностью натуральных чисел, то по причине того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$, имеем $\forall\varepsilon>0\ \exists\nu:\ \forall m>\nu\ \mapsto\ \left|\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m-e\right|<\varepsilon$. А Поскольку $(k_n)\to+\infty$, то для выбранного $\nu\ \exists\ N:\ \forall n>N\ \mapsto\ k_n>\nu$. Таким образом, если взять $m=k_n$, то $\forall n>N\mapsto\left|\left(1+\dfrac{1}{k_n}\right)^{k_n}-e\right|<\varepsilon$, а это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{k_n}\right)^{k_n}=e$.

Пусть далее $(x_n)\to+\infty$. – произвольная числовая последовательность. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $x_n>1$ ((x_n) – бесконечно большая, а поэтому при $\varepsilon=1\ \exists N_1:\ \forall n>N_1\ \mapsto\ x_n>1$). Возьмём $k_n=[x_n]$, т.е.

$$k_n \le x_n < k_n + 1,\ k_n \in \mathbb{N},\ \ k_n \ge 1, \tag{1}$$

откуда

$$\frac{1}{k_n+1} < \frac{1}{x_n} \le \frac{1}{k_n} \ \Leftrightarrow 1+\frac{1}{k_n+1} < 1+\frac{1}{x_n} \le 1+\frac{1}{k_n} \tag{2}$$

Из (1) и (2) получим, $\left(1+\dfrac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < \left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1+\dfrac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}$ или

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}}_{\downarrow\ e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1}}_{\downarrow\ 1} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}}_{\downarrow\ e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n}\right)}_{\downarrow\ 1}$$

Из теоремы о сжатой последовательности следует $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$, а на основании критерия Гейне имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e.$ Покажем далее, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e.$ Возьмем $x=-t-1$. Очевидно, что $t\to+\infty$ при $x\to-\infty$. Поэтому $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\dfrac{1}{t}\right) = e.$ ◄

Замечание 1. Если взять $y=1/x$, то при $x\to\infty \mapsto y\to 0$. Поэтому $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e.$

Замечание 2. Если $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$ и $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)} = e.$

Примеры:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+(-\frac{2}{x})\right)^{-\frac{x}{2}}\right)^{-2} = e^{-2}.$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{\sin\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x-1}} = \lim_{x\to 1+0}\frac{\sin\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\sqrt[4]{x-1} = 1\cdot 0 = 0.$$

Критерий Гейне даёт возможность перенести на понятие предела функции все свойства предела числовой последовательности. Например, имеет место

Теорема 3. (о единственности предела функции). Если функция $f(x)$ имеет $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то этот предел единственный.

Действительно, если предположить, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A',\ A' \neq A$, то $\forall (x_n) \to a \ \mapsto \ (f(x_n)) \to A,\ (f(x_n)) \to A'$, но это невозможно на основании единственности предела числовой последовательности.

Сформулируем критерий Коши существования предела функции, аналогичный критерию Коши сходимости числовой последовательности.

Критерий Коши (существования предела функции). Для существования предела функции $f(x)$ в точке $x = a$ необходимо и достаточно, чтобы

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x', x'' \in D(f),\ 0 < |x' - a| < \delta,\ 0 < |x'' - a| < \delta\ \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$

Теорема 4. (о представлении функции, имеющей предел). Для того чтобы функция $f(x)$ имела пределом число A, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = A + \alpha(x),$ где $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

1.2.8. Непрерывность функции. Точки разрыва

При определении предела функции $f(x)$ в точке $x = a$ мы считали, что функция в этой точке может быть и неопределённой. Так, например, функция $\dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$, а её предел в этой точке равен 1. Далее нас будут интересовать функции, определённые в рассматриваемой точке.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке $x = a$, если она определена в окрестности этой точки, имеет предел в точке $x = a$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. При этом точка $x = a$ называется ***точкой непрерывности*** функции f. Это означает: “на языке $\varepsilon - \delta$” $: \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$ $\forall x,\ |x - a| < \delta \mapsto |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, и “на языке последовательностей”: $\forall (x_n) \to a,\ x_n \in D(f),\ \ \mapsto\ (f(x_n)) \to f(a)$.

Определение. Разность $x - a$ назовём ***приращением аргумента функции*** в точке $x = a$ и обозначим его $\Delta x \overset{def}{=} x - a$, а разность $f(x) - f(a)$ назовём ***приращением функции***, соответствующим приращению Δx и обозначим его $\Delta f(a) \overset{def}{=} f(x) - f(a)$. Если $y = f(x)$, то пишут также $\Delta y(a) = \Delta f(a)$. Таким образом, имеем: $x = a + \Delta x,\ \Delta f(a) = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$.

При таких обозначениях непрерывность функции $f(x)$ в точке a

выражается равенством $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(a)=0$, что означает: *малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции.*

Определение. Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной справа (слева)*** в точке $x=a$, если $f(a+0)=f(a)$ $\big(f(a-0)=f(a)\big)$.

Из теоремы об односторонних пределах следует, что функция $y=f(x)$ является непрерывной в точке, если и только если она непрерывна в этой точке как слева, так и справа.

Определение. Точка $x=a$ называется ***изолированной точкой*** области определения $D(f)$ функции f, если существует окрестность точки $x=a$, которая не содержит иных, кроме $x=a$, точек области $D(f)$, т.е. $a\in D(f),\ \exists\varepsilon>0:\overset{\circ}{\mathrm{U}}_{\varepsilon}(a)\not\subset D(f)$. В изолированной точке функция считается непрерывной.

Например, у функции $y=2^{\sqrt{\cos x-1}}$, $D(f)=\{2\pi k,\, k\in\mathbb{Z}\}$ – каждая точка области определения изолирована. Функция непрерывна на $D(f)$.

Из свойств пределов функции следует: если функции $f(x)$ *и* $g(x)$ непрерывны в точке $x=x_0$, то функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ также непрерывны в точке $x=x_0$ (в случае частного при условии $g(x)\neq 0$).

Определение. Если функция f определена в проколотой окрестности точки a, а в точке a функция не является непрерывной, то точка a называется ***точкой разрыва*** функции f. Таким образом, точка $x=a$ является точка разрыва функции $y=f(x)$, если не выполняется хотя бы одно из условий:

1) $a\in D(f)$; 2) $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)$; 3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Примеры:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x=0$ – точка неопределённости;

2) $f(x)=\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{x},\ x\neq 0\\ 0,\ \ x=0\end{array}\right.$, $x=0$ – не существует предел.

3) $f(x)=|\operatorname{sgn}x|$, $x=0$ – предел существует, но не равен значению функции в точке.

Среди точек разрыва встречаются несколько разных случаев.

1°. Точки разрыва первого рода (когда существуют оба односторонних предела).

1а) Определение. Точка разрыва функции $y=f(x)$ называется ***точкой устранимого разрыва***, если в этой точке функция имеет предел, т.е.

существуют оба односторонних предела и $f(a-0)=f(a+0)$. При этом $f(x)$ в точке устранимого разрыва или неопределена, или $f(a)\neq\lim\limits_{x\to a}f(x)$. Например, функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ имеет в точке $x=0$ устранимый разрыв. Если же рассмотреть функцию $y=\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sin x}{x},\ x\neq 0\\ 1,\ x=0\end{array}\right.$, то она непрерывна в точке $x=0$, т.е. мы доопределили функцию $y=\dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$ по непрерывности. Поэтому разрыв и называется устранимым.

1б) Определение. Если существуют оба односторонние пределы, но $f(a-0)\neq f(a+0)$, то точка разрыва $x=a$ называется ***точкой скачка***. Например, точка $x=a$ функции Хевисайда $y=\eta(x-a)$ является точкой скачка.

2°. Точки разрыва второго рода (когда не существует хотя бы один из односторонних пределов).

Определение. Если в точке разрыва не существует хотя бы один из односторонних пределов, то точка разрыва называется ***точкой разрыва второго рода***.

Примеры (точек разрыва второго рода).

1) Функция $y=\dfrac{1}{x}$, точка $x=0$.

2) $y=\left[\begin{array}{ll}\lg x, & x>0,\\ 0, & x\leq 0\end{array}\right.$, точка $x=0$.

3) $y=\left[\begin{array}{ll}\sin\dfrac{\pi}{x}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0\end{array}\right.$ – пример функции, не являющейся бесконечно большой, но не имеющей предела

Покажем, что правосторонний предел в точке *x=0* не существует, используя критерий Гейне. Для этого рассмотрим две числовые последовательности $x_n=\dfrac{1}{n}$, $(x_n)\to 0$ (здесь $\dfrac{\pi}{x_n}=\pi n$) и $x_k=\dfrac{2}{1+4k}$, $(x_k)\to 0$ (здесь $\dfrac{\pi}{x_k}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$). При этом

$f(x_n)=\sin\pi n=0,\ \Rightarrow\ \left(f(x_n)\right)\to 0;\ f(x_k)=\sin(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k)=1,\ \Rightarrow\ \left(f(x_k)\right)\to 1.$ Это означает, что $\lim\limits_{x\to+0}\sin\dfrac{\pi}{x}$ не существует.

Определение. Функция называется ***непрерывной на интервале***, если она непрерывная в каждой точке этого интервала. Функция называется ***непрерывной на отрезке*** $[\alpha,\beta]$, если она непрерывная на интервале (α,β) и непрерывная справа в точке α и слева в точке β.

Определение. Функцию, которая имеет на множестве X конечное число разрывов только первого рода, называют ***кусочно-непрерывной на множестве*** X **.**

1.2.9. Локальные свойства непрерывных функций

1°. ***Локальная ограниченность непрерывной функции.***

Определение. Функция $f(x)$ называется ***ограниченной сверху (снизу)*** на множестве X, если $\exists M$ $(\exists m)$: $\forall x\in X \mapsto f(x)\le M$ $(f(x)\ge m)$. Числа M, m называются соответственно ***верхней и нижней границами*** функции $f(x)$ на множестве X. Функция, ограниченная сверху и снизу на множестве X, называется ***ограниченной на этом множестве,*** т.е. $\exists L>0$: $|f(x)|\le L$ $\forall x\in X$.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и непрерывна в точке x_0, то существует окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ является ограниченной. (Здесь речь идёт о неизолированной точке из области определения функции).

2°. *Стабилизация знака непрерывной функции.*

Теорема 2. Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\ne 0$, то существует окрестность точки x_0, в которой знак функции $f(x)$ совпадает с её знаком в точке x_0, т.е. $\exists\delta>0$: $\operatorname{sgn} f(x)=\operatorname{sgn} f(x_0)$ $\forall x\in \mathrm{U}_\delta(x_0)$.

3°. *Непрерывность сложной функции.*

Определение. Пусть функция $y=g(x)$ определена на X, а функция $z=f(y)$ определена на Y, причём $g(X)\subset Y$. Тогда функцию $F(x)$, которая $\forall x\in X$ принимает значение $F(x)=f(g(x))$, называют ***сложной функцией*** (или ***композицией,*** *или* ***суперпозицией***) функций f и g и обозначают $f\circ g$.

Пример. Если $f(x)=\sqrt{1+\ln x},\ g(x)=\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, то

$$f\circ g=\sqrt{1+\ln\sin\frac{1}{\sqrt{x}}},\ \ g\circ f=\sin\frac{1}{\sqrt[4]{1+\ln x}}.$$

Теорема 3. Если функция $y = g(x)$ непрерывна в точке x_0, причём $y_0 = g(x_0)$, а функция $z = f(y)$ непрерывна в точке y_0, то сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Замечание. На основании непрерывности сложной функции имеет место равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(g(x)\right) = f\left(g(x_0)\right)$. А поскольку $g(x)$ также непрерывна в точке x_0, то $g(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Из обоих равенств следует $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$.

Это означает, что для непрерывной функции операция предельного перехода переставима с операцией действия функции.

1.2.10. Монотонные функции

Определение. Функцию $f(x)$ называют ***возрастающей*** на множестве $X \subset D(f)$, если $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \mapsto f(x_1) < f(x_2)$; ***неубывающей***, если $f(x_1) \le f(x_2)$; ***убывающей***, если $f(x_1) > f(x_2)$; ***невозрастающей***, если $f(x_1) \ge f(x_2)$. Все такие функции называются ***монотонными***. Возрастающие и убывающие функции называются ***строго монотонными***.

Теорема 1. (об односторонних пределах монотонной функции). Если функция $f(x)$ определена и монотонна на интервале X , то на этом интервале она может иметь точки разрыва только первого рода, т.е. в каждой точке $x_0 \in X$ существуют односторонние пределы, причём $f(x_0-0) \le f(x_0) \le f(x_0+0)$ ($f(x_0-0) \ge f(x_0) \ge f(x_0+0)$), если функция $f(x)$ является неубывающей (невозрастающей).

Теорема 2. (о непрерывности монотонной функции). Если функция $f(x)$ строго монотонная на отрезке $[a,b]$ и множеством её значений является отрезок $\left[f(a), f(b)\right]$ или $\left[f(b), f(a)\right]$, то она непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Замечание. Условие $\left[f(a), f(b)\right]$ достаточно только для непрерывности монотонной функции и недостаточно в ином случае.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на X и строго монотонна на X , т.е. $\forall x_1 \ne x_2 \mapsto f(x_1) \ne f(x_2)$, а тем самым $\forall y \in Y = f(X)$ существует только одно число $x \in X$ такое, что $y = f(x)$. Таким образом, на множестве Y определена функция, которая называется ***обратной функцией*** для функции $f(x)$ и обозначается $x = f^{-}(y)$. Очевидно, что $\forall x \in X \mapsto f^{-}\left(f(x)\right) = x$, а $\forall y \in Y \mapsto f\left(f^{-}(y)\right) = y$.

Поскольку $\left(x; f(x)\right)=\left(y; f^{-}(y)\right)$, то графиком функций $x=f^{-}(y)$ и $y=f(x)$ является одна и та же кривая. Но если обратную функцию рассматривать в виде $y=f^{-}(x)$, то её график симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно прямой $y=x$.

Теорема 3 (о непрерывности обратной функции). Если функция $y=f(x)$ является непрерывной и строго монотонной на отрезке $[a,b]$, то определенная на множестве её значений $f\left([a,b]\right)$ обратная для неё функция $x=f^{-}(y)$ является непрерывной на $f\left([a,b]\right)$.

1.2.11. Непрерывность основных элементарных функций

Напомним, что означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x,\ \left|x-x_0\right|<\delta\ \mapsto \left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$.

1°. *Постоянная функция.* Функция $f(x)\equiv C$ является непрерывной на $\mathbb{R}$.

2°. *Тождественная функция.* Функция $f(x)\equiv x$ является непрерывной на $\mathbb{R}$.

3°.*Многочлен.* Функция $f(x)\equiv c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1}+...+c_1 x + c_0$ - непрерывна на $\mathbb{R}$.

4°. *Рациональная функция.* Функция $f(x)\equiv\dfrac{c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1}+...+c_1 x + c_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1 x + b_0}$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ кроме тех точек, где знаменатель равен нулю.

5°. *Тригонометрические функции.*

1). Функция $f(x)\equiv\sin x$ – непрерывна на $\mathbb{R}$.

2). Функция $f(x)\equiv\cos x$ – непрерывна на $\mathbb{R}$.

3). Функции $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{ctg}x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ – непрерывны в области их существования как частное непрерывных функций.

6°. *Обратные тригонометрические функции.* Функции $\arcsin x,\ |x|\le 1;\ \arccos x,\ |x|\le 1;\ \operatorname{arctg}x,\ x\in\mathbb{R};\ \operatorname{arcctg}x,\ x\in\mathbb{R}$ непрерывны в области их определения как обратные для непрерывных функций.

7°. *Показательная функция.* Функция $y=a^x,\ a>0,\ a\ne 1$ является непрерывной на $\mathbb{R}$.

8°. *Логарифмическая функция.* Функция $y=\log_a x,\ a>0,\ a\ne 1$ является непрерывной на $\mathbb{R}_+$ как обратная для непрерывной функции $y = a^x$.

9º. ***Степенная функция.*** Функция $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ как композиция непрерывных функций $y = e^{\alpha \ln x}$ ($y = e^u$, $u = \alpha \ln x$).

10º. ***Гиперболические функции.*** Функции

$\operatorname{sh} x \overset{def}{=} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x \overset{def}{=} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x \overset{def}{=} \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\operatorname{cth} x \overset{def}{=} \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ – при $x \neq 0$ являются непрерывными на $\mathbb{R}$ функциями, как композиции непрерывных функций, и называются соответственно ***гиперболическими синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом***.

Гиперболические косинус и синус удовлетворяют уравнению гиперболы $u^2 - v^2 = 1$ (отсюда название – гиперболические функции), а именно имеет место тождество $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x \equiv 1$.

Также справедливы тождества $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$, $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$,

$\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2}$, $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$.

В то время как функции $u = \sin x$, $v = \cos x$ удовлетворяют уравнению $u^2 + v^2 = 1$ и их называют круговыми.

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, \underset{x \to +\infty}{\to} 1 \\ \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \underset{x \to -\infty}{\to} -1 \end{array}\right. .$$

Функцию, обратную к функции $y = \operatorname{sh} x$, обозначают $y = \operatorname{arsh} x,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$ Она непрерывная как обратная к непрерывной функции. Получим её аналитическое представление. Для этого разрешим уравнение $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ относительно x: $e^x = y \pm \sqrt{1 + y^2}$. Поскольку $e^x > 0$, то $e^x = y + \sqrt{1 + y^2} \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)$, т.е. $\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),\ x \in \mathbb{R}.$

Аналогично получаем $y = \operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),\ x \geq 1, y \geq 0.$

$\operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x},\ |x| < 1,\ y \in \mathbb{R}$.

Используем теорему о непрерывности сложной функции, замечательный степенно-показательный предел и непрерывность основных элементарных функций для вычисления следующих трёх важных пределов.

1°. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\begin{bmatrix}\text{Теорема о непрерывности}\\ \text{сложной функции}\end{bmatrix}=$

$=\log_a\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$. Таким образом, имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$. В частности $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

2°. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\begin{bmatrix}a^x-1=y,\ x=\log_a(1+y),\\ x\to 0\ \Rightarrow\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\log_a(1+y)}=\ln a.$ Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$. В частности $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

3°. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\left[a^{\log_a b}=b\ \Rightarrow\ (1+x)^\alpha=e^{\ln(1+x)^\alpha}=e^{\alpha\ln(1+x)}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{x}=$

$=\begin{bmatrix}\text{в первом пределе делаем}\\ \text{замену }\ \alpha\ln(1+x)=y\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^y-1}{y}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha\cdot\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)=1\cdot\alpha\cdot 1=\alpha.$ Таким образом, получили $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$.

1.2.12. Сравнение функций

Определение. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называют ***эквивалентными в окрестности точки*** x_0 и пишут $f(x)\sim g(x),\ x\to x_0$.

Примеры:

1) $\sin x\sim x,\ x\to 0$ потому, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

2) $\dfrac{x^4}{x^2+1}\sim x^4,\ x\to 0$ потому, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^2+1}/x^4=1.$

3) $\dfrac{x^4}{x^2+1}\sim x^2,\ x\to\infty$, ибо $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{x^2+1}/x^2=1.$

4) $3x^2+2x^3\sim 3x^2,\ x\to 0.$

5) $3x^2+2x^3\sim 2x^3,\ x\to\infty.$

Если принять во внимание примеры, рассмотренные в 2.11, то можно составить следующий список эквивалентных функций:

$e^x \sim 1+x,\ x \to 0;\quad a^x \sim 1+x\ln a,\ x \to 0;\quad (1+x)^\alpha \sim 1+\alpha x,\ x \to 0;$

$\ln(1+x) \sim x,\ x \to 0;\quad \log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a},\ x \to 0;\quad \sin x \sim x,\ x \to 0;$

$\cos x \sim 1,\ x \to 0;\quad \operatorname{tg} x \sim x,\ x \to 0;\quad \arcsin x \sim x,\ x \to 0;\quad \operatorname{arctg} x \sim x,\ x \to 0.$

Замечание 1. Эти соотношения остаются верными, если заменить в них x на бесконечно малую функцию $\alpha(x) \to 0,\ x \to x_0$. Например, $\sin\dfrac{1}{x^2} \sim \dfrac{1}{x^2},\ x \to \infty;$ $\sin(1-x)^3 \sim (1-x)^3,\ x \to 1;$ $e^{x^2} \sim 1+x^2,\ x \to 0;$ $\ln x = \ln\big(1+(x-1)\big) \sim x-1,\ x \to 1.$

Геометрически эквивалентность означает, что рассматриваемые функции ведут себя в окрестности точки $x=0$ приближённо как соответствующие прямые: $y=e^x$ и $y=x+1$.

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентные в окрестности точки $x=x_0$ и существует $\lim\limits_{x \to x_0}\big(f(x)\cdot h(x)\big)=a$, то существует также $\lim\limits_{x \to x_0}\big(g(x)\cdot h(x)\big)=a$.

Доказанная теорема даёт возможность заменять множитель (или делитель) под знаком предела на эквивалентный ему множитель (или делитель).

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

► На основании теоремы 1 получим

$$\lim_{x \to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x \to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\left[\sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2},\ x \to 0\right]=\lim_{x \to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Замечание 2. Из примера следует, что $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$, или $\cos x \sim 1-\dfrac{1}{2}x^2,\ x \to 0$.

Замечание 3. При вычислении пределов слагаемое нельзя заменять эквивалентными функциями. Действительно, если в примере 1, учитывая $\cos x \sim 1,\ x \to 0$, заменить $\cos x$ на 1, то получим $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1-1}{x^2}=0$, что приводит к неверному результату.

Определение. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, то функцию $f(x)$ называют ***бесконечно***

малой в сравнении с функцией $g(x)$ ***в окрестности точки*** x_0 и пишут $f(x) = o\big(g(x)\big),\ x \to x_0$.

При этом сами функции f и g могут не быть бесконечно малыми. Так $x^2 = o\left(x^4\right),\ x \to \infty$ (поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0$), хотя функции x^2 и x^4 являются бесконечно большими при $x \to \infty$.

Определение. Если $f(x) = o\left(g(x)\right),\ x \to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, то говорят, что функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 является ***бесконечно малой более высокого порядка***, чем $g(x)$.

В связи с введенным определением часто используется запись $f(x) = o\left(1\right),\ x = x_0$. Это означает $f(x)$ – бесконечно малая в точке x_0. Отметим следующие свойства символа $o\left(g\right),\ x \to x_0$ (здесь $C = const.$):

$o\left(C \cdot g\right) = o\left(g\right)$;

$C \cdot o\left(g\right) = o\left(g\right)$;

$o\left(g\right) + o\left(g\right) = o\left(g\right)$;

$o\left(g + o\left(g\right)\right) = o\left(g\right)$;

$o\left(o\left(g\right)\right) = o\left(g\right)$;

$g^{n-1} \cdot o\left(g\right) = o\left(g^n\right)$;

$o\left(g^n\right) \cdot o\left(g^m\right) = o\left(g^{n+m}\right)$;

$\left(o\left(g\right)\right)^n = o\left(g^n\right)$;

$\dfrac{o\left(g^n\right)}{g} = o\left(g^{n-1}\right)$.

Теорема 2. (О представлении эквивалентных функций). Для того чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентными в окрестности точки x_0, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = g(x) + o\left(g(x)\right),\ x \to x_0$.

Этот критерий позволяет приведенной выше таблице эквивалентных функций придать следующий вид.

Таблица эквивалентных функций

$e^x = 1 + x + o(x),\ x \to 0$;	$\operatorname{tg} x = x + o(x),\ x \to 0$;
$a^x = 1 + x\ln a + o(x),\ x \to 0$;	$\operatorname{arctg} x = x + o(x),\ x \to 0$;
$\ln(1+x) = x + o(x),\ x \to 0$;	$\cos x = 1 + o(x),\ x \to 0$;

$\log_a(1+x)=\dfrac{x}{\ln a}+_o(x),\ x\to 0;$ $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+_o(x),\ x\to 0;$ $\sin x=x+_o(x),\ x\to 0;$ $\arcsin x=x+_o(x),\ x\to 0;$	$\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+_o(x^2),\ x\to 0$ $\operatorname{ch} x=1+\dfrac{1}{2}x^2+_o(x^2)$ $\operatorname{sh} x=x+_o(x),\ x\to 0;$

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=a,\ a\neq 0,\ a\neq 1$, то пишут $f(x)=O\big(g(x)\big),\ x\to x_0$. Поскольку этот предел является конечным, то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ограничена в окрестности точки x_0, т.е. $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|\le C$, или $|f(x)|\le C\cdot|g(x)|$. И поэтому при этом также говорят, что функция $f(x)$ ***ограничена в сравнении с функцией*** $g(x)$. Если при этом функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми в точке x_0, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют ***одинаковый порядок малости*** или являются ***бесконечно малыми одного порядка***. В частности, если $f(x)=_o(1),\ x\to x_0$ и $f(x)=O\big((x-x_0)^n\big)$, то $f(x)$ называют ***бесконечно малой*** n ***– го порядка при*** $x\to x_0$. Например, функция $\sin^2(x-1)$ является бесконечно малой функцией второго порядка при $x\to 1$.

Метод выделения главной части функции позволяет во многих случаях удобно вычислять пределы.

Пример 2.

►

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt[3]{1+x}}{2\operatorname{arctg}x-\arcsin x}=\left[\begin{array}{l} e^x=1+x+_o(x),\ (1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\dfrac{1}{3}x+_o(x),\\ \arcsin x=x+_o(x),\ \operatorname{arctg}x=x+_o(x)\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+_o(x)-\left(1+\dfrac{1}{3}x+_o(x)\right)}{2\big(x+_o(x)\big)-\big(x+_o(x)\big)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{3}x+_o(x)}{x+_o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{_o(x)}{x}}{1+\dfrac{_o(x)}{x}}=\frac{2}{3}.$$

◄

Пример 3.

►

$$\lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{\frac{1}{x\ln(1+x)}}=\lim_{x\to 0}\left(\big(1+\big(\cos x-1\big)\big)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\cos x-1}{x\ln(1+x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\ln(1+x)}}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos x-1=-\dfrac{x^2}{2}+_o(x^2), \\ x\ln(1+x)=x\left(x+_o(x)\right)=x^2+_o(x^2)\end{bmatrix}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+_o(x^2)}{x^2+_o(x^2)}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

◄

Следует отметить, что использование эквивалентных функций не всегда приводит к цели.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+_o(x)-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{_o(x)}{x^3}$ **?**

1.2.13. Глобальные свойства непрерывных функций

Теорема Больцано-Коши (о промежуточном значении). Если функция f является непрерывной на отрезке $[a,b]$ и $f(a)\neq f(b)$, то для каждого действительного числа γ, находящегося между $f(a)$ и $f(b)$, существует по крайней мере одна точка $\xi\in(a,b)$: $f(\xi)=\gamma$.

Первая теорема Вейерштрасса. (об ограниченности функции). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. $\exists L>0:\ \forall x\in[a,b]\ \mapsto\ |f(x)|\le L$.

Замечание. Теорема неверна на промежутках, не являющихся отрезками. Например, $y=\dfrac{1}{x}$ – непрерывна на (0,1), но неограничена; $y=x$ – непрерывна на $\mathbb{R}$, но неограничена.

Вторая теорема Вейерштрасса. (о достижимости точных границ). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она дастигает на этом отрезке своих точных нижней и верхней границ, т.е.

$\exists \underline{x},\ \overline{x}\in[a,b]:\ f(\underline{x})=\inf\limits_{[a,b]}f(x)=\min\limits_{[a,b]}f(x),\ \ f(\overline{x})=\sup\limits_{[a,b]}f(x)=\max\limits_{[a,b]}f(x)$.

Следствие. Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, и $m=\min\limits_{[a,b]}f(x)$, $M=\max\limits_{[a,b]}f(x),\ m<M$, то множеством значений функции f на отрезке $[a,b]$ является отрезок $[m,M]$. Если же $m=M$, то $f(x)=const=m=M$.

Пример 1. Функция $y=\begin{cases}\sin x, & x\in[-\pi/2,\pi/2), \\ 0, & x=\pi/2\end{cases}$ не имеет наибольшего значения на отрезке $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$, поскольку является разрывной на этом отрезке.

Если функция $f(x)$ является непрерывной в точке $x_0\in X$, то это означает, что $\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\quad \forall x,\ |x-x_0|<\delta\ \mapsto\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (δ зависит от

x_0).

Определение. Функция $f(x)$ называется ***равнамерно непрерывной на промежутке*** X, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x', x'' \in X, \ |x' - x''| < \delta \mapsto |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Главным в этом определении является то, что неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ выполняется сразу $\forall x', x'' \in X$ при единственном условии $|x' - x''| < \delta$.

Из равномерной непрерывности функции f на промежутке X следует непрерывность функции в каждой точке $x \in X$, т.е. непрерывность на X. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 2. $y = \sin\dfrac{1}{x}, \ x \in (0,1).$

► Функция непрерывна на (0,1). Покажем, что она не является равномерно непрерывной на этом интервале. Для этого запишем сначала отрицание равномерной непрерывности функции f на промежутке X: $\exists \varepsilon_0 > 0: \ \forall \delta > 0$ $\exists x', x'' \in X, \ |x' - x''| < \delta: \ |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$.

Пусть $x'_k = \dfrac{1}{2\pi k}, \ x''_k = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi k}, k \in \mathbb{Z}$. При этом $(x'_k) \to 0, \ (x''_k) \to 0$.

Имеем $|f(x'_k) - f(x''_k)| = \left|\sin 2\pi k - \sin(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k)\right| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$.

Поскольку $(x'_k - x''_k) \to 0$, то $\forall \delta > 0 \quad \exists k: \ |x'_k - x''_k| < \delta$. Это и означает выполнение условия неравномерной непрерывности функции. ◄

Теорема Кантора. Если функция является непрерывной на отрезке, то она равномерно непрерывна на этом отрезке, т.е. непрерывность функции на отрезке достаточна для её равномерной непрерывности на этом отрезке.

Вопрос: Может ли функция быть равномерно непрерывной на промежутке, не являющемся отрезком, если она непрерывна на этом промежутке?

Пример 3. $y = x^2, \ x \in (-1,1).$

► Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. Если $|x' - x''| < \dfrac{\varepsilon}{2} = \delta(\varepsilon)$, то

$|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - x''^2| = |x' + x''| \cdot |x' - x''| < 2|x' - x''| < \varepsilon$. Это и означает равномерную непрерывность функции на интервале (–1,1). ◄

Вопросы

1. Сформулируйте определение неограниченной последовательности.

2. Будут ли бесконечно малыми следующие последовательности: а) $x_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$; б) $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$? Будут ли бесконечно большими следующие последовательности: а) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$; б) $x_n = \dfrac{n!}{10^n}$?

3. Сформулируйте в положительном смысле, используя кванторы $\forall, \exists$, что последовательность (x_n) не является возрастающей.

4. Сформулируйте в положительном смысле, используя кванторы $\forall, \exists$, что число a не является пределом последовательности (x_n).

5. Сформулируйте в положительном смысле, используя кванторы $\forall, \exists$, что последовательность (x_n) не является фундаментальной.

6. Будет ли фундаментальной любая подпоследовательность сходящейся последовательности?

7. Может ли $|f(x)|$ быть убывающей функцией на интервале $(a;b)$, если $f(x)$ на этом интервале возрастает?

8. Сформулируйте с помощью неравенств следующие утверждения: а) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$; б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; в) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$; г) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

9. Являются ли эквивалентными при $x \to +\infty$ функции $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ и $g(x) = 2x+5$? Являются ли эквивалентными при $x \to 0$ функции $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ и $g(x) = \sqrt{x}$?

10. Функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке $x = a$. Может ли быть непрерывной функция $f(x)+g(x)$?

11. При каком значении параметра a функция

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \cdot \sin(x-1)^{-2}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1, \end{cases}$$ будет непрерывной в точке $x = 1$.

12. Является ли функция $y = 2^x + \cos 5x$ равномерно непрерывной на отрезке $[5,6]$?

1.3. Дифференциальное исчисление

1.3.1. Производная и дифференциал

Если $s(t)$ – закон прямолинейного движения материальной точки, то за промежуток времени от t до $t+\Delta t$ точка пройдёт расстояние $\Delta s(t)=s(t+\Delta t)-s(t)$. При этом отношение $\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ выражает среднюю скорость движения. Если же $\Delta t\to 0$, то $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s(t)}{\Delta t}=v(t)$ – мгновенная скорость в момент t. Таким образом, мы приходим к понятию производной.

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то этот предел называется ***производной*** функции $y=f(x)$ в точке x_0. (В определении ничего не говорится ни о существовании предела функции, ни о её непрерывности в точке x_0).

Обычно производную обозначают $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$ ***по Лагранжу***, или $\dfrac{dy}{dx}$ – ***по Лейбницу***. Используются также следующие обозначения: $\dot{y}$ – ***по Ньютону***, Dy – ***по Коши***.

Используя понятия приращения аргумента $x-x_0=\Delta x$ и приращения функции $f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$, получаем:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Пример 1.

► **а)** $y=c=const$, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{c-c}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$;

б) $y=\sqrt{x}$, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. (Производная существует только при $x>0$, хотя функция $y=\sqrt{x}$ определена и непрерывна при $x\geq 0$.) ◄

Заметим, что обозначение $f'(x_0)$ означает $f'(x_0)\overset{def}{=}f'(x)\big|_{x=x_0}$, а $\left(f(x_0)\right)'=0$ как производная константы.

Так для функции $y=\sqrt{x}$ имеем $\left(\sqrt{x}\right)'\Big|_{x=2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, но $\left(\sqrt{2}\right)'=0$.

Определение. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то их называют соответственно ***левосторонней*** и ***правосторонней производными*** функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают соответственно $f_-^{'}(x_0)$ и $f_+^{'}(x_0)$.

Из свойств пределов следует: функция f имеет производную в точке x_0, когда и только когда она имеет левостороннюю и правостороннюю производные: $f_-^{'}(x_0)=f_+^{'}(x_0)$, причём $f^{'}(x_0)=f_-^{'}(x_0)=f_+^{'}(x_0)$.

Определение. Если функция f имеет в точке x_0 производную, то эту функцию называют ***дифференцируемой в точке*** x_0**.** По этой причине операцию вычисления производной функции называют ***дифференцированием***.

Теорема 1. (необходимое условие дифференцируемости). Если функция f является дифференцируемой в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Замечание 1. Непрерывность является необходимым условием для существования производной, но не достаточным.

Пример 2. $y=|x|$**.**

► $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{-x}{x}=-1,$

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{x}=1$. Таким образом, $f_-'(0)\neq f_+'(0)$, и функция $y=|x|$ является недифференцируемой в точке $x=0$, хотя эта точка является точкой непрерывности функции $y=|x|$.◄

Замечание 2. Из теоремы 1 следует, что в точке разрыва функция недифференцируема.

Теорема 2. (о представлении дифференцируемой функции). Для того чтобы функция $y=f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы её приращение в этой точке имело представление

$$\Delta f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x), \qquad (1)$$

где A не зависит от Δx. При этом $A=f'(x_0)$ и

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x). \qquad (2)$$

Замечание 3. Мы получили, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $\Delta f(x_0)\sim f'(x_0)\Delta x$ при $x\to x_0$.

Определение. Главную линейную часть $f'(x_0)\Delta x$ приращения дифференцируемой в точке x_0 функции $y=f(x)$ (см. (1), (2)) называют ***дифференциалом*** функции и обозначают $df(x_0)$, или $dy(x_0)$. Таким образом,

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x. \qquad (3)$$

Например, если рассмотреть функцию $y = x$, то

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = 1 \cdot \Delta x + 0$, т.е. $dy = dx = \Delta x$. По этой причине обычно приращение независимой переменной Δx обозначают dx и поэтому формула (3) принимает вид $df(x_0) = f'(x_0)dx.$

Рассмотрим геометрический смысл производной и дифференциала. Пусть $y = f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 функцией, а $f'(x_0)$ – её производная в этой точке. Запишем уравнение секущей, проходящей через точки $M\left(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)\right)$ и $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$:

$$y = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\left(x - x_0\right), \qquad (4)$$

где x и y координаты точек секущей. Если в (4) $\Delta x \to 0$, то угловой коэффициент секущей $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ стремится к $f'(x_0)$, т.е. уравнение (4) принимает вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\left(x - x_0\right). \qquad (5)$$

Это уравнение определяет предельное положение секущей в точке $x = x_0$.

Определение. Прямая, определяемая уравнением (5), называется ***касательной*** к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0. Прямая, проходящая через точку $\left(x_0; f(x_0)\right)$ перпендикулярно касательной, называется ***нормалью*** к кривой в этой точке. Её уравнение имеет вид $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot\left(x - x_0\right)$. Таким образом, угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Это означает, что производная $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 является угловым коэффициентом касательнай к графику функции в точке $\left(x_0; f(x_0)\right)$.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 левую и правую производные, причём $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, то в этом случае не существует производная $f'(x_0)$, следовательно, в точке $\left(x_0; f(x_0)\right)$ кривая $y = f(x)$ не имеет касательной. Однако при этом можно говорить о ***левой*** и ***правой касательных*** в этой точке с разными угловыми коэффициентами $\operatorname{tg}\alpha_1 = f'_-(x_0),\ \operatorname{tg}\alpha_2 = f'_+(x_0)$. В этом случае точку $\left(x_0; f(x_0)\right)$ называют ***угловой*** точкой кривой.

Одновременно получаем, что дифференциал функции является её приращением по касательной. При этом, чем меньше значение приращения независимой переменной Δx, тем меньше отличается Δy от dy, т.е. $\Delta y \approx dy$,

или $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$. Таким образом, имеем формулу
$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x \tag{6}$$
для приближённого вычисления значения функции через дифференциал.

Определение. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$, то говорят, что функция имеет в точке x_0 ***бесконечную производную.*** В этом случае предельное положение секущей при $x\to x_0$ определяется уравнением $x=x_0$. Действительно, из (2) и (6) получаем $x=x_0+\dfrac{1}{\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}}\big(y-f(x_0)\big)$, где коэффициент при $y-f(x_0)$ стремится к нулю, если $\Delta x\to 0$, а поэтому имеем $x=x_0$. В этом случае касательная является параллельной оси Oy.

Определение. Функция $f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***) в точке x_0, если

$\exists\ \delta>0:\ \forall x\in \overset{\circ}{\mathrm{U}}_{\delta}(x_0)\ \mapsto \operatorname{sgn}\Delta f(x_0)=\operatorname{sgn}\Delta x\ \left(\operatorname{sgn}\Delta f(x_0)=-\operatorname{sgn}\Delta x\right)$ или

$\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}>0,\ \left[\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}<0\right].$

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Если $f'(x_0)>0\ \left(f'(x_0)<0\right)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0.

Определение. Пусть существует δ–окрестность точки x_0, $U_\delta(x_0)=(x_0-\delta, x_0+\delta)$, в которой определена функция $f(x)$ и $f(x)\le f(x_0)\ \left(f(x)\ge f(x_0)\right)\quad \forall x\in U_\delta(x_0)$. Тогда говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 ***локальный максимум (минимум)***. Локальный максимум и локальный минимум объединяют общим термином ***локальный экстремум.***

Теорема 4 (Ферма). Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и является дифференцируемой в точке x_0, то $f'(x_0)=0$.

Замечание 4. Функция может не иметь производную в точке x_0, но может иметь локальный экстремум в этой точке. Например, $y=|x|,\ x_0=0$.

Следствие. Несуществование производной и равенство её нулю является необходимым условием существования экстремума функции в точке.

1.3.2. Правила дифференцирования

1º. Дифференцирование арифметических комбинаций.

Теорема 1. Если функции u и v являются дифференцируемыми в точке x, то в этой точке дифференцируемы сумма, разность, произведение и частное этих функций. При этом справедливы формулы:

$$\big(u(x) \pm v(x)\big)' = u'(x) \pm v'(x), \quad \big(u(x)\cdot v(x)\big)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x),$$

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}, \quad \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Доказательство проведём сначала для произведения.

$$\big(u(x)\cdot v(x)\big)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \begin{bmatrix} u(x+\Delta x) - u(x) = \Delta u(x) \Rightarrow u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u(x), \\ v(x+\Delta x) - v(x) = \Delta v(x) \Rightarrow v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v(x) \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(u(x)+\Delta u(x)\big)\big(v(x)+\Delta v(x)\big) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{u(x)v(x)} + v(x)\Delta u(x) + u(x)\Delta v(x) + \Delta u(x)\Delta v(x) - \cancel{u(x)v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(v(x)\underbrace{\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}}_{\substack{\downarrow \\ u'(x)}} + \left(u(x) + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\Delta u(x)}\right)\underset{\substack{\downarrow \\ v'(x)}}{\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}}\right) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

Далее получим формулу для вычисления производной функции $\dfrac{1}{v(x)}$:

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{1}{v(x)}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\underbrace{v(x+\Delta x)}_{\substack{\downarrow \\ v(x)}}\cdot v(x)} = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

Если функцию $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ представить в виде $u(x)\cdot\dfrac{1}{v(x)}$, и использовать обе доказанные формулы, то получится формула вычисления производной частного.

Формулы вычисления производных суммы и разности функций докажите самостоятельно.

Замечание 1. Если в формуле вычисления производной произведения взять функцию $v(x) \equiv C = const$, то получится формула $\left(C \cdot u(x)\right)' = C \cdot u'(x)$ (при этом учитываем, что $C' = 0$). Это означает, что при дифференцировании константу можно выносить за знак производной.

Замечание 2. При вычислении дифференциалов используют аналогичные правила:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;

2. $d(u \cdot v) = udv + vdu$;

3. $d(C \cdot u) = Cdu,\ C = const$;

4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

2°. Дифференцирование обратной функции.

Теорема 2. Если строго монотонная и непрерывная на промежутке X функция $y = f(x)$ является дифференцируемой в точке $x_0 \in X$ и $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $x = f^{-}(y)$ является также дифференцируемой в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ и её производная равна $\left(f^{-}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

1.3.3. Формулы дифференцирования

1°. Дифференцирование показательной и логарифмической функций.

При вычислении производной показательной функции $y = a^x$ будем использовать предел 2° §2.11 $\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a\right)$:

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$. В частности $\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$.

Поскольку функция $y = \log_a x$ является обратной для функции $x = a^y$, то $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{\left(a^y\right)'} = \dfrac{1}{a^y \ln a} = \dfrac{1}{x \ln a}$. В частности $\boxed{\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}}$.

2°. Дифференцирование степенной функции.

При вычислении производной степенной функции $y = x^\alpha$ будем использовать предел 3° §2.11 $\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha\right)$:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x} = x^{\alpha-1}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha-1}\cdot\alpha .$$

3º. Дифференцирование тригонометрических функций.

$$y=\sin x,\quad y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$=\left[\begin{array}{c}\sin\frac{\Delta x}{2}\sim\frac{\Delta x}{2},\\ \cos x - \text{ непрерывная функция}\end{array}\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x .$$

Аналогично получается $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$. При вычислении производной функции $y=\operatorname{tg} x$ пользуемся правилом вычисления производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично $\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Поскольку $y=\arcsin x,\ |x|\le 1$ является обратной для функции $x=\sin y,\ |y|\le\frac{\pi}{2}$, то по теореме о производной обратной функции:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналагично $\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

Поскольку $y=\operatorname{arctg} x,\ x\in\mathbb{R}$ является обратной для функции $x=\operatorname{tg} y,\ |y|<\frac{\pi}{2}$, то по теореме о производной обратной функции:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} .$$

Аналагично $\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}}$.

4º. Дифференцирование гиперболических функций.

Применяя правила вычисления производной к функции $y=\operatorname{sh} x$, имеем:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}\right)' = \left(\frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2e^{x}}\right)' = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{0-e^{x}}{e^{2x}} = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x} = \operatorname{ch} x .$$

Аналагично $\boxed{(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x}$.

Используя формулу вычисления производной частного, имеем:

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)'\operatorname{ch} x - (\operatorname{ch} x)'\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} .$$

Аналагично $\boxed{(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}}$.

Как и в случае обратных тригонометрических функций имеем: $y = \operatorname{ar}\operatorname{sh} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sh} y$.

$$(\operatorname{ar}\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \left[\begin{array}{l}\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1, \\ \operatorname{ch} y = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}\end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} .$$

$y = \operatorname{arch} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ch} y$.

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)'} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} .$$

$y = \operatorname{arth} x \Leftrightarrow x = \operatorname{th} y, |x| < 1$.

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{(\operatorname{th} y)'} = \operatorname{ch}^2 y = \left[\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1\right] = \frac{\operatorname{ch}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}.$$

$y = \operatorname{ar}\operatorname{c}\operatorname{th} x \Leftrightarrow x = \operatorname{c}\operatorname{th} y, |x| > 1$.

$$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{(\operatorname{cth} y)'} = -\operatorname{sh}^2 y = \frac{1}{1-\operatorname{cth}^2 y} = \frac{1}{1-x^2} .$$

Таблица основных производных

$C' = 0,\ C - const;$	$(\sin x)' = \cos x;$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1};$	$(\cos x)' = -\sin x;$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$
$x' = 1;$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$
$(x^2)' = 2x;$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\operatorname{ar}\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$; $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$; $\left(e^x\right)' = e^x$; $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$;	$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;	$\left(\operatorname{arch} x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $\left(\operatorname{ar\,th} x\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \lvert x\rvert<1$; $\left(\operatorname{arc\,th} x\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \lvert x\rvert>1$;

1.3.4. Дифференцирование композиции

1º. Сложная функция.

Теорема 1. (о дифференцировании сложной функции). Если функция $y = g(x)$ является дифференцируемой в точке x_0, а функция $z = f(y)$ – дифференцируема в точке y_0, где $y_0 = g(x_0)$, то сложная функция $z = f\left(g(x)\right)$ является дифференцируемой в точке x_0. При этом $z'(x_0) = f'(y_0)\cdot g'(x_0) = f'\left(g(x_0)\right)\cdot g'(x_0)$.

Пример 1. Вычислить производную функций: 1) $z = \left(\sin x\right)^2$, 2) $z = \sin x^2$.

► 1) Функция является композицией двух функций: $z = y^2,\ y = \sin x$. Согласно теореме 1 имеем $z'(x) = z'(y)\cdot y'(x) = 2y\cdot\cos x = 2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$

2) $z = \sin y,\ y = x^2,\ \Rightarrow\ z' = \cos y\cdot 2x = \cos x^2\cdot 2x$. ◄

Теорема 2. (инвариантность формы дифференциала). Дифференциал функции имеет один и тот же вид не зависимо от того, является ли x независимой переменной, или же x – дифференцируемая функция какой-нибудь другой переменной.

Это свойство дифференциала называют ***инвариантностью формы дифференциала***.

2º. Параметрическая функция.

Пусть на некотором промежутке T числовой прямой t заданы две функции

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t). \tag{1}$$

Если функция φ является строго монотонной, то на множестве $\varphi(T)$ существует обратная функция $t = \varphi^{-}(x)$. Рассмотрим сложную функцию $y = \psi(\varphi^{-}(x)) \overset{def}{=} f(x)$, определённую на множестве $\varphi(T)$. Говорят, что эта функция ***задана параметрически равенствами*** (1).

Пример 2.

1) $x = t+1,\ y = t-2 \Rightarrow y = x-3$ – прямая.

2) $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in [0, 2\pi] \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ – окружность.

3) $x = 2\cos 2t,\ y = 2\sin 2t,\ t \in [0, \pi]$ – другая параметризация окружности.

Если φ и ψ непрерывны на *T*, то обратная функция $\varphi^{-}(x)$ является непрерывной на $\varphi(T)$, а поэтому сложная функция $\psi(\varphi^{-}(x))$ также непрерывна на $\varphi(T)$.

Теорема 3. Пусть функция $x = \varphi(t)$ является строго монотонной и непрерывной на промежутке *T*, а $t = \varphi^{-}(x)$ – её обратная функция. Пусть функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ дифференцируемы в точке $t_0 \in T$, причём $\varphi'(t_0) \neq 0$. Тогда сложная функция $f(x) = \psi\left(\varphi^{-}(x)\right)$, которая задаётся параметрически равенствами (1), является дифференцируемой в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ и при этом $f'(x_0) = \dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$**.** Таким образом, имеем формулу $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}}$, где $y = y(t),\ x = x(t)$.

Пример 3. Вычислить производную функции, заданной параметрически:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in [0, \pi]. \qquad (2)$$

(Что за кривая?)

► $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$. С другой стороны, если из равенств (2) исключить параметр *t*, то $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$, откуда получится функция $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, производная которой $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a}\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Учитывая равенства (2), имеем $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a}\dfrac{a\cos t}{\sqrt{a^2 - (a\cos t)^2}} = -\dfrac{b}{a}\dfrac{a\cos t}{a\sin t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$. ◄

3°. Неявная функция.

Пусть *E* – множество точек $M(x;y)$ плоскости Oxy. Если каждой точке $M \in E$ ставится в соответствие по некоторому правилу число z, то говорят, что на множестве *E* задана *числовая функция от двух переменных x и y*: $z = f(x,y),\ (x;y) \in E$. Например, объём конуса $v = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ – функция двух переменных *r* и *h*.

Пусть прямоугольник $\Pi = \{(x;y): |x-x_0| \le a, |y-y_0| \le b\}$ содержится в области определения функции $F(x;y)$, т.е. $\Pi \subset D(F)$ и пусть $F(x_0;y_0)=0$. Если на отрезке $P=[x_0-a, x_0+a]$ существует функция $y=f(x)$ такая, что $f(P) \subset [y_0-b, y_0+b]$ и $F(x, f(x)) \equiv 0 \ \forall x \in P$, то говорят, что уравнение $F(x;y)=0$ определяет на прямоугольнике Π y как ***неявную функцию переменной*** x. Например, уравнение $x^2+y^2-1=0$ определяет две неявные функции $y=\pm\sqrt{1-x^2}$.

Вопрос об условиях существования неявной функции будем выяснять во втором семестре. Если продифференцировать тождество $F(x, f(x)) \equiv 0$ как сложную функцию, то можно получить производную $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.

Пример 4. Из уравнения $x^2+y^2-1=0$ имеем $2x+2y\cdot y'=0$. Откуда следует $y' = -\dfrac{x}{y}$.

1.3.5. Производные и дифференциалы высших порядков

1°. Формулы вычисленния производных высших порядков.

Определение. Если функция $f(x)$ имеет производную в некоторой окрестности точки x, а функция $f'(x)$ является дифференцируемой в этой точке, то производную от функции $f'(x)$ называют ***второй производной*** или ***производной второго порядка*** функции $f(x)$ в точке x и обозначают $f''(x),\ f^{(2)}(x)$. Таким образом, $f''(x) \overset{def}{=} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$. По индукции определяют

$$f^{(n)}(x) \overset{def}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

Определение. Функцию, имеющую в каждой точке множества X производные до n-го порядка включительно, называют ***n раз дифференцируемой на*** X. Функцию, которая имеет на X производную любого порядка, называют ***бесконечно дифференцируемой на*** X. Например $f(x)=e^x$ – бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$.

Замечание. Имеется определённое удобство считать, что производная нулевого порядка совпадает с самой функцией $f^{(0)} \overset{def}{=} f(x)$. Поэтому на основании (1) получается, что *производная первого порядка является* *производной функции*.

Методом математическойай индукции нетрудно получить формулы для вычисления производных высших порядков основных элементарных функций.

Степенная функция: $y = x^{\alpha}$, $x \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Имеем $y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \dots$. По индукции $\boxed{\left(x^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots\left(\alpha-(n-1)\right)x^{\alpha-n}}$. В частности, если $\alpha = m \in \mathbb{N}$, то $\left(x^m\right)^{(m)} = m!$, $\left(x^m\right)^{(n)} = 0 \;\; \forall n > m$.

Таким образом, *n-я* производная многочлена *m*-й степени $P_m(x) = c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \dots + c_1 x^1 + c_0$ равна нулю, если *n*>*m* $\left(\left(P_m(x)\right)^{(n)} \equiv 0, \;\; \forall n > m\right)$. Чему равна $P_m^{(m)}(x)$?

Показательная функция: $y = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$**.** Так как $y' = a^x \ln a$, $y'' = \left(a^x \ln a\right)' = a^x \ln^2 a, \dots$, то по индукции $\boxed{\left(a^x\right)^{(n)} = a^x \ln^n a}$. В частности $\boxed{\left(e^x\right)^{(n)} = e^x}$.

Логарифмическая функция: $y = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}_+$

$y' = \dfrac{x^{-1}}{\ln a}$, $y'' = -\dfrac{x^{-2}}{\ln a}$, $y''' = 2\dfrac{x^{-3}}{\ln a}$, $y^{(4)} = -2 \cdot 3\dfrac{x^{-4}}{\ln a}, \dots$. По индукции

$\boxed{\left(\log_a x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{\ln a}x^{-n}}$. В частности $\boxed{\left(\ln x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}}$.

Синус и косинус: $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. $y' = \left(\sin x\right)' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$y'' = \left(\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$. По индукции $\boxed{\sin^{(n)} x = \sin\left(x + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)}$. В частности $\boxed{\sin^{(2m)} x = (-1)^m \sin x}$, $\boxed{\sin^{(2m-1)} x = (-1)^{m-1}\cos x}$. Аналагично $\boxed{\cos^{(n)} x = \cos\left(x + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)}$. В частности $\boxed{\cos^{(2m)} x = (-1)^m \cos x}$, $\boxed{\cos^{(2m-1)} x = (-1)^m \sin x}$. На основании полученных формул при *A*=const. имеем: $\boxed{\sin^{(n)} Ax = A^n \cdot \sin\left(Ax + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)}$,

$$\boxed{\cos^{(n)} Ax = A^n \cdot \cos\left(Ax + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Гиперболические функции: $y=\operatorname{sh}x,\ y=\operatorname{ch}x,\ x\in\mathbb{R}.$

Так как $(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x,\ (\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x,\ x\in\mathbb{R}$, то

$$\boxed{\operatorname{sh}^{(2n)}=\operatorname{sh}x,\ \operatorname{sh}^{(2n-1)}x=\operatorname{ch}x,\ \operatorname{ch}^{(2n)}=\operatorname{ch}x,\ \operatorname{ch}^{(2n-1)}x=\operatorname{sh}x}.$$

2º. Правило Лейбница.

В то время когда правило вычисления первой производной от суммы двух функций $(u+v)'=u'+v'$ легко переносится на случай n-й производной $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$, при вычислении n-й производной от произведения двух функций возникают определённые трудности. Как известно $(u\cdot v)'=u'v+uv'$. Но

$$(u\cdot v)''=\left((u\cdot v)'\right)'=(u'v+uv')'=(u'v)'+(uv')'=u''v+u'v'+u'v'+uv''=$$
$$=u''v+\underline{2u'v'}+uv''.$$

Теорема. (правило Лейбница). Если функции u и v имеют в точке x производные n-го порядка, то функция $u\cdot v$ также имеет в этой точке производную n-го порядка, причём $(u\cdot v)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}.$

Пример 1. Вычислить производную $y^{(10)}$ функции $y=x^2\sin x$.

► Возьмём $u=\sin x,\ v=x^2$. Имеем

$$y^{(10)}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(x^2\right)^{(k)}\sin^{(10-k)}x=C_{10}^0\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot 10\right)\cdot x^2+C_{10}^1\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot 9\right)\cdot 2x+$$
$$+C_{10}^2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot 8\right)\cdot 2=x^2\sin(x+5\pi)+20x\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+4\pi\right)+90\sin(x+4\pi)=$$
$$=x^2(-\sin x)+20x\cos x+90\sin x=\left(90-x^2\right)\sin x+20x\cos x.$$ ◄

Пример 2. Вычислить производную $y^{(n)}$ функции $y=x^3e^x$.

► Возьмём $u=e^x,\ v=x^3$. Имеем

$$y^{(n)}=C_n^0e^xx^3+C_n^1e^x3x^2+C_n^2e^x6x+C_n^3e^x6=e^x\left(x^3+3nx^2+3n(n-1)x+n(n-1)(n-2)\right).$$
◄

3º. Дифференциалы высших порядков.

Определение. Если функция $f(x)$ является дифференцируемой в некоторой окрестности точки x, то её дифференциал

$$df(x)=f'(x)dx \qquad (2)$$

называют ***первым дифференциалом*** функции f в точке x.

Если при этом дифференциал dx, который совпадает с приращением Δx независимой переменной x, не изменяется, то дифференциал dy является функцией только от x ($dx = const$).

Определение. Дифференциал от функции $f'(x)dx = df(x)$ в точке x называют ***вторым дифференциалом*** или ***дифференциалом второго порядка*** функции f в точке x и обозначают $d^2 f(x)$.

Используя формулу (2) и учитывая, что $dx = const$, получаем $d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = dx \cdot d(f'(x)) = dx \cdot f''(x)dx = f''(x)dx^2$. По индукции определяется $d^n f(x) = d(d^{(n-1)} f(x)),\ n \geq 1,$ где $d^0 f(x) \overset{def}{=} f(x)$. При этом нетрудно показать методом математической индукции, что

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n, \tag{3}$$

отсюда получаем $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ – ещё один способ для обозначения производной n – го порядка. Если рассмотреть идентичную функцию $y = x,$ то из формулы (3) следует, что $d^n x = 0\ \ \forall\ \ n > 1$.

Замечание. Дифференциалы высших порядков, в отличие от первого дифференциала, не имеют свойства инвариантности формы, т.е. формула (3) не верна, если заменить x на функцию $\varphi(t)$.

Действительно, $y = f(\varphi(t))$ является сложной функцией и поэтому $df(x) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$ Откуда получаем

$$d^2 f(x) = \left(f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \right)' dt^2 = \Big(f''(\varphi(t) \cdot \left(\varphi'(t)\right)^2 + f'(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t) \Big) dt^2 =$$

$$= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x,$$

или $d^2 f = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$ – в отличие от формулы (3) здесь имеется дополнительное слагаемое $f'd^2x \neq 0$. Но, если $x = \varphi(t) = at + b$, то $d^2x = 0$, и в этом случае вид второго дифференциала не изменяется.

По этой причине при вычислении дифференциалов сложных функций более удобным является использование последовательного вычисления: сначала вычисляется первый дифференциал, затем второй и т.д.

Пример 2. Вычислить $d^2 y$ функции $y = u^v,\ u = u(x),\ \ v = v(x).$

► $dy = e^{v \ln u} d(v \ln u) = u^v \left(\dfrac{v}{u} du + \ln u dv) \right),$

$$d^2y = d(dy) = d(u^v)\cdot\left(\frac{v}{u}du + \ln u dv\right) + u^v d\left(\frac{v}{u}du + \ln u dv\right) =$$

$$= u^v\left(\frac{v}{u}du + \ln u dv\right)^2 + u^v\left(\frac{udv - vdu}{u^2}du + \frac{v}{u}d^2u + \frac{du}{u}dv + \ln u d^2 v\right) =$$

$$= u^v\left(\frac{v}{u}d^2u + \ln u d^2v + \frac{v^2}{u^2}du^2 + \frac{2v\ln u}{u}dudv + (\ln^2 u)dv^2 + \frac{2}{u}dudv - \frac{v}{u^2}du^2\right). \blacktriangleleft$$

При вычислении дифференциала n–го порядка от произведения функций имеет место формула, аналогичная правилу Лейбница для производной $d^n(u\cdot v) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}u d^k v$.

1.3.6. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$ является:

1) непрерывной на $[a,b]$;

2) дифференцируемой на (a,b);

3) $f(a) = f(b)$.

Тогда существует по крайней мере одна точка $c \in (a,b)$: $f'(c) = 0$.

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b) и $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$, то $\exists\, c \in (a,b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ является непрерывной на $[a,b]$ и дифференцируемой на (a,b), то $\exists c \in (a,b)$:

$$f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a) \qquad (1)$$

Формуле (1) можно придать следующий вид: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c)\cdot\Delta x,\ x_0 < c < x_0 + \Delta x$ или $x_0 + \Delta x < c < x_0$, что записывают также в виде $\Delta f(x_0) = f'(x_0 + \theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x,\ 0 < \theta < 1$. Эту формулу называют ***формулой Лагранжа конечных приращений***.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: существует касательная к графику функции $y = f(x)$, параллельная секущей, проходящей через точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$. Здесь $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Доказательство некоторых неравенств полезно проводить на основании формулы Лагранжа.

Пример 1. Доказать неравенство $\ln(1+x) < x \ \forall x > 0$.

► Рассмотрим функцию $f(t) = \ln(1+t)$ на отрезке $[0;x]$, $x > 0$. По теореме Лагранжа $\ln(1+x) - \ln 1 = \frac{1}{1+c} \cdot (x-0)$, $0 < c < x$, т.е.

$\ln(1+x) = \frac{1}{1+c} \cdot x < x \ \forall x > 0$. ◄

Следствие 1. (критерий постоянства дифференцируемой функции). Для того чтобы дифференцируемая на отрезке функция была постоянной, необходимо и достаточно, чтобы её производная была равна нулю на этом отрезке.

Следствие 2. (критерий постоянства производной функции). Для того чтобы функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемая на (a,b), имела на этом интервале постоянную производную $f'(x) = k = const$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = kx + b,\ x \in [a,b]$, т.е. $f(x)$ – линейная функция.

Следствие 3. (теорема о совпадающих производных). Если две функции имеют на интервале совпадающие производные, то они отличаются на этом интервале на константу.

1.3.7. Правило Лопиталя

Определение. Будем говорить, что функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ *имеет неопределенность* $\frac{0}{0}$ в точке $x = a$, если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми в точке a (т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$) и существует проколотая окрестность точки a, в которой функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ – определена. *Раскрыть неопределённость* – значит вычислить $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ или доказать, что он не существует.

Теорема Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ и $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то также существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (1)$$

Замечание 1. Если для функций $f'(x)$ и $g'(x)$ выполняются условия теоремы Лопиталя, то для вычисления предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ снова пользуются теоремой.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

► $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$. ◄

Замечание 2. Предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ может существовать и в том случае, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$.

► $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\left(x\cdot\cos\frac{1}{x}\right)\right)=0$.

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cos\frac{1}{x}+x^2\cdot\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\cos x}\ \nexists$. Почему?
◄

Замечание 3. Теорема Лопиталя справедлива также при $x\to\pm\infty$ и $x\to\infty$.

Замечание 4. Если $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$, то аналогичные теоремы имеют место и для раскрытия неопределенностей типа $\frac{\infty}{\infty}$, т.е. если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно большими при $x\to a$ и $x\to\infty$. Этот, общий для всех случаев, метод раскрытия неопределённостей называется ***правилом Лопиталя***.

Замечание 5. При вычислении пределов может случиться, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$. Тогда и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, поскольку $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$.

Замечание 6. Правило Лопиталя бывает иногда беспомощным совсем в простых случаях. Например, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\ldots$ В то же время, очевидно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{e^x},\ \alpha>0.$

► Имеем неопределённость $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x}=\begin{bmatrix}\text{используем правило Лопиталя}\\ \text{пока не получим } \alpha\text{ - }k<0\end{bmatrix}=$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{e^x x^{k-\alpha}}=0.$ Таким образом, получили $e^x>>x^\alpha$, $x\to+\infty.$ ◄

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha},\ \alpha>0.$

► Снова неопределённость $\dfrac{\infty}{\infty}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$ ◄

Это означает, что $x^\alpha>>\ln x,\ x\to+\infty.$

Кроме рассмотренных неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ встречаются ещё следующие:

1) $\boxed{0\cdot\infty}$ Здесь $f(x)\to0,\ g(x)\to\infty$ при $x\to a.$

При вычислении предела выполняем преобразования $f\cdot g=\dfrac{f}{1/g}\Rightarrow\left(\dfrac{0}{0}\right)$, или $f\cdot g=\dfrac{g}{1/f}\Rightarrow\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x.$

► $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{1/x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=\lim\limits_{x\to+0}(-x)=0.$ ◄

2) $\boxed{\infty-\infty}$ Здесь $f(x)\to\infty,\ g(x)\to\infty$ при $x\to a.$

При вычислении предела выполняем преобразования

$$f-g=\frac{1}{1/f}-\frac{1}{1/g}=\frac{1/g-1/f}{1/(f\cdot g)}\Rightarrow\left(\frac{0}{0}\right).$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right).$

$$\blacktriangleright \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \begin{bmatrix} \sin x \sim x, \\ x \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos x} - x\sin x - \cancel{\cos x}}{2x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2} = 0. \blacktriangleleft$$

3) $\boxed{1^{\infty}, 0^0, \infty^0}$ При вычислении пределов пользуемся основным логарифмическим тождеством $f(x)^{g(x)} \equiv e^{g(x)\ln f(x)}$.

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to +0} x^x$.

$$\blacktriangleright \lim_{x\to +0} x^x = \lim_{x\to +0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to +0} x\ln x} = e^0 = 1. \blacktriangleleft$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$\blacktriangleright \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}} = [\sin x \sim x] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^3}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos x} - x\sin x - \cancel{\cos x}}{6x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{6x}\right)} = e^{-\frac{1}{6}}. \blacktriangleleft$$

Вопросы

1. Сформулируйте определение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.

2. Верно ли утверждение: если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке?

3. Какому условию должны удовлетворять односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0?

4. Можно ли применить правило дифференцирования произведения двух функций к функции $y = x \cdot |x|$ в точке: а) $x_0 = 0$; б) $x_0 = 1$?

5. Пусть $y = \sin x$, где $x = \cos t$. Вычислите $dy\big|_{t=\pi/2}$.

6. Сколько отличных от нуля слагаемых будет содержать шестая производная $f^6(x)$, найденная по правилу Ньютона-Лейбница, если $f(x) = x^4 \cdot e^{6x}$?

7. Пусть $y = x^{11} - 25x^9 + 12x^7 - \sqrt{11}$. Чему равна: а) $y^{(12)}(2)$; б) $y^{(11)}(1)$?

8. Выяснить, в каких точках и под каким углом пересекаются параболы $y = 8 - x^2$ и $y = x^2$?

9. В чем состоит геометрический смысл дифференциала функции?

10. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции, дифференцируемой на отрезке $[a;b]$?

1.4. Интегральное исчисление

1.4.1. Определение и свойства неопределённого интеграла

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной данной функции. При рассмотрении многих вопросов как математики, так и её приложений возникает обратная задача: для данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, чтобы $F'(x)=f(x)$. Восстановление функции по данной её производной является основной задачей интегрального исчисления.

1° Определение неопределённого интеграла.

Определение. Дифференцируемая на интервале X функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на *X,* если $F'(x)=f(x)$.

Теорема 1. (об общем виде первообразной)**.** Пусть функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на *X*. Функция $F_1(x)$ является также первообразной для $f(x)$**,** когда и только когда $F_1(x)=F(x)+C,\ C=const$.

Таким образом, для данной функции $f(x)$ её первообразная $F(x)$ определяется неоднозначно, а именно с точностью до постоянного слагаемого. Для того чтобы из семьи первообразных выделить определённую первообразную $F_0(x)$, достаточно задать точку $M(x_0;y_0)$, принадлежащую графику функции $y=F_0(x)$.

Определение. Если $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на интервале *X*, то совокупность $F(x)+C$ всех её первообразных называют ***неопределённым интегралом*** от функции f на *X* и обозначают $\int f(x)dx \overset{def}{=} F(x)+C$.

В этом обозначении знак $\int$ называется ***знаком интеграла***, $f(x)$ – ***подынтегральной функцией***, а $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***. Операцию нахождения неопределённого интеграла от данной функции называют ***интегрированием***. Она является обратной к операции дифференцирования. Подынтегральное выражение можно записывать несколькими способами: $f(x)dx=F'(x)dx=dF(x)$.

2° Свойства неопределённого интеграла

1. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$

2. $\int dF(x)=F(x)+C.$

3. $\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx,\ k=const,\ k\neq 0.$

4. $\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Из свойств **3.** и **4.** следует, что операция интегрирования обладает свойством линейности:

$$\int \left(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) \right) dx = \alpha \cdot \int f(x)dx + \beta \cdot \int g(x)dx,\ \alpha, \beta - const,\ |\alpha| + |\beta| \neq 0.$$

На основании таблицы производных получаем таблицу неопределённых интегралов.

Таблица неопределённых интегралов

1.	$\int 0dx = C,\ C = const;$	11.	$\int \operatorname{sh} xdx = \operatorname{ch} x + C;$
2.	$\int 1dx = x + C;$	12.	$\int \operatorname{ch} xdx = \operatorname{sh} x + C;$
3.	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1;$	13.	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$
4.	$\int \frac{dx}{x+a} = \ln\|x+a\| + C;$	14.	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0,\ a \neq 1;$	15.	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C;$
6.	$\int e^x dx = e^x + C;$	16.	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,\ a > 0;$
7.	$\int \sin xdx = -\cos x + C;$	17.	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C,\ a \neq 0;$
8.	$\int \cos xdx = \sin x + C;$	18.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C;$
9.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$	19.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2+a}\right\| + C,\ a \neq 0;$
10.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$	20.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,\ a > 0.$

1.4.2. Основные методы интегрирования

1° Замена переменной.

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования даёт возможность свести вычисление данного интеграла к табличному. Такой метод интегрирования называется ***методом замены переменной*** или ***методом подстановки***. Его использование основывается на следующей теореме.

Теорема 1. Если функция $f(t)$ имеет первообразную $F(t)$ на промежутке T, а функция $\varphi(x)$ является дифференцируемой на X, причём $\varphi(X)\subset T$, то

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx = F\left(\varphi(x)\right)+C. \qquad (1)$$

Формулу (1) называют ***формулой замены переменной*** в неопределённом интеграле. Для практического использования более удобной является следующая её запись: $\int f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)=\int f(t)dt\Big|_{t=\varphi(x)}$. При этом говорят, что используется ***метод поднесения под дифференциал.*** Таким образом, в таблице интегралов переменную интегрирования x можно рассматривать как функцию от другой переменной.

Пример 1.

$$\blacktriangleright\int \operatorname{tg} x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\left[\text{т.к. } d\cos x=-\sin x dx\right]=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=\left[\cos x=t\right]=-\int\frac{dt}{t}=$$

$$=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C. \blacktriangleleft$$

Этот пример является частным случаем более общей задачи: ***вычислить*** $\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx$. Так как $d\varphi(x)=\varphi'(x)dx$, то

$$\int\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}=\left[\varphi(x)=t\right]=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\varphi(x)|+C.$$

Например, $\int\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C,$

$$\int\frac{e^x dx}{e^x+1}=\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}=\ln\left|e^x+1\right|+C.$$

Пример 2.

$$\blacktriangleright\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x dx}{\sin^2 x}=\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x-1}=\left[\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C,$$

или $\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right)dx=\int\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}d\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C. \blacktriangleleft$

Пример 3.

$$\blacktriangleright\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int\frac{dx}{2\cos^2 x+\sin^2 x}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2+\operatorname{tg}^2 x}dx=\int\frac{d\operatorname{tg} x}{2+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}+C.\blacktriangleleft$$

Пример 4. (Здесь формула (1) применяется справа налево.)

$$\blacktriangleright \int \sqrt{1-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = \sin t, \\ dx = \cos t dt \end{bmatrix} = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \begin{bmatrix} t = \arcsin x, \\ \cos t = \sqrt{1-x^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C. \blacktriangleleft$$

2º. Метод интегрирования по частям.

Теорема 2. Если функции $u(x)$, $v(x)$ – дифференцируемые на интервале X, а функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на этом интервале, то функция $u(x)v'(x)$ также имеет на X первообразную, причём

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx\,. \tag{2}$$

Формулу (2) обычно используют в более простом виде

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{3}$$

Пример 5. Вычислить $\int x \ln x dx$.

$$\blacktriangleright \int x \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x,\ du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = xdx,\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Вычислить $\int \operatorname{arctg} x dx.$

$$\blacktriangleright \int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} x -$$

$$-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C. \blacktriangleleft$$

Иногда интегрирование по частям приходится использовать несколько раз.

Пример 7. Вычислить $\int x^2 \cos x dx$.

$$\blacktriangleright \int x^2 \cos x dx = \int x^2 d\sin x = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x + 2\int x d\cos x = x^2 \sin x +$$

$$+2\left(x\cos x - \int \cos x dx\right) = x^2 \sin x + 2\left(x\cos x - \sin x + C_1\right) = \left(x^2-2\right)\sin x + 2x\cos x + C. \blacktriangleleft$$

Иногда бывает полезно предварительно преобразовать подынтегральную функцию.

Пример 8. Вычислить $\int \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}dx$.

$$\blacktriangleright \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \int (1+x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (1+x) d\arcsin x = (1+x)\cdot \arcsin x - \int \arcsin x dx =$$

$$=(1+x)\cdot\arcsin x-\left(x\cdot\arcsin x-\int x d\arcsin x\right)=\arcsin x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C.◄$$

Вычисление интегралов от функций $e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx,\ \cos(\ln ax),\ \sin(\ln ax)$ сводится к линейному уравнению относительно исходного интеграла.

Пример 9. Вычислить $\int e^x\cos xdx$.

► $I=\int e^x\cos xdx=\int\cos xde^x=e^x\cos x+\int e^x\sin xdx=e^x\cos x+\int\sin xde^x=$

$=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos xdx.$

Пришли к уравнению $I=e^x\cos x+e^x\sin x-I,\ \Rightarrow\ I=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C.$ ◄

А как вычислять интеграл $\int e^{ax}\,\mathrm{sh}\, bxdx$?

1.4.3. Интегрирование рациональных функций

Пусть $P_m(x)/Q_n(x)$ – рациональная функция, где $P_m(x),\ Q_n(x)$ многочлены степеней m и n. Если $m\ge n$ (т.е. рациональная функция является неправильной), то $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=S_{m-n}(x)+\frac{R_l(x)}{Q_n(x)},\ l<n$, т.е. рациональную функцию можно представить как суммму многочлена и правильной рациональной функции. Многочлен $S_{m-n}(x)$ интегрируется как суммма степенных функций. Что касается правильной рациональной функции, то согласно теореме о разложении правильной рациональной функции на суммму простых дробей, нам достаточно научиться интегрировать простые дроби:

1) $\frac{A}{(x-a)^k},\ k\in\mathbb{N}$; **2)** $\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k},\ k\in\mathbb{N},\ p^2-4q<0$.

1а) $(k=1)$. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$.

1б) $(k>1)$. $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=\frac{A}{1-k}(x-a)^{1-k}+C$.

2) В интеграле $\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$ сделаем замену переменной

$t=\left(x^2+px+q\right)'=2x+p,\ x=\frac{t-p}{2},\ dx=\frac{1}{2}dt$. Имеем

$$\frac{1}{2}\int\frac{M\left(\frac{t-p}{2}\right)+N}{\left(\left(\frac{t-p}{2}\right)^2+p\left(\frac{t-p}{2}\right)+q\right)^k}dt=\frac{4^k}{4}\int\frac{M\left(t-p\right)+2N}{\left(t^2-\cancel{2pt}+p^2+\cancel{2pt}-2p^2+4q\right)^k}dt=$$

$$=4^{k-1}\int\frac{Mt-Mp+2N}{\left(t^2+4q-p^2\right)^k}dt=\left[\begin{array}{l}D=p^2-4q<0\\ \Rightarrow 4q-p^2\overset{def}{=}m^2\end{array}\right]=\underbrace{\frac{M}{4^{1-k}}\int\frac{tdt}{\left(t^2+m^2\right)^k}}_{A}-\underbrace{\frac{2N-Mp}{4^{1-k}}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}}_{B}.$$

A1) $(k=1)$ $\int\frac{tdt}{t^2+m^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+m^2\right)}{t^2+m^2}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+m^2\right)+C.$

A2) $(k>1)$ $\int\frac{tdt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{2}\int\left(t^2+m^2\right)^{-k}d\left(t^2+m^2\right)=\frac{1}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}+C.$

B1) $(k=1)$ $\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+C.$

B2) $(k>1)$ $I_k\overset{def}{=}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}$.

$$I_k=\frac{1}{m^2}\int\frac{\left(t^2+m^2\right)-t^2}{\left(t^2+m^2\right)^k}dt=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}. \qquad (1)$$

$$\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\left[\begin{array}{l}u=t,\quad dv=\frac{tdt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{2}\left(t^2+m^2\right)^{-k}d\left(t^2+m^2\right),\\ du=dt,\quad v=\frac{1}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\end{array}\right]= \qquad (2)$$

$$=\frac{t}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\int\frac{dt}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}=\frac{t}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}I_{k-1}.$$

Подставим (2) в (1) $I_k=\frac{1}{m^2}I_{k-1}-\frac{1}{m^2}\left(\frac{t}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}I_{k-1}\right).$

Откуда получаем

$$\boxed{I_k=\frac{t}{2(k-1)m^2\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2(k-1)m^2}I_{k-1}} \qquad (3)$$

рекуррентную формулу для вычисления интеграла I_k .

Пример 1. Вычислить $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

► Согласно формуле (3) имеем

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} \overset{(3)}{=} \begin{bmatrix} k=2 \\ m=1 \end{bmatrix} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C \text{ . ◄}$$

Пример 2. Вычислить $\int \frac{2x^3+x^2-4x-12}{(x+2)^2\left(x^2+4\right)}dx$.

► Методом неопределённых коэффициентов разложим подынтегральную функцию на суммму простых дробей

$\frac{2x^3+x^2-4x-12}{(x+2)^2\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+4}$. Способом домножения вычисляем константы B, M, N:

$$B = \frac{-16+4+8-12}{4+4} = -\frac{16}{8} = -2,$$

$$2iM + N = \frac{-16i-4-8i-12}{(2+2i)^2} = -\frac{16+24i}{4(-1+2i+1)} = 2i-3 \Rightarrow M=1,\ N=-3.$$

При $x=0$ имеем $-\frac{12}{16} = \frac{A}{2} + \frac{B}{4} + \frac{N}{4} \Rightarrow A=1$. Таким образом,

$$\int \frac{2x^3+x^2-4x-12}{\left(x^2+2\right)^2\left(x^2+4\right)}dx = \int\left(\frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{x-3}{x^2+4}\right)dx =$$

$$= \ln|x+2| + \frac{2}{x+2} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C \text{ . ◄}$$

Замечание. Если знаменатель Q правильной рациональной функции P/Q имеет кратные корни, то при вычислении интеграла пользуются методом Остроградского, согдасно которому интеграл ищут в виде

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx, \tag{4}$$

где Q_1 – многочлен, имеющий те же корни, что и многочлен Q, но кратности 1, а $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$. При этом функции $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ – правильные рациональные функции с неопределёнными в числителе коэффициентами.

Коэффициенты многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ вычисляются методом соответствующих коэффициентов из равенства, которое получается после дифференцирования обеих частей из (4).

Пример 3. Вычислить $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

► Согласно методу Остроградского запишем равенство $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \int \frac{cx+d}{x^2+1}dx$, после дифференцирования которого имеем

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{-ax^2-2bx+a+(cx+d)(x^2+1)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Из последнего равенства методом соответствующих коэффициентов получаем систему $x^3 : c=0,\quad x^2 : -a+d=0,\quad x : -2b+c=0,\quad x^0 : a+d=1,$ откуда $c=0,\ b=0,\ a=\frac{1}{2},\ d=\frac{1}{2}.$ Таким образом, $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx$.

Окончательно имеем $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$. ◄

1.4.4. Метод рационализации

Определение. Многочленом степени n от двух переменных u и v называется выражение:

$$P(u,v) \overset{def}{=} \sum_{i+j=0}^{n} a_{ij}u^i v^j = a_{00} + a_{10}u + a_{01}v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + \ldots + a_{0n}v^n,$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R},\ |a_{00}| + \ldots |a_{0n}| \neq 0,\quad n \in \mathbb{N}$$

Рациональной функцией двух переменных называется выражение $R(u,v) \overset{def}{=} \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, где $P,\ Q$ – многочлены.

Отметим при этом, что сложная функция $R\left(R_1(t), R_2(t)\right) \equiv R_3(t)$, где $R,\ R_1,\ R_2$ – рациональные функции, является также рациональной функцией.

1º. Интегрирование дробно-линейной иррациональности.

Будем рассматривать интегралы типа

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx,\ n \in \mathbb{N},\ \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R},\ \alpha\delta-\beta\gamma \neq 0, \text{ т.е. } \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Сделаем замену

$$t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} \Rightarrow t^n = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\ x = \frac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n},\ dx = \frac{n(\alpha\delta-\beta\gamma)t^{n-1}}{(\alpha-\gamma t^n)^2}dt.$$

Имеем $\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx=\int R\left(\dfrac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n},t\right)\cdot\dfrac{n(\alpha\delta-\beta\gamma)}{(\alpha-\gamma t^n)^2}t^{n-1}dt=\int R_1(t)dt.$

Пример 1. Вычислить $\int\dfrac{dx}{(x+1)^{4/3}+(x+1)^{3/2}}$.

► Сначала сделаем следующее преобразование подынтегральной функции:

$$\int\frac{dx}{(x+1)^{4/3}+(x+1)^{3/2}}=\int\frac{dx}{(x+1)\left((x+1)^{1/3}+(x+1)^{1/2}\right)}=\int\frac{dx}{(x+1)\left((\sqrt[6]{x+1})^2+(\sqrt[6]{x+1})^3\right)}.$$

После этого сделаем замену $t=\sqrt[6]{x+1},\ x=t^6-1,\ dx=6t^5dt$. Имеем $\int\dfrac{dx}{(x+1)^{4/3}+(x+1)^{3/2}}=\int\dfrac{6t^5dt}{t^8+t^9}=\int\dfrac{6dt}{t^3(1+t)}$. Подынтегральную функцию разложим на сумму простых дробей $\dfrac{1}{t^3(t+1)}=\dfrac{A}{t^3}+\dfrac{B}{t^2}+\dfrac{C}{t}+\dfrac{D}{t+1}$. Методом домножения вычисляем $A=1,\ D=-1$. Взяв частные значения $t=1$ и $t=2$, получаем $A+B+C+\dfrac{D}{2}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{A}{8}+\dfrac{B}{4}+\dfrac{C}{2}+\dfrac{D}{3}=\dfrac{1}{24}$. Откуда $B=-1,\ C=1.$ Имеем $6\int\dfrac{dt}{t^3(t+1)}=6\int\left(\dfrac{1}{t^3}-\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+1}\right)dt=6\left(-\dfrac{1}{2t^2}+\dfrac{1}{t}+\ln|t|-\ln|t+1|\right)+C$. Таким образом, $\int\dfrac{dx}{(x+1)^{4/3}+(x+1)^{3/2}}=-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x+1}}+\dfrac{6}{\sqrt[6]{x+1}}+\ln\dfrac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[6]{x+1}+1}+C$. ◄

2°. Интегрирование биномиального дифференциала.

При вычислении интеграла $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,\ m,n,p\in\mathbb{Q}$ имеют место три случая интегрируемости.

1) $p\in\mathbb{Z}$. Пусть при этом $m=\dfrac{m_1}{l},\ n=\dfrac{n_1}{l}$, где l – наименьшее общее кратное знаменателей чисел m и n. Подынтегральная функция является дробно-линейной иррциональностью $R\left(x,\sqrt[l]{x}\right)$. Подстановка $\boxed{t=\sqrt[l]{x}}$ рационализирует подынтегральную функцию.

2) $\dfrac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$. Сделаем замену $u=x^n,\ x=u^{\frac{1}{n}},\ dx=\dfrac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}du$ и получим $\dfrac{1}{n}\int u^{\frac{m+1}{n}-1}\left(a+bu\right)^p du$. Если $p=\dfrac{p_1}{s}$, то подынтегральная функция является дробно-линейной иррациональностью $R\left(u,\sqrt[s]{a+bu}\right)$, а поэтому подстановка

$t=\sqrt[s]{a+bu}$ рационализирует интеграл от последней функции. Таким образом, подстановка $\boxed{t=\sqrt[s]{a+bx^n}}$ рационализирует исходный интеграл. При этом сам интеграл имеет вид $\int x^m\left(\sqrt[s]{a+bx^n}\right)^{p_1}dx,\ s,p_1\in\mathbb{Z}.$

3) $\dfrac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$. После замены $u=x^n$ получаем интеграл $\dfrac{1}{n}\int u^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bu)^p\,du=\dfrac{1}{n}\int u^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\dfrac{a+bu}{u}\right)^p du$. Подынтегральная функция имеет вид $R\left(u,\sqrt[s]{\dfrac{a+bu}{u}}\right)$, где s – знаменатель рационального числа p. Таким образом, подстановка $\boxed{t=\sqrt[s]{\dfrac{a+bx^n}{x^n}}}$ рационализирует интеграл в этом случае.

Русский математик Чебышёв доказал, что в других случаях интеграл от биномиального дифференциала не вычисляется в элементарных функциях. Укажем ещё несколько интегралов, которые не вычисляются в элементарных функциях:

$\int e^{-x^2}dx$ – интеграл Пуассона; $\int \sin x^2dx,\ \int\cos x^2dx$ – интегралы Френеля;

$\int\dfrac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм; $\int\dfrac{\sin x}{x}dx,\ \int\dfrac{\cos x}{x}dx$ – интегралы Дирихле.

3°. Интегрирование рационально-тригонометрических функций.

Интегралы типа $\int R(\sin x,\cos x)dx$ всегда рационализируются универсальной подстановкой $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2},\ x\in(-\pi,\pi)$. Действительно,

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\left[t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int R_1(t)dt.$$

В некоторых частных случаях интегралы от рационально-тригонометрических функций вычисляются при помощи более удобных подстановок.

а) Если $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то интеграл рационализируется падстановкой $\cos x=t$.

б) Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\sin x = t$.

в) Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 2.

$$\blacktriangleright \int \frac{\sin x dx}{\sin x - 3\cos x} = \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\operatorname{tg} x - 3} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{t \cdot \dfrac{dt}{1+t^2}}{t-3} = \int \frac{dt}{t(t-3)(1+t^2)} = \otimes .$$

{Подынтегральную функцию разложим на сумму простых дробей с неопределёнными коэффициентами $\dfrac{1}{t(t-3)(t^2+1)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t-3} + \dfrac{Ct+D}{t^2+1}$ и методом домножения получим:

$A = -\dfrac{1}{3},\ B = \dfrac{1}{30},\ Ci + D = \dfrac{1}{i(i-3)} = \dfrac{3i-1}{10}, \Rightarrow C = \dfrac{3}{10},\ D = -\dfrac{1}{10}.$}

$$\otimes = -\frac{\ln|t|}{3} + \frac{\ln|t-3|}{30} + \frac{1}{10}\int \frac{3t+1}{t^2+1} dt = -\frac{\ln|t|}{3} + \frac{\ln|t-3|}{30} + \frac{3}{5}\ln(t^2+1) + \frac{\operatorname{arctg} t}{10} + C \Bigg|_{t=tgx} . \blacktriangleleft$$

Пример 3.

$\blacktriangleright$ Интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$ не попадает ни под один частный случай. Поэтому делаем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2},\ x \in (-\pi, \pi)$.

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5} = \left[t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \right] =$$

$$= 2\int \frac{dt}{6t + 4(1-t^2) + 5(1+t^2)} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int (t+3)^{-2} d(t+3) = -\frac{2}{t+3} + C =$$

$$= -\frac{2}{\operatorname{tg}(x/2) + 3} + C . \blacktriangleleft$$

4º. Интегрирование квадратичных иррациональностей.

Будем рассматривать интегралы типа

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

1) Если $D = b^2 - 4ac = 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)^2} = \sqrt{a}\,|x-\alpha|$, т.е. подынтегральная функция является рациональной функцией.

2) Если $D > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = |x-\beta|\sqrt{\dfrac{a(x-\alpha)}{x-\beta}}$, т.е.

подынтегральная функция является дробно-линейной иррациональностью.

3) Если же $D<0$, то $a>0, c>0$, ибо при $a<0, c<0$ не существует $\sqrt{ax^2+bx+c}$. При этом используют подстановки Эйлера: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x,\ a>0$, или $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c},\ c>0$.

Пример 4. Вычислить $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

►Выполним первую подстановку Эйлера $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$, причём выбираем знак "–", поскольку при этом $x+\sqrt{x^2+x+1}=t$. Далее имеем $\cancel{x^2}+x+1=t^2-2tx+\cancel{x^2}\ \Rightarrow\ x=\frac{t^2-1}{1+2t},\quad dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt.\qquad \int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=$

$$=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{1+2t}-\frac{1}{(1+2t)^2}\right)dt=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2(1+2t)}+C=$$

$$=2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+\frac{3}{2\left(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right)}+C.◄$$

Подстановки Эйлера часто приводят к сложным выкладкам. Во многих случаях квадратичные иррациональности можно проинтегрировать методом неопределённых коэффициентов. Например, интеграл $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, где $P_n(x)$ – многочлен, вычисляют методом неопределённых коэффициентов по формуле $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $(n-1)$ с неопределёнными коэффициентами, $\lambda\in\mathbb{R}$ – неизвестная константа. После дифференцирования этого равенства получаем:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+Q_{n-1}(x)\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Домножая обе части на $2\sqrt{ax^2+bx+c}$, приходим к равенству $2P_n(x)=2Q'_{n-1}(x)\left(ax^2+bx+c\right)+Q_{n-1}(x)\left(2ax+b\right)+2\lambda.$ Методом соответствующих коэффициентов найдём многочлен $Q_{n-1}(x)$ и число λ.

Пример 5. Вычислить $\int x^2\sqrt{x^2+4}dx$.

► Проведём вычисление интеграла методом неопределённых коэффициентов.

$\int x^2\sqrt{x^2+4}dx=\int \frac{x^2\left(x^2+4\right)}{\sqrt{x^2+4}}dx=\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$. После дифференцирования имеем

$$\frac{x^2(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}=\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\sqrt{x^2+4}+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Домножая обе части равенств на $\sqrt{x^2+4}$, имеем $x^4+4x^2=\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\left(x^2+4\right)+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda.$ Методом соответствующих коэффициентов приходим к системе:

$$\begin{cases} x^4: 3A+A=1,\ A=\dfrac{1}{4}, & x\ : 8B+D=0,\ D=0,\\ x^3: 2B+B=0,\ B=0, & x^0: 4C+\lambda=0,\ \lambda=-2.\\ x^2: 12A+C+C=4,\ C=\dfrac{1}{2}, & \end{cases}$$

Таким образом, $\int x^2\sqrt{x^2+4}dx=\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C.$ ◄

Иногда интеграл от квадратичной иррациональности удобно рационализировать с помощью тригонометрических подстановок:

1) $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ заменами $x=a\sin t,\ x=a\cos t$ сводится к интегралу от рационально-тригонометрической функции;

2) $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ рационализируют подстановками $x=a\operatorname{tg}t,\ x=a\operatorname{ctg}t$;

3) $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ – замены $x=\frac{a}{\sin t},\ x=\frac{a}{\cos t}$.

Можно также использовать гиперболические функции.

1.4.5. Условия существования определённого интеграла

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ (не делая предварительно предположений о её свойствах с точки зрения непрерывности и дифференцируемости в точках отрезка). Пусть $x_i,\ i=\overline{0;n}$ – совокупность точек этого отрезка таких, что $a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$. Множество этих точек назовём ***разбиением отрезка*** $[a;b]$ и обозначим $T\overset{def}{=}\left\{x_i\in[a,b],\ i=\overline{0;n}\right\}$.

Отрезки $\Delta_i\overset{def}{=}\left[x_{i-1};x_i\right],\ i=\overline{1;n}$ назовём ***отрезками разбиения*** T, или

частичными отрезками отрезка $[a;b]$.

Обозначим через $\Delta x_i \overset{def}{=} x_i - x_{i-1},\ i=\overline{1;n}$ длины отрезков Δ_i. Число $\lambda(T) = \max\limits_i \Delta x_i$ назовём ***мелкостью разбиения*** T. Множество точек $\xi \overset{def}{=} \left\{\xi_i : \xi_i \in \Delta_i,\ i=\overline{1;n}\right\}$ будем называть ***выборкой*** из отрезка $[a;b]$. Сумму $\sigma = \sigma(f;T;\xi) \overset{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ будем называть ***интегральной суммой*** для функции $f(x)$ при заданном разбиении T и фиксированой выборке ξ.

Определение. Число I называют ***определённым интегралом*** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx \overset{def}{=} I$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall T,\lambda(T)<\delta(\varepsilon);\ \forall\xi \mapsto \left|\sigma(f,T,\xi)-I\right|<\varepsilon. \qquad (1)$$

При этом также говорят, что ***существует предел*** I ***интегральных сумм*** при $\lambda(T)\to 0$, и этот предел не зависит ни от разбиения T, ни от выбоки ξ и пишут $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sigma = I$. Таким образом, $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sigma(f,T,\xi)$.

Если существует число I, удовлетворяющее условию (1), то функцию $f(x)$ называют ***интегрируемой по Риману*** на отрезке $[a;b]$ и при этом также говорят, что ***существует интеграл*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Таким образом, функция является интегрируемой на отрезке при условии существования предела интегральных сумм, когда мелкость разбиения отрезка стремится к нулю, и этот предел не зависит ни от разбиения, ни от выборки.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_a^b Cdx,\ C=const.$

► Поскольку $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} C\cdot\Delta x_i = C\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i = C\cdot(b-a)$, то $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sigma = C\cdot(b-a)$, а поэтому $\int\limits_a^b Cdx = C\cdot(b-a)$.◄

Пример 2. Вычислить по определению $\int\limits_0^1 xdx$.

► Разобъём отрезок $[0;1]$ на n равных (для удобства) частей. Имеем $\Delta x_i = \dfrac{1}{n},\ i=\overline{1;n}$, а поэтому $\lambda(T) = \dfrac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Выбирая ξ, возьмём правые концы отрезков Δ_i, т.е. $\xi_i = x_i = \dfrac{i}{n}$, $i = \overline{1;n}$. Вычислим интегральную сумму $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{i}{n} \cdot \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n^2}(1+2+...+n) = \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{n+1}{2n}$. Откуда $\int_0^1 x dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$. (Является ли значение этого предела значением соответствующего интеграла?)◄

Упражнение. Покажите, что при ином выборе ξ (если взять в качестве ξ_i левые концы отрезков Δ_i, или их середины) предел интегральных сумм будет тот же.

Теорема 1. (необходимое условие интегрируемости**).** Если функция $f(x)$ является интегрируемой на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Замечание. Ограниченность не является достаточным условием для интегрируемости функции. Например, функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x - \textit{рациональное} \\ 0, & x - \textit{иррациональное} \end{cases},$$

на отрезке $[0;1]$ ограничена, но неинтегрируемая, ибо при ξ_i рациональных $\sigma = 1$, а при ξ_i иррациональных $\sigma = 0$.

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a;b]$, и T – некоторое разбиение отрезка $[a;b]$**.** Если $m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(x)$, $M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x)$ (существуют ли?), то суммы $\underline{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$, $\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$ называются соответственно ***нижней*** и ***верхней суммами Дарбу*** для данного разбиения T.

Так как $m_i \le f(x) \le M_i \ \forall x \in \Delta_i$, то $\forall \xi_i \in \Delta_i \mapsto \ m_i \le f(\xi_i) \le M_i \Rightarrow$ $m_i \Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i$, а тем самым $\underline{S} \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \overline{S}$, т.е. $\underline{S} \le \sigma \le \overline{S}$.

Критерий интегрируемости. Для того чтобы функция $f(x)$, определённая и ограниченная на отрезке $[a;b]$, была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла условию $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ \forall T, \ \lambda(T) < \delta \mapsto 0 \le \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$, т.е. $\lim_{\lambda(T)\to 0} \left(\overline{S} - \underline{S}\right) = 0$.

Если обозначить $\omega_i = M_i - m_i$ так называемое ***колебание*** функции $f(x)$ на отрезке Δ_i, то разность

$\overline{S}-\underline{S}=\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(M_i - m_i\right) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i = \Omega\left(f,T\right)$ называют ***интегральным колебанием*** функции $f(x)$ на отрезке $\left[a;b\right]$. Таким образом, критерием интегрируемости является условие $\boxed{\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \Omega\left(f,T\right)=0}$.

Определённый интеграл имеет простой геометрический смысл. Пусть функция $f(x)$ является неотрицательной и непрерывной на отрезке $\left[a;b\right]$. Тогда интегральная сумма $\sigma\left(f,T,\xi\right)$ равняется площади “*ступенчатой фигуры*”.

Фигуру G, ограниченную отрезками прямых $x=a,\ x=b,\ y=0$ и графиком функции $y=f(x)$, т.е. $G=\left\{\left(x;y\right):\ a\le x\le b,\ 0\le y\le f\left(x\right)\right\}$, будем называть ***криволинейной трапецией***.

Очевидно, что при достаточно мелком разбиении отрезка $\left[a;b\right]$ “*ступенчатая фигура*” мало чем отличается от криволинейной трапеции, а поэтому, если функция $f(x)$ является интегрируемой на $\left[a;b\right]$, то $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ означает площадькриволинейной трапеции: $S\left(G\right)\overset{def}{=}\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$.

Теорема 2. (интегрируемость непрерывной функции). Непрерывная на отрезке функция является интегрируемой на этом отрезке.

Теорема 3. (интегрируемость кусочно-непрерывной функции). Если функция $f(x)$, определённая и ограниченная на отрезке, является непрерывной во всех точках этого отрезка кроме их конечного количества (т.е. является кусочно-непрерывной), то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 4. (интегрируемость монотонной функции). Если функция определена, ограничена и монотонна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 5. (интегрируемость композиции). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $\left[a;b\right]$ и $m=\inf\limits_{[a;b]} f\left(x\right),\ M=\sup\limits_{[a;b]} f\left(x\right)$, а функция φ непрерывна на $\left[m;M\right]$, то сложная функция $\varphi\left(f\left(x\right)\right)$ является интегрируемой на $\left[a;b\right]$.

1.4.6. Свойства определённого интеграла

1º. $\int\limits_a^a f(x)dx \overset{def}{=} 0$ – естественное расширение понятия интеграла на отрезок нулевой длины.

2º. $\int\limits_a^b f(x)dx \overset{def}{=} -\int\limits_b^a f(x)dx$ – здесь $\Delta x_i < 0$.

3º. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то для любых чисел α и β $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$ функция $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ также интегрируема на $[a;b]$, причём $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx + \beta\int\limits_a^b g(x)dx$.

Замечание. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке, то и функция $f(x)\cdot g(x)$ интегрируема на этом отрезке.

4º. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то она интегрируема на $[c;d] \subset [a;b]$.

5º. (аддитивность интеграла) Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то $\forall c \in (a;b) \mapsto \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Следствие. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то $\forall c_1, c_2, c_3 \in [a;b] \mapsto \int\limits_{c_1}^{c_2} + \int\limits_{c_2}^{c_3} = \int\limits_{c_1}^{c_3}$.

6º. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

Следствие. (монотонность интеграла). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ и $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.

Замечание. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a;b]$ и существует точка $x_0 \in [a;b]$: $f(x_0) > 0$, а функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$.

7º. (интегрируемость модуля) Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то функция $\left|f(x)\right|$ также интегрируема на $[a;b]$, причём $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right|dx$.

Замечание. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке с концами a и b (т.е. или $a<b$, или $a>b$), то выполняется неравенство $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b \left|f(x)\right|dx\right|$.

8º. Если функция $f(x)$ интегрируема и ограничена на $[a;b]$, т.е. $\exists L>0$: $\left|f(x)\right| \le L$ $\forall x \in [a;b]$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le L\cdot(b-a)$.

1.4.7. Интегральные теоремы о среднем значении

Теорема. (обобщённая теорема о среднем значении для интегрируемых функций)**.** Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются интегрируемыми на отрезке $[a;b]$, а функция $g(x)$ не меняет знака на $[a;b]$, то существует число μ, $\inf\limits_{[a;b]} f(x) \le \mu \le \sup\limits_{[a;b]} f(x)$ такое, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\cdot\int_a^b g(x)dx$.

Следствие 1. (теорема о среднем значении интегрируемой функции). Если функция $f(x)$ является интегрируемой на отрезке $[a;b]$, то существует число μ, $\inf\limits_{[a;b]} f(x) \le \mu \le \sup\limits_{[a;b]} f(x)$ такое, что $\int_a^b f(x)dx = \mu\cdot(b-a)$.

Замечание. Число $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется ***средним значением*** функции $f(x)$ на $[a;b]$.

Следствие 2. (теорема о среднем значении непрерывной функции)**.** Если функция $f(x)$ является непрерывной на отрезке $[a;b]$, то существует число $c\in[a;b]$ такое, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$.

Замечание. Мы доказали, что если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то $\exists c\in[a;b]$: $f(c)$ – среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

1.4.8. Интеграл с переменным верхним пределом

Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то $\forall x\in[a;b]$ существует интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)$, который называют ***интегралом с переменным верхним пределом***. Рассмотрим его свойства.

Теорема. (непрерывность интеграла с переменным верхним пределом)**.** Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то функция $F(x)$ является непрерывной на $[a;b]$.

Теорема Барроу. (дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом)**.** Если функция $f(x)$ является непрерывной на $[a;b]$, то функция $F(x)$ дифференцируема на $[a;b]$, причём $F'(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x)$.

Следствие. Если функция $f(x)$ является непрерывной на $[a,b]$, то на этом отрезке $f(x)$ имеет первообразную, которой является $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, поскольку $F'(x) = f(x)$.

1.4.9. Методы вычисления определённого интеграла

1$^{\mathrm{o}}$. Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема 1. (основная теорема интегрального исчисления). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $\Phi(x)$ – её первообразная на этом отрезке, то имеет место равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, которое называют формулой Ньютона-Лейбница. Зачем требуем непрерывность $f(x)$?

Замечание. Формулу Ньютона-Лейбница записывают также в виде $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b$.

Пример 1. Вычислить $I = \int\limits_0^2 |1-x|dx$**.**

► Используя свойство аддитивности интеграла, имеем

$$I = \int\limits_0^1 |1-x|dx + \int\limits_1^2 |1-x|dx = \int\limits_0^1 (1-x)dx + \int\limits_1^2 (x-1)dx = -\frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_0^1 + \frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_1^2 =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1.◄$$

Определённый интеграл можно использовать при вычислении некоторых пределов.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, $\alpha>0$.

► Обозначим $S_n=\dfrac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^\alpha\cdot\dfrac{1}{n}$. Выражение S_n можно рассматривать как интегральную сумму для функции $f(x)=x^\alpha$ на отрезке $[0;1]$ с разбиением $T=\left\{\dfrac{k}{n}:k=\overline{0;n}\right\}$ и выборкой $\xi=\left\{\dfrac{k}{n}:k=\overline{1;n}\right\}$. При этом $\Delta x_k=\dfrac{1}{n}$, $k=\overline{1;n}$, а поэтому $\lambda(T)=\dfrac{1}{n}\to 0$, при $n\to\infty$. Поскольку x^α – непрерывна на $[0;1]$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\int\limits_0^1 x^\alpha dx=\left.\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1=\dfrac{1}{\alpha+1}$. ◄

2º. Замена переменной.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ является непрерывной на интервале X, а функция $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемой на интервале T, причём $\varphi(T)\subset X$. Тогда $\forall\alpha,\beta\in T:\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$ верно равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,, \qquad (1)$$

Замечание. Формулу (1) записывают также в виде $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_{\varphi(t)=a}^{\varphi(t)=b} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ Если формулой (1) пользуются справа налево, то пишут $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$.

Пример 3. Вычислить $I=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}dx$.

► Выполняем замену

$$\left[x=\cos t,\ dx=-\sin t dt,\ x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}, x=1\Rightarrow t=0\right]\Rightarrow$$

$$I=-\int\limits_{\pi/2}^{0}\sqrt{1-\cos^2 t}\,\sin t dt=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t dt=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$ ◄

А можно ли выбрать пределы $x=0\Rightarrow t=\dfrac{3\pi}{2}, x=1\Rightarrow t=0$? Нет, т.к.

$\varphi(\mathrm{T})=\cos\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]=[-1,1]\not\subset[0,1]$. Но $x=0\Rightarrow t=\frac{3\pi}{2}, x=1\Rightarrow t=2\pi$ – возможно.

3°. Интегрирование по частям.

Теорема 3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ являются непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[a;b]$, то имеет место формула интегрирования по частям $\int_a^b u\cdot v'dx=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b v\cdot u'dx$.

Пример 4. Вычислить $\int_1^2 x\ln xdx$.

► Пользуясь формулой интегрирования по частям, имеем $\int_1^2 x\ln xdx=\int_1^2 \ln xd\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=2\ln 2-\frac{3}{4}$. ◄

4°. Интегрирование чётной, нечётной и периодической функций.

1) Пусть функция $f(x)$ является непрерывной на отрезке $[-a;a]$, $a>0$ и $f(-x)=-f(x)\ \forall x\in[-a;a]$, т.е. $f(x)$ – нечётная. Тогда

$$\int_{-a}^0 f(x)dx=\begin{bmatrix}x=-t,\ dx=-dt,\\ x=-a\Rightarrow t=a, x=0\Rightarrow t=0\end{bmatrix}=-\int_a^0 f(-t)dt=-\int_0^a f(t)dt=-\int_0^a f(x)dx.$$

Таким образом, $\boxed{\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=0}$.

2) Если ж $f(x)$ – чётная, т.е. $f(-x)=f(x)\ \forall x\in[-a;a]$, то

$$\int_{-a}^0 f(x)dx=\begin{bmatrix}x=-t,\ dx=-dt,\\ x=-a\Rightarrow t=a, x=0\Rightarrow t=0\end{bmatrix}=-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx.$$

Поэтому $\boxed{\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx}$.

3) Если $f(x)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ и периодической с периодом T, то для каждого значения $a\in\mathbb{R}$ выполняется равенство $\boxed{\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx}$.

Действительно, $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx$. В последнем интеграле сделаем замену

$$\int_T^{a+T} f(x)dx=\begin{bmatrix}x=t+T,\ dx=dt,\\ x=T\Rightarrow t=0, x=a+T\Rightarrow t=a\end{bmatrix}=\int_0^a f(t+T)dt=\int_0^a f(t)dt=-\int_a^0 f(t)dt.$$

Подставляя это значение интеграла в предыдущее выражение, получаем $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_a^0 f(x)dx + \int\limits_0^T f(x)dx - \int\limits_a^0 f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$.

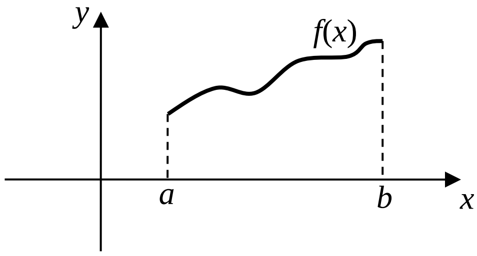
1.4.10. Приложения определённого интеграла

1°.Площадь плоской фигуры.

Произвольное ограниченное множество точек плоскости будем называть ***плоской фигурой***.

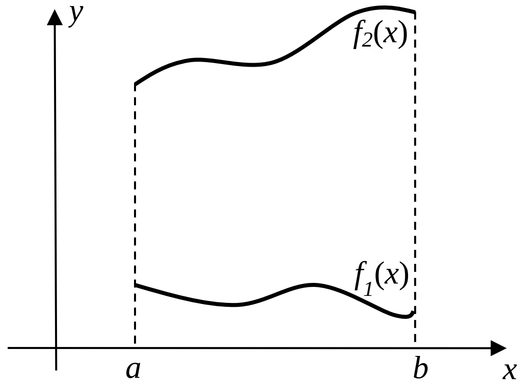
1.1) Площадь криволинейной трапеции.

Плоскую фигуру $G = \{(x;y): a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$ называют ***криволинейной трапецией***.



Её площадь, как мы получили ранее, равна $\boxed{S(G) = \int\limits_a^b f(x)dx}$.

Если плоская фигура D задаётся условием $D = \{(x;y): a \le x \le b,\ 0 \le f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$, то площадь этой фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций $G_2 = \{(x;y): a \le x \le b,\ 0 \le y \le f_2(x)\}$ и $G_1 = \{(x;y): a \le x \le b,\ 0 \le y \le f_1(x)\}$.



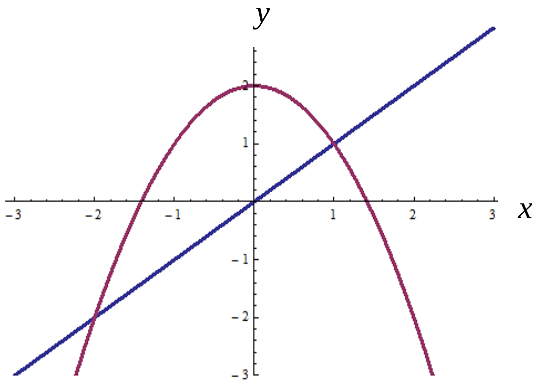
Поэтому $S(D) = S(G_2) - S(G_1) = \int\limits_a^b f_2(x)dx - \int\limits_a^b f_1(x)dx = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$. Таким образом, $\boxed{S(D) = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx}$.

Отметим, что эта формула остаётся верной и в том случае, если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не являются неотрицательными. Действительно, если $D_1 = \{(x;y): a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$, то из ограниченности $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (Почему?) следует существование такого числа $h > 0$, что

$g_1(x) \stackrel{def}{=} f_1(x)+h \ge 0,\ g_2(x) \stackrel{def}{=} f_2(x)+h \ge 0$. Поскольку $\int\limits_a^b \left(g_2(x)-g_1(x)\right)dx$ выражает площадь новой фигуры, полученной при помощи параллельного переноса фигуры D_1, то и площадь фигуры D_1 равна этому интегралу, причём

$$S\left(D_1\right)=\int\limits_a^b \left(g_2(x)-g_1(x)\right)dx=\int\limits_a^b \left(\left(f_2(x)+h\right)-\left(f_1(x)+h\right)\right)dx=\int\limits_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx .$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x$ и $y=2-x^2$.



► $2-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$,

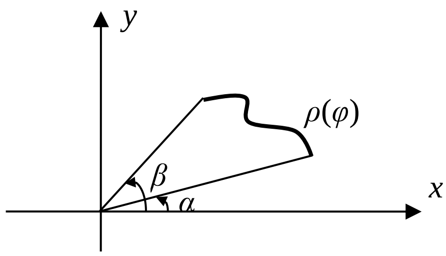
$2-x^2=x \Rightarrow x=-2,\ x=1$.

$$S=\int\limits_{-2}^{1}\left(\left(2-x^2\right)-x\right)dx=$$

$$=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$ ◄

1.2) Площадь криволинейного сектора. Пусть кривая задана в полярной системе координат $\Gamma: \rho=\rho(\varphi),\ \varphi\in[\alpha;\beta]$, где $\rho(\varphi)$ – непрерывная функция. Плоскую фигуру

$E=\left\{(\varphi;\rho): \alpha\le\varphi\le\beta,\ \rho\le\rho(\varphi)\right\}$ будем называть ***криволинейным сектором***.



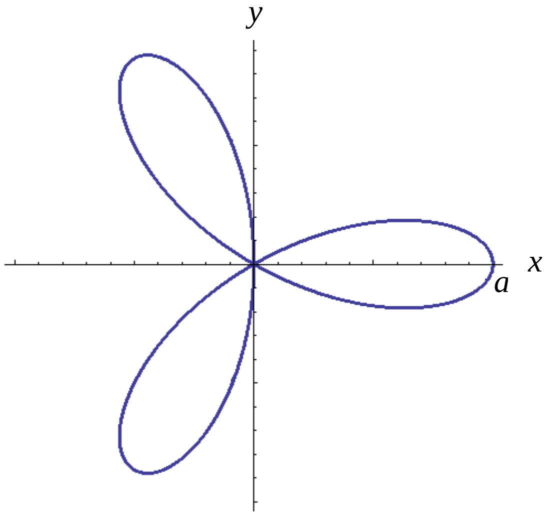
Пусть $T=\left\{\varphi_i : i=\overline{1;n}\right\}$ – некоторое разбиение отрезка $[\alpha;\beta]$ с мелкостью разбиения $\lambda(T)$, а ξ – некоторая выборка точек $\xi_i\in\left[\varphi_{i-1};\varphi_i\right],\ i=\overline{1;n}$. Поскольку площадь круговога сектора с радиусом R, содержащего центральный угол γ, равна $\dfrac{R^2\gamma}{2}$ [получается из пропорции $\begin{matrix}\pi R^2 \sim 2\pi \\ x \quad \sim \gamma\end{matrix}$], то площадь криволинейного сектора приближённо равна $S\left(E\right)\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\cdot\Delta\varphi_i$, где $\Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}$. Если $\lambda\left(T\right)\to 0$, то $S\left(E\right)=\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\cdot\Delta\varphi_i=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$.

Таким образом, $\boxed{S\left(E\right)=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi}$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = a\cos 3\varphi$.

▶ $S = 6S(E) = 6\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/6}\rho^2(\varphi)d\varphi = 3a^2\int\limits_0^{\pi/6}\cos^2 3\varphi d\varphi = \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/6}\left(1+\cos 6\varphi\right)d\varphi =$

$= \frac{3a^2}{2}\left(\varphi + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/6} = \frac{3a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi a^2}{4}$. ◀



1.3) Если верхняя граница криволинейной трапеции задана параметрически $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta$, причём $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$, (здесь важно $a < b$, это будет, когда $\varphi' > 0$, т.е. $\varphi(t)$ –возрастает), то для вычисления её площади в формуле $S\left(G\right) = \int\limits_a^b f(x)dx$ следует сделать замену переменной $x = \varphi(t)$. При этом $f(x) = y = \psi(t)$. Получаем $\boxed{S\left(G\right) = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt}$.

2°. Длина кривой.

2.1) Рассмотрим плоскую кривую $\Gamma = \left\{\left(x;y\right): y = f(x),\ x \in [a;b]\right\}$, где $f(x)$ – непрерывная на $[a;b]$ функция. Пусть $T = \left\{x_i, i = \overline{1,n}\right\}$ – произвольное разбиение отрезка $[a;b]$. Кривую Γ разобьём точками $M_i = \left(x_i; f(x_i)\right),\ i = \overline{0;n}$. Соединив соседние точки хордами, получим *вписанную* в кривую Γ ломаную, которую обозначим Γ_n.

Пусть l_i – длина хорды $M_{i-1}M_i$ этой ломаной, $\mu = \max\limits_i\left\{l_i\right\}$ – длина наибольшей из хорд, а $l\left(\Gamma_n\right) = \sum\limits_{i=1}^n l_i$ – длина ломаной Γ_n.

Определение. Число L называется ***длиной кривой*** Γ и обозначается

$l(\Gamma)=L$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall$ ломаной $\Gamma_n,\ \mu<\delta\mapsto\left|L-l(L_n)\right|<\varepsilon$. При этом говорят, что число L является ***пределом длин ломаных*** Γ_n, вписанных в кривую Γ при $\mu\to0$ и пишут $L=\lim\limits_{\mu\to0}l(\Gamma_n)$. Кривую, имеющую длину, называют ***спрямляемой.***

Допустим, что $f(x)$ имеет на $[a;b]$ непрерывную производную. Пусть $M_i(x_i;f(x_i))$ – точки разбиения кривой, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$. Тогда $l_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}$, $i=\overline{1;n}$, а

$$l(\Gamma_n)=\sum_{i=1}^{n}l_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Delta x_i^2+\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)^2}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{на основании формулы Лагранжа}\\ f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)\end{array}\right]=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\cdot\Delta x_i,\ \ \xi_i\in[x_{i-1};x_i].$$

Если $\mu\to0$, то $\lambda(\mathrm{T})\to0$, а поэтому

$$l(\Gamma)=\lim_{\mu\to0}l(\Gamma_n)=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx. \qquad (1)$$

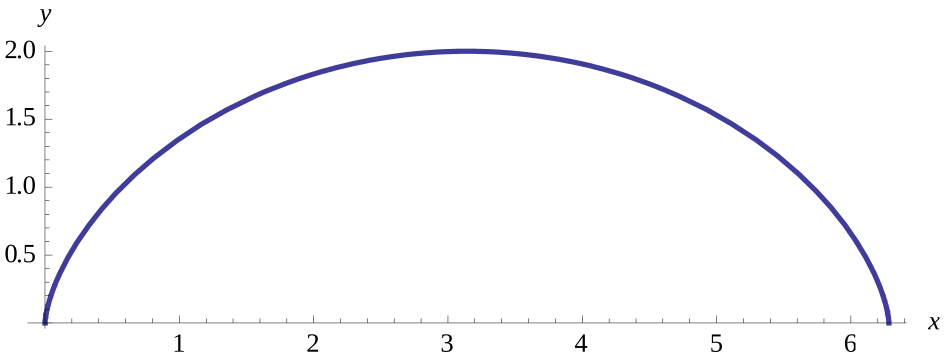
2.2) Пусть кривая Γ задана параметрически $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\le t\le\beta$, $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b,\ a<b$, причём $\varphi'(t),\ \psi'(t)$ – непрерывные на $[\alpha;\beta]$ и $\varphi'(t)\neq0$ (в каждой точке кривой Γ должна существовать производная), т.е. φ – монотонная. А поскольку $\varphi(\alpha)=a<b=\varphi(\beta)$, то φ – возрастающая, т.е. $\varphi'(t)>0\ \ \forall t\in[\alpha;\beta]$. Если в (1) сделать замену $x=\varphi(t)$, получим

$$l(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx=\left[x=\varphi(t)\right]=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\cdot\varphi'(t)dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}dt$$

$$l(\Gamma)=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}dt. \qquad (2)$$

Если $t\in[\alpha;\beta]$, то $l(t)=\int_\alpha^t\sqrt{\left(\varphi'(\tau)\right)^2+\left(\psi'(\tau)\right)^2}d\tau$, $dl=l'(t)dt=\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}dt,\ dl^2=\left(\varphi'(t)dt\right)^2+\left(\psi'(t)dt\right)^2$. Получили так называемую формулу дифференциала дуги $dl^2=dx^2+dy^2$.

Пример 3. Вычислить длину одной арки циклоиды (окружность радиуса a катится по оси абсцисс).



► Имеем уравнение циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in [0; 2\pi]$

$$l(\Gamma) = a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = \sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt = \sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a. ◄$$

2.3) Если кривая задана в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi \in [\alpha; \beta]$, где $\rho'(\varphi)$ – непрерывная, то, учитывая $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$, имеем параметрическое задание кривой $\Gamma: x = \rho(\varphi)\cos\varphi,\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi,\ \varphi \in [\alpha; \beta]$. Поскольку $x'(\varphi) = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi,\ y'(\varphi) = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi$, то $x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) = \rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)$. Из формулы (2) имеем

$$\boxed{l(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi.}$$

3º. Объём тела вращения.

3.1) Расмотрим ***тело, получаемое от вращения криволинейной трапеции*** $G = \{(x; y): a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$ ***вокруг оси*** Ox, если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$.

Пусть $T = \{x_i : i = \overline{0; n}\}$ – некоторое разбиение отрезка $[a; b]$ с мелкостью разбиения $\lambda(T)$. На каждом отрезке $\Delta_i = [x_{i-1}; x_i]$ выберем $\xi_i \in \Delta_i$ и построим прямоугольник $\Pi_i = \{(x; y): x_{i-1} \le x \le x_i, 0 \le y \le f(\xi_i),\ i = \overline{1; n}\}$.

Каждый из прямоугольников $\Pi_i,\ i = \overline{1; n}$ при вращении вокруг оси Ox образует цилиндр, объём которого $v_i = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Тогда объём v тела, полученного при вращении трапеции G вокруг оси Ox, приблизительно равен $v \approx \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$. Эту сумму можно рассматривать как интегральную сумму для функции $\pi f^2(x)$ с разбиением $T = \{x_i : i = \overline{1; n}\}$ и выборкой

$\xi = \left\{ \xi_i : i = \overline{1;n} \right\}$. Поскольку $f^2(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то предел интегральной суммы существует и $\boxed{v = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx}$.

3.2) Рассмотрим далее ***тело, которое получается вращением криволинейной трапеции*** $G_1 = \left\{ (x;y) : 0 \le a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x) \right\}$ ***вокруг оси*** Oy. Точку ξ_i выберем посредине отрезка Δ_i, т.е. $\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$. Элементарный объём рассмотрим как разность объёмов цилиндров

$$v_i = \pi x_i^2 y(\xi_i) - \pi x_{i-1}^2 y(\xi_i) = 2\pi \frac{x_i + x_{i-1}}{2} y(\xi_i)\left(x_i - x_{i-1}\right) = 2\pi\xi_i y(\xi_i)\left(x_i - x_{i-1}\right).$$

Поскольку $v \approx \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$, то при $\lambda(T) \to 0$ имеем $\boxed{v = 2\pi\int\limits_a^b xy(x)dx}$.

Замечание. Если проекцией тела V на ось Ox является отрезок $[a;b]$ и $\forall\, x_0 \in [a;b]$ фигура, которая получается при пересечении тела V плоскостью $x = x_0$, имеет площадь $S(x_0)$, то объём тела вычисляется по формуле $\boxed{v = \int\limits_a^b S(x)dx}$.

Пример 4. Вычислить объём тора, т.е. тела, которое получается при вращении круга радиуса a вокруг оси, лежащей в плоскости этого круга на расстоянии $b\ (b \ge a)$ от его центра.

► Поскольку уравнение окружности $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, то $y = y_1(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = y_2(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}$. Имеем

$$v = \pi\int\limits_{-a}^{a} y_1^2(x)dx - \pi\int\limits_{-a}^{a} y_2^2(x)dx = \pi\int\limits_{-a}^{a}\left(\left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2\right)dx =$$

$$= 4\pi b\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 8\pi b\int\limits_{0}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Последний интеграл равен площади четверти круга с радиусом a. Поэтому $v = 2\pi^2 a^2 b$.◄

Вопросы

1. Сформулировать необходимое условие интегрируемости.

2. Дать определение первообразной для функции $f(x)$ на $[a,b]$.

3. Сформулировать свойства определенного интеграла.

4. Может ли быть интегрируемой на отрезке функция, имеющая бесконечное число точек разрыва?

5. Сформулировать обобщенную теорему о среднем для определенного интеграла.

6. Для функции $f(x)=x^3$ найти нижнюю $\underline{S}$ s и верхнюю $\overline{S}$ суммы Дарбу на отрезке $[-2;3]$, разделив его на n равных частей.

7. Может ли интеграл $\int x\sqrt{2+x^3}dx$ быть выражен в элементарных функциях?

8. Найти $\int\limits_{-1,5}^{4} \operatorname{sgn}(\ln(2+x))dx$.

9. Найти $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_{-1}^{1} \sin x^2 dx\right)$.

10. Сформулировать теорему Барроу.

11. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^x \sin^3(\sqrt{t})dt}{x^2}$.

1.5. Несобственные интегралы

1.5.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами (НИ 1)

Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a;+\infty)$ и интегрируема в $[a;A)$, $\forall A>a$.

Определение. Конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ называют **несобственным интегралом** функции $f(x)$ в промежутке $[a;+\infty)$ (несобственным интегралом первого рода) и обозначаю:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx. \qquad (1)$$

Если предел конечный, то говорят, что интеграл **сходится**; если бесконечный или не существует, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – расходится.

Аналогично определяются:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=\lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx, \qquad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int_A^B f(x)dx. \qquad (3)$$

Пример 1.

► $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to+\infty} arctgA=\frac{\pi}{2}$. ◄

Пример 2.

► $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin xdx=\lim\limits_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int_A^B\sin xdx=\lim\limits_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}(\cos A-\cos B)$. Так как последний предел не существует, то интеграл расходится. ◄

Главное значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле Коши

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx.$$

В примере 2 $\int_{-\infty}^{\infty}\sin xdx$ – расходится, но

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\sin xdx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\sin xdx=\lim_{A\to+\infty}(\cos(-A)-\cos A)=0$$

Пример 3.

► $$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{dx}{x^p}=\lim_{A\to+\infty}\left[\begin{array}{l}\ln|x|\Big|_a^A,\ p=1,\\ \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^A,\ p\neq 1.\end{array}\right.$$

Очевидно, что интеграл сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$. ◄

Применение основной формулы интегрального исчисления

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $[a;+\infty)$ так, что в этом промежутке существует первообразная $F(x)$ и $\int_a^A f(x)dx = F(x)\Big|_a^A$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)=F(+\infty)$, то интеграл (1) (см. §5.1) сходится и тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty}$.

Аналогично поступают и с интегралами (2) и (3).

Пример 4.

► $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cdot\sin bxdx = -\dfrac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}\cdot e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{b}{a^2+b^2}$. ◄

1.5.2. Свойства несобственных интегралов

1°. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то сходится и $\int_A^{+\infty} f(x)dx\ \ \forall A>a$ и наоборот.

2°. В случае сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

$$\lim_{A\to+\infty}\int_A^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

3°. Линейность. Если сходятся интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, то $\forall a,\beta\in\mathbb{R}$ сходится интеграл $\int_a^{+\infty}\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx = \alpha\int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Критерий Коши сходимости несобственных интегралов

Теорема 1. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon),\delta>a:\ \forall A_1,A_2>\delta\Rightarrow\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

Этот критерий позволяет установить следующее свойство:

4°. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Достаточные условия сходимости интегралов от неотрицательных функций

Теорема 2. (признак сходимости). Пусть $0\le f(x)\le g(x),\ \forall x\ge a$. Тогда из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Теорема 3. (признак сходимости в предельной форме). Пусть $f(x)>0,\ g(x)>0,\ \forall x>a$, и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k,\ 0<k<+\infty$. Тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся либо расходятся одновременно (при $k=1,\ f(x)\sim g(x),\ x\to+\infty$).

Замечание. В качестве функции сравнения $g(x)$ часто выбирают $g(x)=\dfrac{c}{x^p},\ c=const$. Если $p>1$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится ($a>0$), при $p\le 1$ – расходится.

Пример.

► $\int_1^{+\infty}\dfrac{x^2+3}{\left(x^3+1\right)\sqrt[3]{x^5+4}}dx$. При $x\to+\infty$ имеем: $\dfrac{x^2+3}{\left(x^3+1\right)\sqrt[3]{x^5+4}}\sim\dfrac{1}{x\cdot x^{5/3}}=\dfrac{1}{x^{8/3}}$.

Так как $p=\dfrac{8}{3}>1$, то интеграл сходится. ◄

1.5.3. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Определение. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$. Если же интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ расходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то его называют **условно сходящимся**.

В следствии к критерию Коши показано, что если сходится интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$, то и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится. Обратное утверждать нельзя.

Если функция $y=f(x)$ на $[a;+\infty)$ меняет знак, то к ней признаки сравнения не применимы. С помощью этих признаков можно лишь исследовать на абсолютную сходимость интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Пример 1.

► $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2+1}dx$. Имеем $\dfrac{|\cos x|}{x^2+1}\le\dfrac{1}{x^2+1}$. Интеграл $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}dx$ сходится. Следовательно, $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2+1}dx$ сходится абсолютно. ◄

Признак Дирихле

Будем рассматривать интегралы вида $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx$.

Теорема. (признак Дирихле). Пусть функция $f(x)$ при $x \geq a$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную: $|F(x)| = \left|\int_a^x f(t)dt\right| \leq C$; функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема и, монотонно убывая, стремится к нулю при $x \to +\infty$. Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx$ сходится.

Пример 2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

► **1)** $f(x) = \sin x$; $|F(x)| = \left|\int_1^x \sin t dt\right| = |\cos 1 - \cos x| \leq 2$.

2) $\frac{1}{x}$ – дифференцируема и монотонно убывает при $x \geq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Покажем, что нет абсолютной сходимости.

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} \geq \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

Покажем, что $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ расходится. Предположим противное, и он сходится. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}dx$ также как и исходный интеграл, сходится по признаку Дирихле. Из равенства $\frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x}$ следовало бы, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}dx$ сходится. Но это не так. Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ сходится только условно. ◄

1.5.4. Несобственные интегралы от неограниченных функций (НИ 2)

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[a,b)$ и интегрируема на любой его части $[a,b-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < b-a$. Вблизи точки b функция неограничена.

Определение. Если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то его называют несобственным интегралом второго рода (НИ 2) функции $y = f(x)$ на промежутке $[a,b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (1)$$

Если предел конечен, то НИ 2 (1) сходится. Точку b при этом называют **особой.** Аналогично определяется НИ 2 в случае, если точка a особая:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если же особой точкой является внутренняя точка c отрезка $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\left(\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx\right).$$

При этом главное значение в смысле Коши

$$v.p.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

Пример 1. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

► Особой точкой на отрезке $[0,1]$ является точка $x=1$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}. \ ◄$$

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a,b)$ и b – особая точка. Функция имеет первообразную на любой части $[a,b-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<b-a$: $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = F(b-\varepsilon)-F(a)$.

Очевидно, если существует конечный предел $\lim_{\varepsilon\to+0}F(b-\varepsilon)=F(b)$, то НИ 2 сходится и $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Эта основная формула интегрального исчисления имеет место и в том случае, если особая точка – внутри промежутка, или особых точек несколько, но при условии, что первообразная $F(x)$ **непрерывна** в этих точках**.**

Пример 2. Исследовать сходимость интеграла $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} -\ln|b-x|, p=1; \\ -\dfrac{(b-x)^{1-p}}{1-p}, p\neq 1. \end{cases}$.

► Интеграл, очевидно, сходится при $p<1$ и расходится при $p\geq 1$. ◄

Пример 3. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \begin{cases} \ln|x-a|, p=1; \\ \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}, p \neq 1. \end{cases}$

► Интеграл, очевидно, сходится при $p<1$ и расходится при $p \geq 1$. ◄

Несобственные интегралы второго рода заменой можно свести к несобственным интегралам первого рода. Например, если особой точкой является точка b, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x = b - \frac{1}{t} \\ dx = \frac{dt}{t^2} \end{bmatrix} = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}.$$

Поэтому все утверждения для НИ 1 можно перефразировать для НИ 2.

Если на промежутке интегрирования имеется несколько особенностей (бесконечные пределы интегрирования или конечные особые точки), то промежуток интегрирования разбивают на части так, чтобы в каждой части была только одна особенность. Для сходимости всего интеграла необходимо, чтобы сходились интегралы по каждой такой части промежутка.

Пример 4. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^5}(x^2+1)}dx$.

► Данный интеграл имеет две особенности: точку $x=0$ и бесконечный предел интегрирования. Поэтому промежуток интегрирования следует разбить на две части: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^5}(x^2+1)}dx = \int\limits_0^{1} \frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^5}(x^2+1)}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^5}(x^2+1)}dx$ и исследовать сходимость двух полученных несобственных интегралов. Используем в обоих случаях признак сравнения.

а) при $x \to 0$ $\quad arctgx \sim x, \quad \frac{arctgx}{x^{\frac{5}{3}}(x^2+1)} \sim \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$. Так как $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p<1$, а у нас $p = \frac{2}{3} < 1$, то первый из двух интегралов сходится;

б) при $x \to +\infty \quad \frac{arctgx}{x^{\frac{5}{3}}(x^2+1)} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{\frac{11}{3}}}$. А так как $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p>1$, а у нас $p = \frac{11}{3} > 1$, то и второй интеграл сходится по признаку сравнения. ◄

1.5.5. Вычисление и преобразование несобственных интегралов

1°. Интегрирование по частям.

Будем рассматривать интегралы вида $\int\limits_a^b u(x)v(x)dx$. Пусть функции $u=u(x), v=v(x)$ определены и непрерывны вместе со своими производными во всех точках промежутка $[a,b]$, исключая точку b (которая может быть равна и $+\infty$). Тогда имеет место равенство $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$, если под $uv\Big|_a^b$ понимать следующую разность $\lim\limits_{x\to b} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.

Пример 1.

► $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = x\cdot \ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx$.

Последний интеграл уже является собственным, т.к. $\exists\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$, а значит подынтегральное выражение $x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$ ограничено в окрестности точки *x=0.* ◄

2°. Замена переменных в НИ.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ определена и непрерывна в конечном или бесконечном промежутке $[a,b)$, причем точка b (которая может быть и бесконечной), по предположению, единственная особая точка для функции $f(x)$. Пусть функция $x=\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая и монотонная на промежутке $[\alpha,\beta)$, причем β может быть и $+\infty$. Пусть $\varphi(\alpha)=a,\ \lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=b.$ Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$.

После замены переменной полученный интеграл может быть как несобственным, так и собственным.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin(1/x)}{x^2(e^{1/x}-1)}dx = \begin{bmatrix} t=\dfrac{1}{x} \\ \\ dx=-\dfrac{dt}{t^2}\end{bmatrix} = -\int\limits_1^0\frac{\sin t}{(e^t-1)}dt = \int\limits_0^1\frac{\sin t}{(e^t-1)}dt.$$

► Воспользуемся признаком сравнения и исследуем поведение функции в окрестности единственной особой точки $t=0$. При $t\to 0$ функция $\dfrac{\sin t}{e^t-1}\sim\dfrac{t}{t}=1.$ Полученный при замене переменной интеграл является собственным, т.е. исходный интеграл сходится. ◄

Вопросы

1. Что означает для НИ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ сходимость в смысле главного значения?

2. Найти $v.p.\int\limits_{0}^{10}\frac{dx}{7-x}$.

3. Сформулировать свойства НИ.

4. Сформулировать критерий Коши сходимости НИ $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$.

5. Найти при каких значениях α и β сходится интеграл: а) $\int\limits_{0}^{1} x^{\alpha}\ln^{\beta}\frac{1}{x}dx$, б) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}\ln^{\beta}x}$.

6. Пусть интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходится. Следует ли отсюда, что $f(x)\to 0$ при $x\to\infty$?

7. Исследовать интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)dx$ на абсолютную и условную сходимость.

8. Сформулировать признак Дирихле сходимости НИ.

9. Вычислить интеграл или установить его расходимость: $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx,\ где\ f(x)=\begin{cases}1/x, x<0;\\ 1/\sqrt{x}, x>0.\end{cases}$

1.6. Формула Тейлора. Исследование функций

1.6.1. Формула Тейлора и её приложения к решению задач

Пусть функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки $x = x_0$ имеет производные до n-го порядка включительно. Многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (1)$$

называется многочленом Тейлора порядка n для функции $f(x)$ в точке x_0 и обладает следующим свойством: $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, \ldots, n$

Следующую формулу

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \qquad (2)$$

называют формулой Тейлора для функции $f(x)$ с центром в точке x_0, а $R_n(x)$ – n-м остатком, или n-м остаточным членом формулы Тейлора. В частном случае, при $x_0 = 0$ формулу (2) называют формулой Маклорена. В этом случае она принимает вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + R_n(x). \qquad (3)$$

Для тех значений x, для которых величина $R_n(x)$ достаточно мала, формула Тейлора позволяет заменить функцию на некотором интервале ее многочленом Тейлора. Вносимая при этом погрешность определяется путём оценки остаточного члена.

При указанных выше условиях, налагаемых на функцию $f(x)$, остаточный член формулы Тейлора может быть представлен в виде:

$$R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right). \qquad (4)$$

В этом случае его называют остаточным членом в форме Пеано. Такое выражение $R_n(x)$ главным образом используют при выделении главной части функции в окрестности точки x_0.

Пример 1. Разложить по формуле Маклорена (3) до $o(x^n)$ функцию $f(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{8})$.

► Заметим, что $\left(\cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right)\right)^{(k)}\Bigg|_{x=0} = 3^k \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k\right)$. Тогда искомое разложение имеет вид $\cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)}{k!}x^k+o\left(x^n\right)$. ◄

Теорема. Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и при $x\to x_0$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right), \tag{5}$$

тогда $a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Таким образом, единственным многочленом, допускающим представление функции по формуле (5), является её многочлен Тейлора. Этот факт часто используется на практике: если удалось получить представление функции в виде (5) каким-то другим путём, без вычисления производных, то, как утверждает теорема, это и есть разложение функции по формуле Тейлора.

Пример 2. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функцию $f(x)=\frac{1}{8x-4}$.

► Воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии: $1+t+t^2+\ldots+t^n=\frac{1-t^{n+1}}{1-t}$. Откуда получаем: $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\ldots+t^n+\frac{t^{n+1}}{1-t}$. При $|t|<1$ выражение $\frac{t^{n+1}}{1-t}=o(t^n)$. Приведем функцию к виду $\frac{1}{8x-4}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-2x}$. Полагая в окрестности $|x|<\frac{1}{2}$ точки $x=0$ $t=2x$, получим: $\frac{1}{8x-4}=-\sum_{k=0}^{n}2^{k-2}x^k+o\left(x^n\right)$. ◄

Потребуем существование в окрестности точки x_0 всех производных до $(n+1)$-го порядка включительно. В этом случае остаточный член может быть представлен в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{6}$$

где $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$. Это выражение напоминает очередное, $(n+1)$-ое слагаемое в формуле Тейлора (2), с той лишь разницей, что производная $(n+1)$-го порядка вычисляется не в точке x_0, а в некоторой точке из её окрестности. Такое представление остаточного члена удобно использовать при вычислении погрешности, получаемой в результате замены функции её многочленом Тейлора на некотором интервале.

Замечание. Известно, что производная нечётной функции есть функция чётная, а производная чётной функции – нечётная. А так как любая непрерывная нечетная функция при $x=0$ обращается в нуль, то у нечётной функции $f^{(2k)}(0)=0$, а у чётной $f^{(2k+1)}(0)=0$, $k\in\mathbb{N}$. Следовательно, формула Маклорена для нечётной функции имеет вид:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+2}), \tag{7}$$

а для чётной функции:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1}). \tag{8}$$

Замечание. Пусть функция $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $x=0$. В формуле Маклорена для $f(x)$ возьмём $k=\overline{0,n+1}$. Тогда $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{k}+o(x^{n+1})$. Соответствующее разложение для $f'(x)$:

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k x^{k}+o(x^{n}), \tag{9}$$

где $c_k=\dfrac{f^{(k+1)}(0)}{k!}$. Покажем, что, зная коэффициенты разложения (9), можно построить разложение $f(x)$:

$$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{k}+o(x^{n+1})=f(0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(0)x^{k+1}}{(k+1)k!}+o(x^{n+1})=$$
$$=f(0)+\sum_{k=0}^{n}c_k\frac{x^{k+1}}{k+1}+o(x^{n+1}) \tag{10}$$

Формулы Маклорена для основных элементарных функций

I. $$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$$

II. $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})$$

III. $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})$$

IV. $$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})$$

V. $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$

VI. $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

VII. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$

Разложение функций по формуле Тейлора

Пример 3. Разложить $y = \operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до $o(x^5)$.

► Для решения задачи используем *метод неопределённых коэффициентов*. Так как $\operatorname{tg} x$ – нечётная функция, то в её разложении не будет чётных степеней x: $\operatorname{tg} x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)$. Коэффициенты a, b, c ищем из равенства: $\sin x = (ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6))\cos x$. Далее используем разложения II и III:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^6\right) = \left(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях x в левой и правой частях уравнения, находим $a = 1$; $b = \frac{1}{3}$; $c = \frac{2}{15}$. Итак, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$. ◄

Пример 4. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ следующие функции: а) $f(x) = \ln\frac{5+3x}{4-2x}$, б) $f(x) = e^{2x}\operatorname{sh} 3x$.

а) ► При $|x| < \frac{5}{3}$: $\ln\frac{5+3x}{4-2x} = \ln\frac{5}{4} + \ln\left(1 + \frac{3}{5}x\right) - \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$. Используем разложение VII: $\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{k} + o\left(t^n\right)$. При $t = \frac{3x}{5}$ и $t = -\frac{x}{2}$:

$$\ln\left(\frac{5+3x}{4-2x}\right) = \ln\frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{3^k x^k}{5^k k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{2^k k} + o\left(x^n\right) = \ln\frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\left(\frac{(-1)^{k-1}3^k}{5^k} + \frac{1}{2^k}\right) +$$
$$+ o\left(x^n\right). ◄$$

б) ►Здесь проще привести функцию к виду $e^{2x}\operatorname{sh} 3x = \frac{e^{5x} - e^{-x}}{2}$.

Используем разложение I: $e^t=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}+o\left(t^n\right)$. Тогда $e^{2x}\operatorname{sh}3x=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(5^k+(-1)^{k+1}\right)\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right)$. ◄

Пример 5. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ следующие функции: а) $y=\operatorname{arctg}x$; б) $y=\arccos x$.

При решении задачи будем использовать разложения производных данных функций и формулу (10).

а) ► $(\operatorname{arctg}x)'=(1+x^2)^{-1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+o(x^{2n+1})$. Откуда согласно (10) $\operatorname{arc\,tg}x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2k+2})$ ◄

б) ► $\left(\arccos x\right)'=-\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=-1-\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$. По формуле (10) $\arccos x=\frac{\pi}{2}-x-\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)}x^{2k+1}+o(x^{2n+2})$. ◄

Приближённые вычисления с помощью формулы Тейлора

Пример 6. Вычислить приближенно $\cos 12°$:

► Пользуясь разложением III, получаем:

$$\cos 12°=\cos\frac{\pi}{15}=1-\frac{\pi^2}{15^2\cdot 2}+\frac{\pi^4}{15^4\cdot 4!}+R_5(\pi/15)\approx 1-\frac{\pi^2}{450}+\frac{\pi^4}{50625\cdot 24}\approx 0{,}978148.$$

При этом точность полученного приближения:

$$\left|R_5\left(\frac{\pi}{15}\right)\right|=\frac{|\cos^{(6)}(c)|}{6!}\frac{\pi^6}{15^6}\le\frac{\pi^6}{6!\cdot 15^6}\approx 10^{-6}.$$ ◄

Пример 7. Вычислить $\sqrt{10}$ с точностью до 10^{-5}.

► Разложим функцию $\sqrt{x}$ по формуле Тейлора в окрестности $x=9$:

$$\sqrt{x}=3+\frac{1}{2\cdot 3}(x-9)-\frac{1}{4\cdot 2\cdot 3^3}(x-9)^2+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!3^{2n-1}}(x-9)^n+R_n(x),\ n=2,3,\ldots$$

где $R_n(x)=\frac{(-1)^n(2n-1)!!(x-9)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!\left(9+\theta(x-9)\right)^{n+\frac{1}{2}}}$, $0<\theta<1$. При $x=10$:

$$\sqrt{10}=3+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 2\cdot 3^3}+\ldots\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!3^{2n-1}}+R_n(10)$$

Для обеспечения заданной точности приближённого вычисления $\sqrt{10}$

оценим остаточный член (6): $|R_n(10)|=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!(9+\theta)^{n+1/2}}<10^{-5}$. Неравенство справедливо при $n\geq 4$. Следовательно:

$$\sqrt{10}=3+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2^2\cdot 2\cdot 3^3}+\frac{3!!}{2^3\cdot 3!\cdot 3^5}-\frac{5!!}{2^4\cdot 4!\cdot 3^7}\approx 3{,}16228.$$ ◄

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Пусть требуется найти $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to x_0$. Для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ используют метод выделения главной части функции при $x\to x_0$. С этой целью, если возможно, применяют разложения функций $f(x)$ и $g(x)$ по формуле Тейлора (2) в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Пеано (4). При этом в разложениях можно ограничиться лишь первыми членами, отличными от нуля: $f(x)=a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^k)$, $g(x)=b_m(x-x_0)^m+o((x-x_0)^m)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\frac{a_k}{b_m}, & k=m\\ 0, & k>m\\ \infty, & \text{k<m}\end{cases}$.

Неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, а также 0^0, ∞^0, 1^∞ после несложных преобразований приводятся к виду $\frac{0}{0}$.

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-2x}-\cos 2x}{\ln(1-x)}$.

► Функции, стоящие в числителе и знаменателе дроби, являются бесконечно малыми при $x\to 0$. Выделим главные части этих функций в окрестности точки $x=0$. Так как $(1+t)^\alpha=1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2+o(t^3)$, то при $t=-2x$ и $\alpha=\frac{1}{3}$ имеем: $\sqrt[3]{1-2x}=1-\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}x^2+o(x^2)$. Далее

$$\sqrt[3]{1-2x}-\cos 2x=1-\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}x^2+o(x^2)-1-\frac{4x^2}{2}+o(x^2)=-\frac{2}{3}x+o(x),$$

$$\ln(1-x)=-x+o(x).$$

Очевидно, определяющую роль в разложениях играют члены первого порядка относительно x. Искомый предел равен $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{2}{3}x+o(x)}{-x+o(x)}=\dfrac{2}{3}$. ◄

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-\sqrt[3]{1+3\sin x}}{x^2\cos x}$.

► В окрестности нуля $\operatorname{tg} x = x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$ (см. пример 3).

$e^t=1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3!}+o(t^4)$ и при $t=\operatorname{tg} x$

$$e^{\operatorname{tg} x}=1+\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3+o(x^3)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

$\sin x = x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$; $\quad (1+t)^{1/3}=1+\dfrac{t}{3}-\dfrac{t^2}{3^2}+\dfrac{5t^3}{3^4}+o(t^3)$. $\quad$ При $\quad t=3\sin x$:

$$\sqrt[3]{1+3\sin x}=1+\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{5}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+o(x^3)=1+x-x^2+\frac{3}{2}x^3+o(x^3),$$

$$x^2\cdot\cos x = x^2\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)\right)=x^2+o(x^3)$$

Таким образом, дробь можно записать в виде $\dfrac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$ и тогда

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\dfrac{3}{2}$.◄

1.6.2. Условия монотонности функций. Локальный экстремум

Определение. Функция $y=f(x)$ не убывает (не возрастает) на интервале $(a,\ b)$, если для любых точек $x_1,\ x_2$ из этого интервала, таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство:

$$f(x_1)\le f(x_2) \quad (f(x_1)\ge f(x_2)\,. \tag{1}$$

В случае строгого неравенства в (1) говорят, что функция возрастает (убывает) на интервале $(a,\ b)$.

Условия монотонности функций

Теорема 1. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале $(a,\ b)$.

1. Для того, чтобы $f(x)$ не убывала (не возрастала) на (a, b), **необходимо и достаточно**, чтобы всюду на интервале функция имела неотрицательную (неположительную) производную: $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$.

2. Для возрастания (убывания) функции $f(x)$ на интервале (a, b) **достаточно,** чтобы всюду на интервале производная $f'(x)$ была бы положительной (отрицательной): $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$.

Заметим, что условия $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ не являются необходимыми условиями возрастания (убывания) функции. Действительно, функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой оси: $x_1^3 < x_2^3$ при $x_1 < x_2$. Однако, при $x = 0$ производная $(x^3)' = 3x^2$ обращается в нуль.

Локальный экстремум функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки x_0, в которой для всех x, отличных от x_0, выполняется неравенство:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)). \tag{2}$$

В случае строгого неравенства в (2) говорят о строгом локальном максимуме (минимуме) функции. Для краткости далее слово “локальный” будем опускать.

Точки максимума и минимума функции объединяют одним общим названием: **точки экстремума функции.**

Теорема 2. (необходимое условие экстремума). Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то производная $f'(x)$ в этой точке либо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых функция определена, а производная либо равна нулю, либо не существует, называются **критическими точками функции**. Именно в этих точках следует искать экстремум функции.

Теорема 3. (первое достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки. Если при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в точке x_0 функция имеет максимум (минимум). Если же знак производной не меняется, то в этой точке нет экстремума.

Теорема 4. (второе достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 $(n \in N)$. Тогда, если

$f'(x_0)=f''(x_0)==f^{(n-1)}(x_0)=0$, а $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, то при четном n в точке x_0 есть экстремум, причем, при $f^{(n)}(x_0)<0$ – максимум, при $f^{(n)}(x_0)>0$ – минимум. Если же n – нечетное число, то экстремума в точке x_0 нет.

Отметим частный случай теоремы при n=2. Если $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$, то при $f'(x_0)<0$ в точке x_0 максимум, а при $f''(x_0)>0$ – минимум.

Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции

Согласно теореме Вейерштрасса, функция, непрерывная на отрезке, принимает на нём наибольшее и наименьшее значения. В задачах на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ отыскивают критические точки функции x_k, $a\leq x_k\leq b$, и, если таковые имеются, то наибольшее и наименьшее значения функции на $[a,b]$ выбирают среди чисел $f(a),\ f(b),\ f(x_k)$.

Пример. Камень брошен с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, при каком значении угла α дальность полета камня будет наибольшей.

► Как известно, дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту с заданной начальной скоростью, описывается формулой $l(\alpha)=v_0^2\sin 2\alpha/g \quad \left(0<\alpha<\pi/2\right)$. Определяем $l'(\alpha)=2v_0^2\cos 2\alpha/g$. Уравнение $l'(\alpha)=0$ на интервале $\left(0,\ \pi/2\right)$ имеет единственное решение $\alpha_0=\pi/4$. При переходе через это значение производная $l'(\alpha)$ меняет знак с плюса на минус. Следовательно, точка $\alpha_0=\pi/4$ – точка максимума функции $l(\alpha)$. Максимальная дальность полета камня $l=v_0^2/g$. ◄

1.6.3. Выпуклость функции. Точки перегиба

Пусть функция $y=f(x)$ в каждой точке (a,b) имеет конечную производную. Тогда график функции в каждой точке $(x,f(x))$, $x\in(a,b)$ имеет касательную, непараллельную оси Оу.

Определение. Говорят, что график функции $y=f(x)$ имеет на (a,b) выпуклость, направленную **вверх** (**вниз**), если график функции в пределах интервала (a,b) лежит не выше (не ниже) любой своей касательной.

Теорема 1. (достаточное условие выпуклости функции). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a,b). Если при этом $f''(x)\leq 0$ ($f''(x)\geq 0$) всюду на интервале, то график функции имеет на (a,b) выпуклость, направленную вверх (вниз).

Действительно, если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на (a,b), то в окрестности любой точки x_0 из этого интервала, согласно формуле Тейлора, функция представима в виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2),$$

то есть график функции при $x \to x_0$ мало чем отличается от параболы. При этом если старший коэффициент параболы $\frac{f''(x_0)}{2!}$ положителен, то парабола выпукла вниз, если этот коэффициент отрицателен, выпукла вверх.

Таким образом, направление выпуклости графика функции полностью характеризуется значением второй производной функции.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке конечную или бесконечную производную (в точке $(x_0, f(x_0))$ график функции имеет касательную).

Определение. Точка $M(x_0, f(x_0))$ графика функции $f(x)$ называется **точкой перегиба** этого графика, если существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой слева и справа от x_0 график функции имеет разные направления выпуклости.

Геометрический смысл точки перегиба графика функции заключается в следующем: график функции в точке $M(x_0, f(x_0))$ переходит с одной стороны касательной на другую. Точку x_0 при этом называют точкой перегиба функции $f(x)$.

Теорема 2. (необходимое условие точки перегиба). Если точка x_0 есть точка перегиба функции $f(x)$, и в этой точке существует вторая производная, то $f''(x_0) = 0$.

Замечание. При отыскании точек перегиба функции следует рассматривать те точки, в которых вторая производная либо равна нулю, либо не существует, то есть исследовать критические точки производной функции.

Теорема 3. (первое достаточное условие точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и дважды дифференцируема в некоторой окрестности этой точки, за исключением, быть может, самой точки x_0. Если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.

Теорема 4. (второе достаточное условие точки перегиба). Пусть

$f''(x_0)=0$, а $f'''(x_0)\neq 0$. Тогда x_0 - есть точка перегиба функции $f(x)$.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

► Функция определена при $x\in(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$. Находим $f'(x)=\dfrac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$, $f''(x)=\dfrac{2x(9-x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$. Уравнение $f''(x)=0$ имеет три корня в области определения функции: $x_1=-3,\ x_2=0,\ x_3=3$. В этих точках существуют конечные производные, и график функции имеет касательные, непараллельные оси Oy. Поскольку $f''(x)>0$ на интервалах $(-\infty,\ -3)$, $(-1,\ 0)$, $(1,\ 3)$, то график функции на этих интервалах имеет выпуклость, направленную вниз. На интервалах $(-3,\ -1)$, $(0,\ 1)$, $(3,\ +\infty)$ $f''(x)<0$ и график функции имеет выпуклость, направленную вверх. Очевидно, при переходе через точки $x_1,\ x_{2,}\ x_3$ вторая производная меняет знак. Следовательно, указанные точки есть точки перегиба графика функции. ◄

Пример 2. Найти точки перегиба графика функции $y=f(x)$, заданной параметрически уравнениями $x(t)=te^t$, y(t)=te^{-t}, $\text{t}>0$.

► Функции $x(t),\ y(t)$ бесконечно дифференцируемы, причем, производная $x'(t)=e^t(t+1)$ положительна. Следовательно, параметрические уравнения при $t>0$ определяют функцию $y=f(x)$, производные которой можно найти по формулам $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, $y''_{xx}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$. В нашем случае $y'_x=\dfrac{e^{-2t}(1-t)}{(1+t)}$,

$$y''_{xx}=-2e^{-3t}\frac{(2-t^2)}{(1+t)^3}.$$

Уравнение $y''_{xx}=0$ имеет при $t>0$ единственный корень $t=\sqrt{2}$. При этом значении t функция $y=f(x)$ имеет конечную производную y'_x, а при переходе через точку $t=\sqrt{2}$ вторая производная y''_{xx} меняет знак. Следовательно, при этом значении параметра t график функции $y=f(x)$ имеет точку перегиба. Значению $t=\sqrt{2}$ соответствует точка $(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$ графика, в которой график функции имеет перегиб. ◄

1.6.4. Асимптоты графика функции

Определение. Прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to a-0} f(x)=\infty$$

Пусть функция определена для всех $x>a$ ($x<a$).

Определение. Если существуют такие числа k, b что при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0$, то прямая $y=kx+b$ называется наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

Геометрически можно так истолковать наличие наклонной асимптоты: при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) функция мало чем отличается от линейной функции $y=kx+b$. В частном случае, если $k=0$, асимптота называется *горизонтальной*.

Теорема. Для того чтобы график функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) имел наклонную асимптоту $y=kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=k \ \text{ и } \ \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(f(x)-kx\right)=b.$$

Рекомендации по исследованию функций и построению графиков

При исследовании поведения функции и построении графика будем придерживаться следующей схемы:

1. Определить область существования и область непрерывности функции, точки разрыва. Исследовать поведение функции в граничных точках.
2. Исследовать функцию на периодичность, четность, нечетность.
3. Найти асимптоты графика функции.
4. Найти производную, промежутки возрастания и убывания функции. Определить критические точки и исследовать функцию в этих точках на экстремум.
5. Найти вторую производную, промежутки выпуклости функции, точки перегиба.
6. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Результаты исследований занести в таблицу, нарисовать график.

Примеры построения графиков

Пример. Построить график функции $y=(x-2)\sqrt[3]{(x+4)^2}$.

► 1. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси $x\in(-\infty;+\infty)$. Точек разрыва нет. Исследуем поведение функции на границе области определения: $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}(x-2)\sqrt[3]{(x+4)^2}=+\infty(-\infty)$.

2. Данная функция не является периодической, не обладает чётностью и нечётностью.

3. Поскольку функция непрерывна всюду, у её графика нет вертикальных асимптот. Отсутствуют также и наклонные асимптоты, так как

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)\sqrt[3]{(x+4)^2}}{x}=\infty.$$

4. Вычислим производную функции:

$$f'(x)=\sqrt[3]{\left(x+4\right)^2}+(x-2)\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}=\frac{5x+8}{3\sqrt[3]{x+4}},\quad (x\neq-4).$$ В точке $x=-4$:

$$f'(-4+0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(-4+\Delta x)-f(-4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{(-6+\Delta x)\sqrt[5]{\Delta x^2}}{\Delta x}=-\infty.$$

$$f'(-4-0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{(-6+\Delta x)\sqrt[5]{\Delta x^2}}{\Delta x}=+\infty.$$

Уравнение $f'(x)=0$ имеет единственное решение $x=-1.6$. Таким образом, в качестве критических точек функции будем рассматривать точки $x=-1.6$ и $x=-4$. Составим таблицу значений функции и её производной с целью определения промежутков монотонности функции и точек экстремумов.

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-1.6)$	-1.6	$(-1.6,+\infty)$
$f'(x)$	+	$\nexists$	–	0	+
$f(x)$	возрастает	0	убывает	≈-6.45	возрастает

Функция возрастает на множестве $(-\infty;-4)\cup(-1{,}6;+\infty)$.и убывает на $(-4;-1.6)$. Согласно первому достаточному условию (теорема 3 § 6.2) в точке $x=-4$ функция имеет локальный максимум $y_{max}=0$, а в точке $x=-1.6$ – локальный минимум $y_{min}=-\dfrac{36\sqrt[3]{90}}{25}\approx-6.45$.

5. Найдём вторую производную, интервалы выпуклости и точки перегиба. $f''(x)=\dfrac{2\left(5x+26\right)}{9\sqrt[3]{(x+4)^4}}$ и уравнение $f''(x)=0$ имеет единственный корень $x=-5.2$.

Составим аналогичную таблицу значений функции и второй производной:

x	$(-\infty;-5.2)$	-5.2	$(-5.2;-4)$	-4	$(-4;+\infty)$

y''	–	0	+	$\nexists$	+
y	Выпуклая вверх	≈ -8.13	Выпуклая вниз	0	Выпуклая вниз

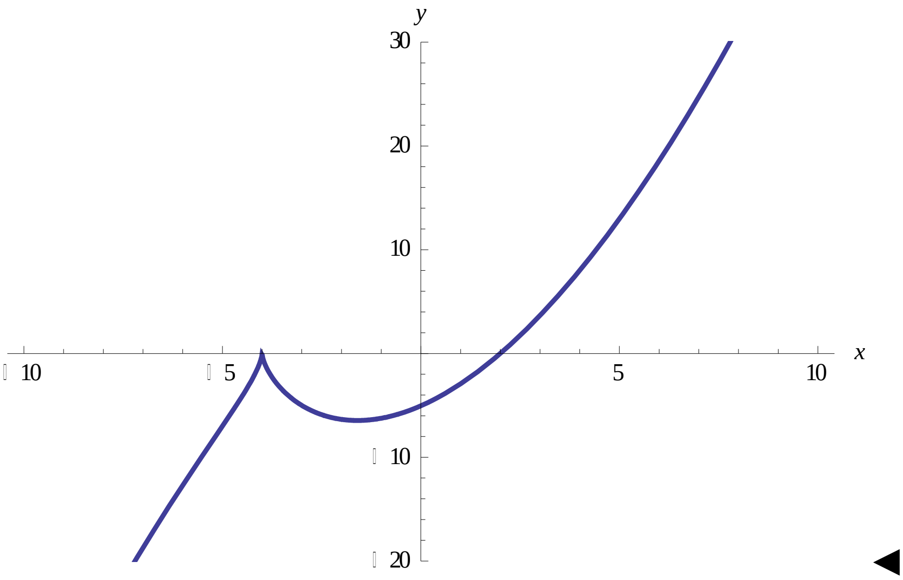
Итак: график функции имеет выпуклость, направленную вверх на интервале $(-\infty;-5.2)$ и вниз на интервале $(-5.2;+\infty)$. На основании первого достаточного условия точки перегиба $x=-5.2$ есть точка перегиба функции.

6. Найдём точки пересечения функции с осями координат:

при $x=0$ $y=-2\sqrt[3]{16}\approx -5.04$;

при $y=0$ $x_1=-4$, $x_2=2$.

По полученным данным построим график функции.



Вопросы

1. Записать остаточный член формулы Тейлора в: а) интегральной форме; б) в форме Лагранжа; в) в форме Пеано.

2. Пользуясь определением, найти наклонную асимптоту графика функции: а) $y = 2x - 1 + \frac{1}{1 - x^3},\ x \to -\infty$, б) $y = \frac{1}{x}\left(\sin x + 2x + x^2\right),\ x \to \infty$.

3. Найти, при каком значении a прямая $y = a$ является горизонтальной асимптотой графика функции: а) $y = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$, $x \to \infty$; б) $y = \frac{1 + x^3}{(1 - x)^3},\ x \to \infty$.

4. Найти наибольшее значение функции на отрезке: $y = xe^{-3x},\ x \in [1, 2]$.

5. При каких значениях параметра a функция $y = x^3 - 3x^2 + ax + 2$ является возрастающей на всей числовой прямой?

6. Используя формулу Тейлора, определить, является ли точка $x = 0$ точкой экстремума или перегиба для функции $f(x) = \sin x\left(e^{-2x} - 1\right) + x^2\left(2 - 2x + x^2\right)$.

7. Используя формулу Тейлора $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin \frac{\pi k}{3}(x + 1)^{2k+1} + \mathrm{o}\left((x + 1)^{2n+1}\right)$, вычислить $f^{(11)}(-1)$.

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Литература

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович – М.: Лань, 2020. – 624 с.
2. Чупригин О.А. Математический анализ. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. / О.А. Чупригин – Мн.: БГУ, 2010. – 270 с.
3. Высшая математика. Сборник задач: учеб. пособие. В 3 ч. Ч 1. Аналитическая геометрия. Анализ функции одной переменной / В.К. Ахраменко [и др.]; под ред. Н.Г. Абрашиной-Жадаевой, В.Н. Русака. – Мн.: БГУ, 2013. – 359 с.
4. Высшая математика. Сборник задач: учеб. пособие. В 3 ч. Ч 2. Линейная алгебра. Анализ функции многих переменных / В.К. Ахраменко [и др.]; под ред. Н.Г. Абрашиной-Жадаевой, В.Н. Русака. – Мн.: БГУ, 2014. – 384 с.

2.1. Множества. Суммирование

1°. Множество – первичное (неопределяемое) понятие. Обозначают множества большими буквами *A, B, C, X*,.Ω, Δ..; $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ – целых, $\mathbb{Q}$ – рациональных, $\mathbb{R}$ – действительных. Принадлежность элемента x множеству A обозначают $x\in A$; если x не является элементом A, то пишут $x\notin A$. Используют также запись: $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, показывающую, что $x_1,x_2,...,x_n$ являются элементами множества X (и только они); а также $X=\{x\colon P(x)\}$, которая характеризирует множество X как совокупность элементов x, удовлетворяющих условию $P(x)$.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят: "A является ***подмножеством*** множества B" или "A содержится в B" и пишут $A\subset B$ (или $B\supset A$). Два множества A и B называются равными (обозначают $A=B$), если они состоят из одних и тех же элементов: $A=B$, если и тольки если $A\subset B$ и $B\subset A$. Множество, не имеющее элементов, называется ***пустым*** и обозначается $\varnothing$.

Операции над множествами определяются следующим образом: 1) ***пересечение*** множеств $A\bigcap B\overset{def}{=}\{x: x\in A \text{ и } x\in B\}$; 2) ***объединение*** множеств $A\bigcup B\overset{def}{=}\{x: x\in A \text{ или } x\in B\}$; 3) ***разность*** множеств $A\setminus B\overset{def}{=}\{x: x\in A \text{ и } x\notin B\}$.

2°. Сумма заданных n чисел $a_1+a_2+...+a_n$ записвается $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$. Буква k называется ***индексом суммирования***. Сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования, т.е. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$. Иногда возникает необходимость сдвинуть границы изменения индекса суммирования в ту или иную сторону. Например, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=3}^{n+2} a_k = \sum_{k=m+1}^{n+m} a_{k-m}$. Операция суммирования имеет свойство линейности $\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Сумму $m \cdot n$ слагаемых $a_{ij},\ i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,m}$ записывают в виде $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ и называют ***двойной суммой***. При этом имеет место равенство $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$.

3°. ***Арифметическая прогрессия*** – последовательность чисел $\{a_k\}$ такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место $a_{k+1} - a_k = d$, где a_1, d – заданные числа; d – разность арифметической прогрессии. При этом $a_k = a_1 + d(k-1)$ – формула её общего члена, а сумма её первых n членов $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Геометрическая прогрессия – последовательность чисел $\{b_k\}$ такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место $\frac{b_{k+1}}{b_k} = q$, где b_1, q – заданные числа, $b_1 \neq 0,\ q \neq 0$; q – знаменатель геометрической прогрессии. При этом $b_k = b_1 q^{k-1}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$.

Пример. Вычислить сумму $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$**.**

► Задачу о вычислении суммы $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, где f – заданная функция, обычно рассматривают как задачу нахождения S_n как функции от n. Например, если $f(k) = a_{k+1} - a_k$, то

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1 .$$

Поскольку $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}. \blacktriangleleft$$

Задачи

1.1. При каких значениях a верно неравенство $a+|a|\le a\cdot|a|$?

1.2. Укажите множества $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, если:

1) $A=\{x\in\mathbb{R}:1\le 2-3x\le 3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}:x\le|x-1|\}$;

2) $A=\{x\in\mathbb{R}:|x+2|\le 3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}:|2x-1|>|x+2|\}$;

3) $A=\{x\in\mathbb{R}:\sin\pi x=0\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{R}:\cos\frac{\pi x}{2}=0\right\}$.

1.3. Изобразите графически множество $\{(x;y), x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}:|y|=|x|+1\}$.

1.4. Вычислите: **1)** $\sum\limits_{k=1}^{5}\frac{k}{k+1}$; **2)** $\sum\limits_{l=2}^{5}(-1)^{l}(3l-1)$; **3)** $\sum\limits_{m=-2}^{3}\frac{m}{m+3}$.

1.5. Докажите, что для любых a и b верно равенство $a^n-b^n=(a-b)\sum\limits_{k=1}^{n}a^{n-k}b^{k-1}$.

Используя это равенство, проверьте справедливость формулы суммы геометрической прогрессии.

1.6. Вычислите: **1)** $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)$; **2)** $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{2k}}$.

1.7. Пусть $\{a_k\}$ – арифметическая прогрессия, все члены которой и разность d отличны от нуля. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$.

1.8. Вычислите: **1)** $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$; **2)** $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$.

1.9. Вычислите: **1)** $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}i$; **2)** $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}ij$.

Домашнее задание

1.10. Определите множества $A\bigcup B$; $A\bigcap B$, если:
$A=\{(x;y):x^2+y^2\le 1\}$, $B=\{(x;y):|x|+|y|\le 1\}$.

1.11. Вычислите: **1)** $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{2k-1}}$; **2)** $\sum\limits_{k=1}^{n}kx^{k-1}$.

1.12. Вычислите **1)** $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(i+j)$; **2)** $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(i-j)$.

1.13. Вычислите: **1)** $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$; **2)** $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$.

2.2. Элементы комбинаторики. Метод математической индукции

1º. Задачи, связанные с выбором тех или иных элементов из некоторого множества, называются ***комбинаторными***. При решении таких задач руководствуются ***правилом умножения***: если некоторый выбор A можно сделать m разными способами, а для каждого из этих выборов иной выбор B можно осуществить n способами, то выбор A и B (в указанном порядке) можно сделать $m\cdot n$ способами.

Каждое k – элементное подмножество n – элементного множества называется ***сочетанием*** из n элементов по k элементов. Количество всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k и вычисляется по формуле $C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}$.

Каждое упорядоченное k – элементное подмножество n –элементного множества называется ***размещением*** из n элементов по k элементов. Количество всех размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k и вычисляется по формуле $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)\ldots(n-(k-1))$.

Размещения из n элементов по n элементов называются ***перестановками*** из n элементов. Количество всех перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле $P_n=n!$.

Пример 1. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

►Поскольку число делится на 5, то его последняя цифра должна быть 5. Остальные 5 цифр могут стоять на свободных пяти местах в произвольном порядке. Поэтому искомое количество шестизначных чисел равно 5! = 120. ◄

2º. Для доказательства истинности утверждения $A(n), n\in\mathbb{N}$ часто используют метод ***математической индукции***: утверждение $A(n)$ считают истинным при всех $n\in\mathbb{N}$, если выполняются следующие два условия: **1)** высказвание $A(n)$ истинно при $n=1$; **2)** из истинности высказывания $A(k)$ следует истинность высказывания $A(k+1)$ при всех натуральных k. Условие истинности высказывания $A(1)$, называется ***базой индукции***, а предположение истинности высказывания $A(k)$ – ***индуктивным соглашением***. Если задачей обусловлено, что высказывание $A(n)$ рассматривается начиная с некоторого числа n_0 (не с числа 1), то базой индукции является истинность высказывания $A(n_0)$, а индуктивное соглашение относится к произвольному натуральному k, $k \geq n_0$.

Пример 2. Доказать, что сумма первых n нечётных чисел ($n \in \mathbb{N}$) равна n^2.

►Нужно доказать равенство

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2. \tag{1}$$

Используем метод математической индукции.

1) Формула (1) верна для n = 1, так как 1 = 1.

2) Пусть m – произвольное натуральное число и для $n = m$ равенство (1) истинно, т.е. $\sum_{k=1}^{m}(2k-1) = m^2$. Докажем, что из этого следует истинность (1) при $n = m+1$. Действительно, $\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{m}(2k-1) + (2m+1) = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$. Это означает, что равенство (1) доказано для каждого натурального n. ◄

Пример 3. Найти все натуральные числа n, для которых верно неравенство

$$2^n > n^2. \tag{2}$$

► Утверждение, которое можно было бы доказвать методом математической индукции явно не сформулировано. По этой причине выясним закономерность соотношения величин 2^n и n^2. Придадим последовательно числу n значения $1, 2, 3, 4, 5, 6$ и получим соответственно $2^1 > 1$, $2^2 = 2^2$, $2^3 < 3^2$, $2^2 = 4^2$, $2^5 > 5^2$, $2^6 > 6^2$. Таким образом, можно высказать гипотезу: неравенство (2) верное при каждом натуральном $n \geq 5$. Докажем это утверждение.

1) Истинность базы индукции для $n = 5$ уже доказана.

2) Допустим, что неравенство (2) верно при произвольном $n = k$, $k > 5$, $k \in \mathbb{N}$, т.е.

$$2^k > k^2. \tag{3}$$

Используя неравенство (3), докажем верность неравенства

$$2^{k+1} > (k+1)^2. \tag{4}$$

Исходя из неравенства (3), имеем $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2$. Если мы покажем что $2k^2 > (k+1)^2$, то это и будет означать верность неравенства (4). Действительно, последнее неравенство равносильно неравенству $2k^2 > k^2 + 2k + 1$, или $(k-1)^2 > 2$, которое при $k > 5$ является верным, а тем самым верно и неравенство (4). Согласно методу математической индукции мы доказали, что неравенство (2) верно при всех $n \geq 5$, а также убедились в его верности при $n=1$. ◀

Задачи

2.1. Докажите: 1) $C_n^k = C_n^{n-k}$; 2) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

2.2. Сколько диагоналей имеет выпуклый n – угольник?

2.3. Сколько разных «слов» можно составить при помощи переставления букв в словах: **1)** теорема; **2)** доказательство; **3)** математика?

2.4 Сколько пятизначных чисел делятся на 5?

2.5. Докажите верность следующих равенств при всех натуральных n:

1) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$; **2)** $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2.6. Докажите, что для всех действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$.

2.7. Выясните, при каких натуральных n справедливо неравенство $2^n < n!$.

2.8. Докажите, что при каждом натуральном n число $4^n + 15n - 1$ кратно числу 9.

Домашнее задание

2.9. На книжной полке стоит собрание произведений в 10 томах. Сколькими способами можно разместить эти книги, чтобы: **1)** тома 1 и 2 стояли рядом; **2)** тома 3 и 4 не стояли рядом?

2.10. В колоде 36 карт, из которых 4 туза. Сколькими способами можно раздать 6 карт, чтобы: **1)** среди них не было тузов; **2)** среди них было два туза; **3)** среди них был хотя бы один туз?

2.11. На одной из двух параллельных прямых лежат 11 точек, на другой – 13. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

2.12. Докажите верность следующих равенств при всех натуральных n:

1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$; **2)** $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2.13. Докажите верность неравенства $2^n \geq n+1$ при всех натуральных n.

2.14. Выясните, при каких натуральных n справедливо неравенство $3^n \geq 2^n + 7n$.

2.15. Докажите, что при каждом натуральном n число $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ кратно числу 133.

2.3. Формула бинома Ньютона

Для действительных чисел a, b и каждого $n \in \mathbb{N}$ справедлива ***формула бинома Ньютона***:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}+\ldots+C_n^nb^n,$$

где коэффициенты C_n^k называются ***биномиальными коэффициентами*** и вычисляются по формуле (Тема 2), а $C_n^0=1$. Свойство $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$ даёт возможность выписать биномиальные коэффициенты в виде таблицы, которую называют ***треугольником Паскаля***:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Задачи

3.1. Методом математической индукции докажите справедливость формулы бинома Ньютона.

3.2. Запишите разложение по формуле бинома Ньютона: **1)** $\left(x^2+2y\right)^6$; **2)** $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^5$.

3.3. Найдите коэффициент разложения бинома $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$ при x^3.

3.4. Сумма коэффициентов разложения бинома $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ равна 1024. Найдите коэффициент разложения бинома при x^{11}.

3.5. Найдите коэффициент многочлена $\left(1+x+x^2\right)^9$ при x^7.

3.6. Найдите слагаемое разложения бинома $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^5$, являющееся целым числом.

Домашнее задание

3.7. Найдите коэффициент при a^7 разложения по формуле бинома Ньютона выражения $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt{a}\right)^{15}$.

3.8. Найдите член разложения $\left(x^2-\frac{2}{x^3}\right)^{10}$, не зависящий от x.

3.9. Найдите коэффициент многочлена $(1+x^2-x^3)^9$ при x^8.

3.10. Найдите слагаемое разложения бинома $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^{24}$, являющееся целым числом.

2.4. Действительные и комплексные числа

1º. Бесконечная десятичная дробь называется ***действительным числом***. Множество действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$. Числа m/n, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ называются ***рациональными***, а само выражение m/n – ***рациональной дробью***. Множество всех рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$. Каждое рациональное число можно записать в виде десятичной дроби. Бесконечные десятичные периодические дроби и только они являются рациональными числами. Действительное число, не являющееся рациональным, называется ***иррациональным***.

Пример. Превратить бесконечную десятичные периодические дроби **1)** a = 3,(17) и **2)** b = 2,5(123) в обыкновенную дробь.

▶ **1)** Умножим число a на 100 и получим 100a = 317,(17). Если от обеих частей этого равенства вычесть число a, то получим 99a=314, откуда a = 314/99.

2) Если обозначить x=10b=25,(123), то, как и в предыдущем случае, число x превращается в обыкновенную дробь: 1000x=25123,(123); 999x = 25098, x = 25098/999, а затем b = 25098/9990. ◀

2º. Пусть X есть подмножество множества действительных чисел, $X \subset \mathbb{R}$. Множество X называется ***ограниченным сверху*** **(*снизу*)**, если существует такое действительное число $A \in \mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R})$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \le A$ $(x \ge a)$; число A (a) называется ***верхней границей*** **(*нижней границей*)** множества X. Множество, ограниченае сверху и снизу, называется ***ограниченным***. Наименьшая (наибольшая) из всех верхних (нижних) границ множества $X \subset \mathbb{R}$ называется ***точной верхней*** **(*нижней*)** ***границей*** множества X и обозначается $\sup X$ ($\inf X$). Если множество X не ограничено сверху (снизу), то считают $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$. Если M=$\sup X$ (m=$\inf X$), то: 1) $\forall x \in X \ \mapsto \ x \le M$ $(x \ge m)$; 2) $\forall M' < M$ $(m' > m)$ $\exists x' \in X : \ x' > M'$ $(x' < m')$.

Если m и M являются конечными числами, то условия 2) равносильны условиям $2')$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : \ x > M - \varepsilon$ $(x < m + \varepsilon)$.

Теорема о гранях. Каждое ограниченнае сверху (снизу) непустое множество действительных чисел имеет конечную точную верхнюю (нижнюю) границу.

3º. ***Алгебраической формой комплексного числа*** z называется выражение $x + iy$, где x, y – действительные числа, i – мнимая **единица**. Действительные числа x и y называются соответственно ***действительной*** и ***мнимой частями*** числа z и обозначаются x = Re z, y = Im z. Два комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и

$z_2 = x_2 + iy_2$ называются ***равными***, если и тольки если $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$. Комплексное число *x–iy* называется ***сопряжённым*** комплексному числу *x+iy* и обозначается $\overline{z}$.

Арифметические действия над комплексными числами z_1 и z_2 выполняются по правилам:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$; **2)** $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

3) $i^2 = -1$; **4)** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i\dfrac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} = \dfrac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0 + 0i = 0$.

Геометрически каждому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует точка *M*(*x*; *y*) координатной плоскости и, наоборот, каждой точке *M*(*x*; *y*) плоскости соответствует комплексное число $x + iy$. Эту плоскость называют ***комплексной плоскостью***, ось абсцисс – ***действительной осью***, а ось ординат – ***мнимой осью***. Иногда бывает более удобно представлять комплексное число $z = x + iy$ как вектор с началом в точке *O* и концом в точке *M*. Длина вектора $\overrightarrow{OM}$ называется ***модулем*** комплексного числа z, обозначается $|z|$ и выражает геометрически расстояние от точки, изображающей число z, до начала координат. При этом $|z_1 - z_2|$ геометрически выражает расстояние между точками, изображающими числа z_1 и z_2.

Задачи

4.1. Сравните действительные числа a и b: **1)** *a* = 1,(1234512), *b* = 1,(12345); **2)** *a* = 1,0(123), *b* = 1,0(1231).

4.2. Рациональное число $\dfrac{3}{14}$ запишите в виде десятичной дроби.

4.3. Запишите бесконечные периодические десятичные дроби в виде обыкновенных дробей: **1)** 0,(7); **2)** 2,4(31).

4.4. Найдите точные верхние и нижние границы множеств: **1)** $\{n\}$; **2)** $\{1/n\}$; **3)** $\{1-1/n\}$; **4)** $\{1+(-1)^n/n\}$ ($n \in \mathbb{N}$).

4.5. Докажите, что нуль является нижней границей множеств: **1)** $\left\{x : x = (a+1)^2 - 4a,\ a \in \mathbb{R}\right\}$; **2)** $\left\{x :\ x = \dfrac{(a+1)}{2} - \sqrt{a},\ a > 0\right\}$.

4.6. Постройте графики функций: **1)** $f(x) = \sup\limits_{0 \le t \le x}\{\sin t\}$; **2)** $g(x) = \inf\limits_{0 \le t \le x}\{\sin t\}$.

4.7. Вычислите произведение $z_1 z_2$ и частное z_1 / z_2, если: **1)** $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{3},\ z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$; **2)** $z_1 = 5 + 4i,\ z_2 = 2 - 3i$.

4.8. Вычислите: 1) $(1+i)^3$; 2) i^{27}; 3) i^{126}.

4.9. Разрешите систему уравнений $\begin{cases} 2z_1 - 3iz_2 = 7-5i \\ (3+i)z_1 + z_2 = 8 \end{cases}$.

4.10. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям: **1)** $|z-1|=1$; **2)** $|z+1|\le 2$; **3)** $|2z+i|>1$; **4)** $|z+i|=|z-1|$; **5)** $\left|\dfrac{z-1}{z+2}\right|\ge 1$; **6)** $\sin|z|>0$; **7)** $\operatorname{Im}\big((1-i)\cdot z\big)=1$; **8)** $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}\ge 1$.

Домашнее задание

4.11. Сравните действительные числа $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{19}$.

4.12. Докажите, что нуль является нижней границей множеств: **1)** $\left\{x:\ x=a+\dfrac{1}{a}-2,\ a>0\right\}$; **2)** $\left\{x:\ x=\dfrac{a^3+1}{2}-\left(\dfrac{a+1}{2}\right)^3,\ a>-1\right\}$.

4.13. Постройте графики функций: **1)** $f(x)=\sup\limits_{0\le t\le x}\{\cos t\}$; **2)** $\mathrm{g}(x)=\inf\limits_{0\le t\le x}\{\cos t\}$.

4.14. Разрешите систему уравнений $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1+i \\ 3z_1 + iz_2 = 2-3i \end{cases}$.

4.15. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию: **1)** $0<\operatorname{tg}|z|<1$; **2)** $\lg|z-10i|<1$; **3)** $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z+i}\ge\dfrac{1}{2}$.

2.5.Тригонометрическая форма комплексного числа

Модулем комплексного числа z называется длина соответствующего ему вектора. Модуль числа $z=x+iy$ обозначается $|z|$ и вычисляется по формуле

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\,. \tag{1}$$

Аргументом комплексного числа $z\ne 0$ называется угол между положительным направлением действительной оси и вектором z. Для числа $z=0$ аргумент не определяется. Аргумент комплекного числа z обозначается $A\mathrm{rg}\,z$ и определяется с точностью до слагаемого кратного 2π.

Из геометрических соображений несложно представить действительную и мнимую части комплексного числа $z=x+iy$ через его модуль r и аргумент φ:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi, \tag{2}$$

Откуда следует

$$\cos\varphi = x/\sqrt{x^2+y^2}\ , \quad \sin\varphi = y/\sqrt{x^2+y^2}\ . \qquad (3)$$

Аргументы комплексного числа $z = x + iy, x \neq 0$ можно вычислить из уравнения $\operatorname{tg}\varphi = y/x$, которое является следствием системы (3). Это уравнение имеет больше решений, чем система (3), но выбрать нужные решения (аргументы комплексного числа) можно по правилу: если $\operatorname{Re} z > 0$, (т.е. число z расположено в правой полуплоскости), то $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}(y/x)$; если Rez<0, (т.е. число z расположено в левой полуплоскости), то $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}(y/x) + \pi$.

Из равенств (2) следует, что комплексное число $z = x + iy$ можно представить в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|, \varphi = \operatorname{Arg} z$. Такое представление комплексного числа называется ***тригонометрической формой комплексного числа***. Тригонометрическая форма является исключительно удобной для умножаения и деления комплексных чисел.

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то $|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$, $\operatorname{Arg}\,(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\operatorname{Arg}\,\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$. Из этих этих равенств получается формула возведения в степень $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, частный случай которой $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ называется формулой Муавра.

Комплексное число w называется ***корнем степени n*** из комплекного числа z и обозначается $w = \sqrt[n]{z}$, если $w^n = z$. Если $z = z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то существует n значений корня степени n из числа z, которые находятся по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = \overline{0, n-1}. \qquad (4)$$

Комплексные числа, являющиеся корнями степени n из числа z, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в точке O.

Пример 1. Найти модули и аргументы чисел $z_1 = -\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7)$, $z_2 = 3\sin(\pi/5) - 3i\cos(\pi/5)$.

► Для нахождения модулей и аргументов чисел z_1 и z_2 совсем необязательно пользоваться формулами (1) и (3). На основании формул приведения выполним следующие преобразования:

$$z_1 = \cos(\pi - \pi/7) + i\sin(\pi - \pi/7) = \cos(6\pi/7) + i\sin(6\pi/7),$$

$$z_2 = 3(\cos(3\pi/2 + \pi/5) + i\sin(3\pi/2 + \pi/5)) = 3(\cos(7\pi/10) + i\sin(7\pi/10)).$$

Поскольку z_1 и z_2 представлены в тригонометрической форме, то $|z_1|=1,\ \operatorname{Arg} z_1 = 6\pi/7;\ \ |z_2|=3,\ \operatorname{Arg} z_2 = 7\pi/10$. ◄

Пример 2. Вычислить $\sqrt{5-12i}$.

► При вычислении корня квадратного часто бывает более удобно использовать вместо формулы (4) определение корня второй степени из комплексного числа. Пусть $\sqrt{5-12i}=a+bi$, тогда 5–12*i*= $a^2+2abi-b^2$. Числа *a* и *b* определяются из системы уравнений $a^2-b^2=5$, $ab=-6$, решения которой (–3; 2) и (3; –2). Таким образом, комплексные числа $-3+2i$ и $3-2i$, являются двумя значениями $\sqrt{5-12i}$. ◄

Задачи

5.1. Представьте комплексное число z в тригонометрической форме: **1)** $z=-i$; **2)** $z=7$; **3)** $z=-2$; **4)** $z=\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}$; **5)** $z=-\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$; **6)** $z=\sin\frac{\pi}{7}-i\cos\frac{\pi}{7}$; **7)** $z=-1+i$; **8)** $z=-\sqrt{3}+i$; **9)** $z=\operatorname{tg}2-i$; **10)** $z=\dfrac{i\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$; **11)** $z=\dfrac{-\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{13\pi}{12}-i\sin\frac{13\pi}{12}}$.

5.2. Найдите вектор, в который переходит вектор $2\sqrt{3}+4i$ после поворота на 120°: **1)** в положительном направлении; **2)** в отрицательном направлении.

5.3. Запишите следующие комплексные числа в алгебраической форме: **1)** $\left(\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$; **2)** $(\cos 24°+i\sin 24°)^{-10}$; **3)** $\left(\dfrac{i^{128}-\sqrt{3}i^{131}}{2}\right)^{5}$.

5.4. Найдите все значения $\sqrt[n]{z}$, если: **1)** *z*=1, *n*=6; **2)** *z*=1+*i*, *n*=2.

5.5. Решите уравнения: **1)** $z^3=1+i$; **2)** $z^4-4z^3+6z^2-4z-15=0$.

Домашнее задание

5.6. Представьте комплексное число z в тригонометрической форме: **1)** $z=-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}$; **2)** $z=\left(\sin\frac{4\pi}{3}-i\cos\frac{4\pi}{3}\right)^{-1}$; **3)** $z=\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$.

5.7. Найдите величину угла, на который нужно повернуть вектор 2–3$\sqrt{3}$ +*i*(3+2$\sqrt{3}$), чтобы получить вектор 4+6*i*.

5.8.Запишите следующие комплексные числа в алгебраической форме:

1) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}$; **2)** $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

5.9. Найдите все значение $\sqrt[n]{z}$, если: **1)** z=4i, n=4; **2)** z= –1, n=3.

5.10.Решите уравнения: **1)** $z^4+1=0$; **2)** $z^3+3z^2+3z+3=0$.

2.6. Многочлены и рациональные функции

Пример 1. Решить уравнение $z^2+2\left(1-i\right)z-5+10i=0$.

► По формуле вычисления корней квадратного уравнения имеем $z=-(1-i)\pm\sqrt{(1-i)^2-(-5+10i)}=-1+i\pm\sqrt{5-12i}$. Из примера 2 занятия 5 получим $z_1=-1+i+3-2i=2-i,\ z_2=-1+i-3+2i=-4+3i$. ◄

Пример 2. Записать многочлен z^4+4 в виде произведения двух многочленов второй степени с действительными коэффициентами**.**

►**Способ первый.** Вычислим $\sqrt[4]{-4}: z_1=1+i,\ z_2=1-i,$ $z_3=-1+i,\ z_4=-1-i$.

Многочлен z^4+4 можно представить в виде $z^4+4=\left(z-1-i\right)\left(z-1+i\right)\left(z+1-i\right)\left(z+1+i\right)$. Перемножив попарно множители, соответствующие сопряжённым корням, получим $z^4+4=\left(z^2-2z+2\right)\left(z^2+2z+2\right)$.

Способ второй. Представив многочлен в виде $\left(z^2\right)^2+2^2$ и выделив в этой сумме квадратов квадрат суммы, получим $z^4+4=\left(z^2+2\right)^2-4z^2$. Разлагая правую часть на множители как разность квадратов, приходим к тому же результату.◄

Пример 3. Разложить на сумму простых рациональных дробей:

1) $\frac{x^3+7x+32}{x(x^2+4)^2}$; **2)** $\frac{1}{2(x-1)(x-2)(x-3)}$; **3)** $\frac{x^3+x^2-2x+7}{(x^2+1)(x^2+4)}$; **4)** $\frac{x^3+3}{(x+3)^{100}}$.

►**1)** Представим: $\frac{x^3+7x+32}{x(x^2+4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}+\frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$**.** Из равенства рациональных дробей следует равенство многочленов $x^3+7x+32=A(x^2+4)^2+(Bx+C)x(x^2+4)+x(Dx+E)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему: $x^0:16A=32,\ x^1:4C+E=7,\ x^2:8A+4B+D=0,\ x^3:C=1,\ x^4:A+B=0,$ решение которой является $A=2,\ B=-2,\ C=1,\ D=-8,\ E=3$. Таким образом,

$\dfrac{x^3+7x+32}{x(x^2+4)^2}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2x-1}{x^2+4}-\dfrac{8x-3}{(x^2+4)^2}$. Этот способ называется ***способом соответствующих коэффициентов***.

2) В случае, если корни знаменателя рациональной функции простые, очень удобным является ***способ домножения***. Сначала запишем разложение дроби с неопределёнными коэффициентами:

$\dfrac{1}{2(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$. Домножая обе части этого равенства на $x-1$, получаем $\dfrac{1}{2(x-2)(x-3)}=A+\dfrac{B}{x-2}(x-1)+\dfrac{C}{x-3}(x-1)$. Полагая в обеих частях этого равенства значение $x=1$ (корень многочлена $x-1$), получим $A=1/4$. Аналогично вычисляются $B=-1/2,\ C=1/4$.

3) Корни знаменателя в этом случае также простые, хотя и комплексные. Используем способ домножения: $\dfrac{x^3+x^2-2x+7}{(x^2+1)(x^2+4)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$,

откуда $x^3+x^2-2x+7=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1)$. Взяв значения $x=i$ и $x=2i$, получим $6-3i=3(Ai+B),\ 3-12i=-3(2Ci+D)$. Из этой системы находим $A=-1,\ B=2,\ C=2,\ D=-1.$ Таким образом, $\dfrac{x^3+x^2-2x+7}{(x^2+1)(x^2+4)}=\dfrac{2-x}{x^2+1}+\dfrac{2x-1}{x^2+4}$.

4) Взяв $x+3=t$, получим $\dfrac{x^3+3}{(x+3)^{100}}=\dfrac{(t-3)^3+3}{t^{100}}=\dfrac{t^3-9t^2+27t-24}{t^{100}}=$

$$=\frac{1}{t^{97}}-\frac{9}{t^{98}}+\frac{27}{t^{99}}-\frac{24}{t^{100}}=\frac{1}{(x+3)^{97}}-\frac{9}{(x+3)^{98}}+\frac{27}{(x+3)^{99}}-\frac{24}{(x+3)^{100}}.◄$$

Задачи

6.1. Найдите частное $S(z)$ и остаток $R(z)$ от деления многочлена $P(z)=3z^3-z^2+2$ на многочлен $Q(z)=z^2-1$, ответив предварительно на вопрос, делится ли $P(z)$ на $Q(z)$.

6.2. При каких значениях a и b многочлен $P(z)=az^4+bz^3-4z^2+3z+2$ делится на $Q(z)=z^2-1$?

6.3. Докажите, что каждый рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами можно представить в виде p/q, где p является делителем свободного члена, а q – делитель старшего коэффициента этого многочлена.

6.4. Найдите рациональные корни уравнений $3z^3+8z^2+13z+6=0$.

6.5. Убедитесь в том, что число $z_1 = 1 - 2i$ является решением уравнения $z^4 - 2z^3 + 9z^2 - 8z + 20 = 0$, и найдите остальные решения.

6.6. Определите кратность корня $z_0 = 1$ уравнения $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0$.

6.7. Представьте многочлен в виде произведения двух многочленов второй степени с действительными коэффициентами: **1)** $x^4 + 12x^2 + 64$; **2)** $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7) - 63$.

6.8. Выделите целую часть рациональной функции $\dfrac{z^6 - z^2 + 1}{(z-1)^3}$.

6.9. Разложите рациональную функцию $\dfrac{3x^3 + 7x + 30}{x^4 + 8x^2 - 9}$ на сумму простых дробей.

Домашнее задание

6.10. При делении многочлена $P(z)$ на $z - 2$ получается остаток 7, а при делении на $z + 2$ – остаток 3. Найдите остаток от деления $P(z)$ на $z^2 - 4$.

6.11. Убедитесь в том, что число $z_0 = 2 + i$ является решением уравнения $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5 = 0$ и найдите остальные решения.

6.12. Определите кратность корня $z_0 = -1$ уравнения $z^4 + 2z^3 - 2z - 1 = 0$.

6.13. Представьте многочлен $x^4 + 2x^2 + 9$ в виде произведения двух многочленов второй степени с действительными коэффициентами.

6.14. Разложите рациональную функцию $\dfrac{27 - 22x + 17x^2 - 2x^3}{x^4 - 8x^2 - 9}$ на сумму простых дробей.

2.7. Функции и последовательности

7.1. Для функции $f(x) = \frac{x-2}{1+x^2}$ найдите $f(0)$, $f(x) + 2$, $f(x+2)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{1}{f(x)}$.

7.2. Найдите $f(x)$, если: **1)** $f(x+1) = 2x + 3$; **2)** $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{x+1}{(2x+1)^2}$.

7.3. Найдите все корни уравнения $f(x) = f(-2)$, если $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$.

7.4. Приведите пример функций, заданных аналитически, таких что: **1)** $D(f) = [-2, 2]$; **2)** $D(f) = (-2, 2)$; **3)** $D(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; **4)** $D(f) = \mathbb{R}$, $x \neq \pm 2$.

7.5. Зная график функции $y = f(x)$, постройте графики функций:

1) $y=\left|f\left(x\right)\right|$; **2)** $y=\dfrac{1}{2}\left(\left|f\left(x\right)\right|+f\left(x\right)\right)$; **3)** $y=\dfrac{1}{2}\left(\left|f\left(x\right)\right|-f\left(x\right)\right)$; **4)** $y=f\left(\left|x\right|\right)$.

7.6. Запишите 5 первых членов последовательностей, заданных формулой общего члена: **1)** $x_n=n+(-1)^n\,n$; **2)** $x_n=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$; **3)** $x_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$; **4)** $x_n=\cos n\pi$; **5)** $x_n=a\cdot\dfrac{1+(-1)^n}{2}+b\cdot\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$; **6)** $x_n=\dfrac{\left(2n\right)!!}{\left(2n-1\right)!!}$, где $\left(2n\right)!!\overset{def}{=}2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n$, $\left(2n-1\right)!!\overset{def}{=}1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

7.7. Запишите несколько первых членов последовательности, заданной рекуррентной формулой: $a_{n+1}=a_n+2$, $a_1=1$. Запишите формулу общего члена.

7.8. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что: **1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2n+2}=1$**;** **2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\lg n=+\infty$.

7.9. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

7.10. Используя свойства сходящихся последовательностей, докажите, что следующие последовательности являются бесконечно малыми: **1)** $x_n=\dfrac{q^n}{n}$ $(\left|q\right|\le1)$; **2)** $x_n=\dfrac{\sin n}{n^2}$.

7.11. Найдите предел последовательности: **1)** $x_n=\dfrac{2+\left(n+1\right)/n}{3-1/n}$; **2)** $x_n=\dfrac{1-(0,5)^n}{5+(0,3)^n}$; **3)** $x_n=(\dfrac{n-1}{n}+\dfrac{1-2^{-n}}{3})^2$; **4)** $x_n=\dfrac{2^n\cdot3^{-3n}+3^{2n}\cdot5^{-2n}}{1+3^n\cdot5^n}$.

7.12. Раскройте неопределённость ∞/∞ (т.е. найдите предел последовательности (x_n)) путём деления числителя и знаменателя дроби на соответствующую степень n или a^n: **1)** $x_n=\dfrac{2n-1}{5n-2}$; **2)** $x_n=\dfrac{n^2+1}{5n^2-n-2}$; **3)** $x_n=\dfrac{3n^2-n+1}{4n^3-2n^2-3}$; **4)** $x_n=\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$; **5)** $x_n=\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$; **6)** $x_n=\dfrac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{n+1}$.

Домашнее задание

7.13. Найдите формулу общего члена последовательности, у которой: **1)** члены с чётными номерами равны 1, а члены с нечётными номерами равны 0; **2)** члены с чётными номерами равны a, а члены с нечётными номерами равны b.

7.14. Найдите предел последовательности $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $(0 < a < b)$.

7.15. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{2+n} = -1.$

7.16. Раскройте неопределённость ∞ / ∞ (т.е. найдите предел последовательности (x_n)) путём деления числителя и знаменателя дроби на соответствующую степень n или a^n: **1)** $x_n = \dfrac{n\sqrt[6]{n}+1}{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sqrt{n}+\sqrt[7]{n^2}+2}$;

2) $x_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+4}$; **3)** $x_n = \dfrac{a\cdot 2^n + b\cdot 3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+2}}$;

4) $x_n = \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n+1)+n+1}{2+4+6+\ldots+2n-n+2}$.

2.8. Вычисление пределов последовательностей

Задачи

8.1. Найдите предел последовательности $x_n = \dfrac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_0}{b_m n^m + b_{m-1}n^{m-1}+\ldots+b_0}$, $a_k \neq 0, b_k \neq 0$ при всех заданных натуральных k и m.

8.2. Найдите пределы следующих иррациональных выражений, используя приём переведения иррациональности из знаменателя в числитель или из числителя в знаменатель:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)}-n)$; **3)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

8.3. Найдите: **1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+3}$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$.

8.4. Докажите неравенство $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

8.5. Докажите сходимость монотонных последовательностей: **1)** $x_n = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$; **2)** $x_n = \sqrt{6+x_{n-1}}$, $x_1 = 6$.

8.6. С помощью Критерия Коши докажите сходимость последовательности $x_n = \dfrac{\cos 1!}{2} + \dfrac{\cos 2!}{2^2} + \ldots + \dfrac{\cos n!}{2^n}$, т.е. сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos k!}{2^k}$.

Домашнее задание

8.7. Найдите пределы последовательностей (x_n): **1)** $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{2n^5 - 5n + 4}{n^5 + 1}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$; **3)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

8.8. Докажите сходимость монотонных последовательностей: **1)** $x_n = (1 - \dfrac{1}{3})(1 - \dfrac{1}{3^2})\ldots(1 - \dfrac{1}{3^n})$; **2)** $x_n = \dfrac{p_1}{10} + \dfrac{p_2}{10^2} + \ldots + \dfrac{p_n}{10^n}$, где (p_n) – ограниченная последовательность и $p_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

8.9. Найдите пределы следующих иррациональных выражений: **1)** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1} - n)$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n^2+2n} - n - 1}$.

2.9. Предел функции

Задачи

9.1. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; **2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; **3)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

9.2. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^4 + (x+2)^4 + (x+3)^4}{x^4+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)(2x+2)(2x+3)(2x+4)}{(4x-1)^4}$; **3)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

9.3. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_0}$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+3x}{2x + \sqrt[3]{x^2}}$; **3)**; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

9.4. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-1}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2+x^5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

9.5. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$ $(n, m \in \mathbb{N})$.

9.6. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

Домашнее задание

9.7. Найдите пределы:**1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x+3x^2)}{x^3+2x^4}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}, (n\in\mathbb{N})$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $(n,\, m\in\mathbb{N})$.

9.8. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

9.9. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$; **2)** $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(\sqrt[n]{1+x}-1)$.

9.10. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; **3)** $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

2.10. Замечательные пределы

Задачи

10.1. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{x}$; **3)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 5x}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; **5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

10.2. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{x^2}$; **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 3x^2}{x}$.

10.3. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$; **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

10.4. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

10.5. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

10.6. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$; **3)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

10.7. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Домашнее задание

10.8. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$; **3)** $\lim\limits_{x\to o}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$; **4)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 3x}$; **5)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

10.9. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{2/x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/x}$; **3)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})^x$; **4)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$; **5)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$; **6)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; **7)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

2.11. Непрерывность. Точки разрыва

Задачи

11.1. Запишите с помощью неравенств следующие утверждения: **1)** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$; **2)** $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=A$; **3)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=A$; **4)** $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$; **5)** $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$; **6)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$; **7)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$; **8)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$; **9)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$; **10)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\infty$; **11)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.

11.2. Исследуйте на непрерывность и постройте графики функций: **1)** $f(x)=\begin{cases}2x, & если\quad 0\le x\le 1,\\ 3-x, & если\quad 1<x\le 2\end{cases}$; **2)** $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & если\quad x\ne 2,\\ A, & если\quad x=2\end{cases}$;

3) $y=\operatorname{sgn}(x^2-4)$; **4)** $y=\sqrt{\cos 2x-1}$; **5)** $y=\sqrt{1-\cos 2x}$; **6)** $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}$.

11.3. Определите тип точек разрыва функций $f(x)$, если:

1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0 \end{cases}$; **2)** $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0 \end{cases}$;

3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4+3x^3+2x^2}{\sin x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

11.4. Исследуйте на непрерывность функцию $y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$.

11.5. При каком значении a функция $y=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ a+x, & x\geq 0 \end{cases}$ является непрерывной?

11.6. Найдите $f(0)$, если $f\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$, $n\in\mathbb{N}$ и функция $f(x)$ непрерывна в точке 0.

11.7. Исследуйте на непрерывность и постройте графики функций: **1)** $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}$, $n\in\mathbb{N}$; **2)** $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Домашнее задание

11.8. Исследуйте на непрерывность и постройте график функции $y=\operatorname{sgn}\sin x$.

11.9. Определите тип точек разрыва функций $f(x)$, если: **1)** $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-x^3}$;

2) $f(x)=\dfrac{x^4+3x^3+2x}{\sin x}$, $f(0)=0$; **3)** $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$; **4)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+15}-3}{x^2-36}$.

11.10. Как следует доопределить функцию $f(x)$ в точке x_0, чтобы она была непрерывной в этой точке, если: **1)** $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$, $x_0=0$;

2) $f(x)=e^{-\frac{1}{(x-2)^2}}$, $x_0=2$; **3)** $f(x)=(1-x)^{\frac{1}{x}}$, $x_0=0$?

2.12. Сравнение функций

Задачи

12.1. Определите порядок бесконечно малых функций $f(x)$ при $x\to a$: **1)** $f(x)=x^k+a_1x^{k+1}+\ldots+a_mx^{k+m}$, $a=0$, $k,m\in\mathbb{N}$; **2)** $f(x)=2\sin x+x^2, a=0$;

3) $f(x)=x^3-3x+2,\ a=1,\ a=-2$; **4)** $f(x)=1-\sin x,\ a=\dfrac{\pi}{2}$.

12.2. Определите порядок бесконечно больших функций $f(x)$:
1) $f(x)=\dfrac{x^6+1}{x^4+3x^3+7},\ x\to+\infty$; **2)** $f(x)=\sqrt{x^2+x+2},x\to\infty$;

3) $f(x)=\dfrac{\sin(x-2)}{(x-2)^2},x\to 2$; **4)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{(x-1)^3},x\to 1$.

12.3. Пусть функция $\alpha(x)\geq 0$ и $\alpha=o(1)$ при $x\to 0$. Определите, какие из следующих функций являются бесконечно малыми при $x\to 0$ более высокого порядка, чем α: **1)** α^3; **2)** $\sqrt{\alpha}$; **3)** $\sin^2\alpha$; **4)** $\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2\alpha}$; **5)** $1-\cos\alpha$; **6)** $\alpha^3+\alpha^{1/4}$; **7)** $\alpha^{3/4}+\alpha^2$; **8)** $\alpha^{1/5}+\alpha^{2/5}$; **9)** $\operatorname{tg}^2\alpha+\alpha^3$.

12.4. Являются ли следующие функции эквивалентными бесконечно малой α:
1) $\operatorname{tg}\alpha$; **2)** $\alpha+\sin^2\alpha$; **3)** $\dfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha)$; **4)** $\sin\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha$; **5)** $\alpha^2+3\alpha^3$; **6)** $\alpha+3\alpha^3$?

12.5. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+2\operatorname{arctg}3x+3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x)+xe^x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\operatorname{tg}x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\big(\ln(1+x/2)-\ln(x/2)\big)$; **4)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg}x}$; **5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{\left(a^x-b^x\right)^2}$;

6) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}$.

Домашнее задание

12.6. Определите порядок бесконечно малых функций $f(x)$ при $x\to a$:
1) $f(x)=\sqrt{x^2-4},a=2$; **2)** $f(x)=x\sin x-2x^2\operatorname{tg}x,\ a=0$.

12.7. Определите порядок бесконечно большой функции $f(x)=\dfrac{x+1}{\sin^3 x^2},x\to 0$.

12.8. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}(\cos 2x-\cos 3x)$;**2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\sqrt[m]{1+3x}-\sqrt[m]{1+2x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$; **4)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$; **5)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\sqrt[m]{1+x}\cdot\sqrt[n]{1+2x}-1\right)$.

12.9. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\sin\left(\ln\sqrt{\cos\dfrac{\pi}{n}}\right)$; **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$.

2.13. Производная, дифференциал, их геометрический смысл

Задачи

13.1. Пользуясь определением, найдите производную функции: **1)** $y = x^3$; **2)** $y = \operatorname{arctg} x$.

13.2. Для функции $f(x) = x^3 - 2x + 1$ найдите $\Delta f(1)$, $df(1)$ и сравните их, когда: **1)** $\Delta x = 1$; **2)** $\Delta x = 0{,}1$; **3)** $\Delta x = 0{,}01$.

13.3. Найдите точки, в которых касательная к графику функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ параллельна оси Ox.

13.4. Для функции $f(x) = \left|x^2 - 5x + 6\right|$ вычислите $f'_-(2)$ и $f'_+(2)$.

13.5. 1) Запишите уравнение касательной к кривой $y = x\ln x$ в точке с абсциссой $x_0 = e$; **2)** Запишите уравнение той нормали к кривой $y = x\ln x$, которая параллельна прямой $x - 2y + 3 = 0$.

13.6. Запишите уравнения касательной и нормали к кривой $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ в точках: **1)** $A(-1;\,0)$; **2)** $B(2;\,3)$; **3)** $C(3;\,0)$.

13.7. Определите, в какой точке и под каким углом пересекаются кривые $y_1 = \ln x$ и $y_2 = x^2/2e$.

13.8. Определите, в каких точках и под каким углом пересекаются кривые $y_1 = x^2$ и $y_2 = \sqrt{x}$.

Домашнее задание

13.9 Найдите точки, в которых касательная к графику функции $y = (3 - x^2)e^x$ параллельна оси Ox.

13.10. Пусть функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0, и пусть в точке x_0 задано приращение $\Delta x = 0{,}2$. Найдите $f'(x_0)$, если главная линейная часть приращения функции в точке x_0, соответствующая заданному приращению аргумента, равна 0,8.

13.11. Пользуясь определением, найдите производную функции $y = x^2$.

13.12. Для функции $f(x) = \begin{cases} x/(1+e^{1/x}), \text{ если } x \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \end{cases}$ вычислите $f'_-(0)$ и $f'_+(0)$.

2.14. Дифференцирование композиции

Задачи

14.1. Найдите композиции функций $f \circ g$ и $g \circ f$ и укажите их области пределения, если: **1)** $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$; **2)** $f(x)=10^x$, $g(x)=\lg x$.

14.2. Для функций $u=\sin x,\ v=\log_2 x,\ w=1+x,\ y=\dfrac{1}{x},\ z=\sqrt{x}$ запишите композиции: **1)** $z\circ y\circ w\circ v\circ u$; **2)** $y\circ v\circ z\circ u\circ w$.

14.3. Функции **1)** $\dfrac{1}{\sin\sqrt{\log_2(1+x)}}$; **2)** $\dfrac{1}{1+\log_2\sin\sqrt{x}}$ запишите как композиции функцийй u, v, w, y, z из задания 14.2.

14.4. Найдите производные следующих функций: **1)** $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt[3]{x^2}}$; **2)** $y=(x^2+1)\operatorname{ctg}x+2$; **3)** $y=\log_x 2$; **4)** $y=\dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$; **5)** $y=x\arcsin x$; **6)** $y=2^x\ln x$; **7)** $y=\dfrac{\ln x}{\operatorname{cth}x}$; **8)** $y=\dfrac{1}{x}\cos x$.

14.5. Вычислите производные следующих функций: **1)** $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; **2)** $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; **3)** $y=\sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))$; **4)** $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$; **5)** $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b$; **6)** $y=\ln(\ln^2(\ln^3 x))$; **7)** $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{th}x)$; **8)** $y=\arcsin(\sin x)$; **9)** $y=\arccos(\operatorname{ch}^{-1}x)$; **10)** $y=x+x^x+x^{x^x}$, $x>0$.

14.6. Найдите производную функции $y=f(x)$ в точке x_0, если: **1)** $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt{3+x^2}$, $x_0=0$; **2)** $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x$, $x_0=\pi/2$.

14.7. Исследуйте, является ли функция $f(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x},\ \textit{если}\ \ x\neq 0,\\ 0,\ \textit{если}\ \ x=0\end{cases}$ в точке $x=0$: **а)** непрерывной; **б)** дифференцируемой?

Домашнее задание

14.8. Вычислить производные следующих функций: **1)** $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg}x}+\dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg}x}$; **2)** $y=\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; **3)** $y=x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))$; **4)** $y=\ln(\operatorname{ch}x)+\dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$; **5)** $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$; **6)** $y=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2 x}-\ln\left(\operatorname{cth}\dfrac{x}{2}\right)$; **7)** $y=\sqrt[x]{x}$, $x>0$; **8)** $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin(x/a)$, $a>0$; **9)** $y=(\arcsin x)\big/\sqrt{1-x^2}+(1/2)\ln((1-x)/(1+x))$.

14.9. Найдите производную функции $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ в точке $x_0 = 0$.

14.10. Исследуйте, является ли функция $f(x) = \begin{cases} (\sqrt{x+1}-1)\big/\sqrt{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$: **а)** непрерывной; **б)** дифференцируемой?

2.15. Дифференцирование обратных, неявных и параметрических функций

Задачи

15.1. Найдите производную y'_x функции, заданной неявно: **1)** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $y > 0$; **2)** $y^5 + y^3 + y - x = 0$.

15.2. Покажите, что функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $\operatorname{arctg}(y/x) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, удовлетворяет уравнению $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$.

15.3. Найдите производную y'_x функции, заданной параметрически: **1)** $\begin{cases} x = e^{-t}\sin t, \\ y = e^{t}\cos t; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t,\ 0 < t < \pi/2. \end{cases}$

15.4. Найдите y'_x для функции $\rho = a\varphi$, заданной в полярных координатах (*спираль Архимеда*).

15.5. Под каким углом пересекаются кривые $\rho = \varphi$ и $\rho = 1/\varphi$ в точке $M_0(\rho = 1; \varphi = 1)$?

15.6. Для данной кривой в данной точке составьте уравнения касательной и нормали: **1)** $x^2/100 + y^2/64 = 1$, $M_0(6; 6{,}4)$; **2)** $x = 2e^t$, $y = e^{-t}$, $t = 0$.

Домашнее задание

15.7. Для данной кривой в данной точке составьте уравнения касательной и нормали: **1)** $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$, $M_0(1; 2)$; **2)** $x = \sin t$, $y = \cos 2t$, $t = \pi/6$.

15.8. Определите, в какой точке и под каким углом пересекаются кривые: **1)** $x^2 + y^2 - 4x = 1$ и $x^2 + y^2 + 2y = 9$; **2)** $\begin{cases} x = (5\cos t)/3, \\ y = (5\sin t)/4 \end{cases}$ и $y = x^2$.

15.9. Найдите дифференциал функции $y(x)$ в данной точке: **1)** $y = x^2 2^x x^{-x}$, $x_0 = 2$; **2)** $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0$, $M_0(1; 3)$; **3)** $r(\varphi) = 2(1+\cos\varphi)$, $0 < \varphi < \pi$, $M_0(0; 2)$.

2.16. Производные и дифференциалы высших порядков

Задачи

16.1. Докажите, что функция $y = e^{x^2/2}\cos x$ удовлетворяет уравнению $y'' - 2xy' + x^2 y = 0$.

16.2. Найдите $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ для функции, заданной: **1)** параметрически $x = te^t$, $y = t^2 e^t$; **2)** неявно $\sin(x - y) + y + x = 0$.

16.3. Найдите y''_{x^2} и $d^2 y$, если u и v – известные функции от x: **1)** $y = u^2 v$; **2)** $y = \operatorname{arcctg}(u/v)$; **3)** $y = u^v$.

16.4. Найдите $y^{(20)}$ для функции $y = x^3 \cos 5x$.

16.5. Найдите $y^{(100)}(0)$ для функции $y = x^2\sqrt{1+x}$.

16.6. Найдите $d^{10} y$ функции $y = x^2 \ln x$.

Домашнее задание

16.7. Докажите, что функция $y = (\sin x)/x$ удовлетворяет уравнению $xy'' + 2y' + xy = 0$.

16.8. Вычислите дифференциал второго порядка функции $y = 2x\sqrt{x-5}$ в точке $x_0 = 6$.

16.9. Найдите $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ для функции, заданной: **1)** параметрически $x = \ln\cos t$, $y = \ln\sin t$; **2)** неявно $e^{x-y} = x + y$.

16.10. Найдите y''_{x^2} и $d^2 y$, если u и v – известные функции от x, если $y = \sqrt{u^2 + v^2}$.

16.11. Найдите $y^{(n)}$ для функции $y = x^3 \cos 5x$.

16.12. Найдите $y^{(10)}(2)$ для функции $y = x^2 \ln x$.

16.13. Найдите $d^5 y$ функции $y = x \operatorname{arctg} x$.

2.17. Правило Лопиталя

Задачи

17.1. Найдите: **1)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{4+x} - \sqrt{2-x}}{x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-\sin x)}{\ln(1-x)}$.

17.2. Найдите пределы, преобразовав предварительно выражения:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1/x - 2/\sin 2x)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(2/x^2 - 1/(1-\cos x))$;

17.3. Найдите пределы при помощи формулы $u^v = e^{v\ln u}$: **1)** $\lim\limits_{x\to +0}(\arcsin x)^{x^2}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x + \operatorname{arctg}^2 x)^{1/\operatorname{arctg} x^2}$.

17.4. Найдите: **1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$.

Домашнее задание

17.5. Найдите: **1)** $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{a^x - x^a}{a-x}\right)^2, a>0,\quad a\neq 1$; **2)** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$; **3)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$; **4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi - 4\operatorname{arctg}(1/(x+1))}{x}$.

17.6. Найдите пределы, преобразовав предварительно выражения: **1)** $\lim\limits_{x\to 0}(1/(x\operatorname{arctg} x) - 1/x^2)$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}(1/x - 2/(e^{2x}-1))$.

17.7. Найдите пределы при помощи формулы $u^v = e^{v\ln u}$: **1)** $\lim\limits_{x\to +0} x^{\sin x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0}(\operatorname{tg}(x))^{\operatorname{tg} 2x}$.

2.18. Неопределённый интеграл. Замена переменных в интеграле

Задачи

Путём тождественных преобразований подынтегрального выражения найдите интегралы:

18.1. $\int\dfrac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}dx$; **18.2.** $\int\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}dx$; **18.3.** $\int\dfrac{x^2dx}{1+x^2}$; **18.4.** $\int\sin^2\dfrac{x}{2}dx$;

18.5. $\int\dfrac{xdx}{4+x^4}$; **18.6.** $\int(2x-3)^{10}dx$; **18.7.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$, **18.8.** $\int\dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

18.9. $\int\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}dx$; **18.10.** $\int\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x dx}{1+x^2}$.

Найдите интегралы:

18.11. $\int x\sqrt{x-3}dx$. **18.12.** $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{2x+3}}$. **18.13.** $\int x^2\sqrt[5]{2x^3+1}dx$. **18.14.** $\int\dfrac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$.

18.15. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$. **18.16.** $\int\dfrac{dx}{\operatorname{ch} x}$. **18.17.** $\int\dfrac{dx}{1+\cos^2 x}$. **18.18.** $\int\dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{\sin x\cdot\cos x}dx$.

18.19. $\int \frac{(x-2)dx}{2x^2+3x+2}$. **18.20.** $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$. **18.21.** $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{1+2x-3x^2}}$.

18.22. $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^6-x^4+x^2}}$.

Домашнее задание

18.23. Найдите функцию $F(x)$, которая имеет производную $3x^2-5x+8$ и при $x=2$ принимает значение 5.

18.24. Пользуясь определением неопределённого интеграла, проверьте следующее равенство $\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + C$.

18.25. Путём тождественных преобразований подынтегрального выражения найдите интегралы: **1)** $\int \frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}dx$; **2)** $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$; **3)** $\int e^{-x}2^{2x}3^{3x}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt{x^3}+8}{\sqrt{x}+2}dx$; **5)** $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{4+\operatorname{tg} x}}$; **6)** $\int \frac{\sqrt{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; **7)** $\int \operatorname{tg} x dx$;

8) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cdot \ln^3 \sin x}$; **9)** $\int \frac{x(3-x^2)}{16+x^4}dx$; **10)** $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$; **11)** $\int \frac{x^4 dx}{x^2+2}$; **12)** $\int \frac{x+1}{x^2+1}dx$;

18.26. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}dx$; **18.27.** $\int \frac{x^3\sin 2x+\sqrt{x}\cos x}{x^3\cos x}dx$; **18.28.** $\int \frac{dx}{x^2(9+x^2)}$;

18.29. $\int x\cos(1-4x^2)dx$; **18.30.** $\int \operatorname{tg}\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; **18.31.** $\int \frac{x^2-4}{x^2+4}dx$; **18.32.** $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}$;

18.33. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{\operatorname{ch} x}dx$; **18.34.** $\int \frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$.

2.19. Интегрирование по частям

Задачи

Найдите интегралы методом интегрирования по частям:

19.1. $\int x^3 \ln 2x dx$. **19.2.** $\int x \operatorname{arctg} 5x dx$. **19.3.** $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$. **19.4.** $\int x^2 e^{-\frac{x}{3}}dx$.

19.5. $\int \arccos 2x dx$. **19.6.** $\int e^x \cos 2x dx$. **19.7.** $\int \sqrt{1-x^2}dx$. **19.8.** $\int x\cos^2 3x dx$.

19.9. $\int \cos(\ln x)dx$. **19.10.** $\int \frac{\ln(\ln 2x)}{x}dx$.

Домашнее задание

19.11. $\int x^2 5^x dx$. **19.12.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$. **19.13.** $\int x^2 \ln(x+2) dx$. **19.14.** $\int \frac{xdx}{\cos^2 2x}$.

19.15. $\int x \ln^2 x dx$. **19.16.** $\int e^{2x} \sin^2 x dx$.

2.20. Интегрирование рациональных функций

Задачи

20.1. Найдите интегралы от рациональных функций: **1)** $\int \frac{7x-43}{x^2-11x+28} dx$.

2) $\int \frac{7x+5}{9x^2+12x+4} dx$. **3)** $\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)} dx$. **4)** $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx$. **5)** $\int \frac{4x^2+3}{(x-2)^3} dx$.

6) $\int \frac{x^3-2x^2+3}{x^2-4x+4} dx$. **7)** $\int \frac{x^2+2}{x^4+4} dx$. **8)** $\int \frac{x^2 dx}{x^4+x^2+1}$. **9)** $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$. **10)** $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+10\right)^3}$.

Домашнее задание

20.2. Найдите интегралы от рациональных функций: **1)** $\int \frac{x^2+3}{x^4+5x^2+9} dx$.

2) $\int \frac{x^3-6x^2+17x-8}{\left(x^2-6x+9\right)\left(x^2+2x+1\right)} dx$. **3)** $\int \frac{x^2+4x-6}{(x-3)^5} dx$. **4)** $\int \frac{x^5 dx}{\left(x^3+1\right)\left(x^3+8\right)}$.

5) $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2+2x+5\right)}$. **6)** $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$.

2.21. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей. Подстановки Чебышёва

Задачи

21.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-1}-\sqrt[3]{5x-1}}$. **21.2.** $\int \frac{\sqrt{1-3x}+\sqrt[4]{1-3x}}{2\sqrt{1-3x}} dx$. **21.3.** $\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}$.

21.4. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$. **21.5.** $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9+x^2}}$. **21.6.** $\int \sqrt{x^2-9} dx$.

Домашнее задание

21.7. $\int \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1} dx$. **21.8.** $\int \frac{x^2+\sqrt[3]{2+x}}{\sqrt{2+x}} dx$. **21.9.** $\int \frac{xdx}{(4x-3)\sqrt{4x-3}}$.

21.10. $\int x^{-5}\left(1-x^4\right)^{\frac{1}{2}}dx$. **21.11.** $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

2.22. Интегрирование рационально-тригонометрических функций

Задачи

22.1. $\int \cos^3 3x dx$. **22.2.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$. **22.3.** $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$. **22.4.** $\int \mathrm{ctg}^5 x dx$.

22.5. $\int \frac{\cos x dx}{\sin x\left(2+\sin x\right)}$. **22.6.** $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx$. **22.7.** $\int \frac{\sin 2x dx}{3+4\sin^2 x}$.

22.8. $\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+5}$. **22.9.** $\int \frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$.

22.10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$. **22.11.** $\int \cos 4x \cos 7x dx$.

Домашнее задание

22.12. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$. **22.13.** $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^3 x}$. **22.14.** $\int \frac{dx}{5+7\cos x}$. **22.15.** $\int \mathrm{ctg}^7 x dx$.

22.16. $\int \frac{dx}{4\cos x-3\sin x-5}$. **22.17.** $\int \frac{\mathrm{ctg}\, x dx}{\mathrm{ctg}\, x+2}$. **22.18.** $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

2.23. Интегрирование квадратичных иррациональностей

В интегралах $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ используют следующие подстановки Эйлера: **1)** $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x\pm t,\ a>0$; **2)** $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}\pm tx,\ c>0$.

В частных случаях удобно ипользовать тригонометрические или гиперболические подстановки:

а) $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\ x=a\sin t,\ x=a\cos t$;

б) $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,\ x=a\,\mathrm{tg}\,t,\ x=a\,\mathrm{sh}\,t$;

в) $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,\ x=\frac{a}{\sin t},\ x=\frac{a}{\cos t},\ x=a\,\mathrm{ch}\,t$.

Задачи

23.1. $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$. **23.2.** $\int\sqrt{x^2-6x-7}dx$. **23.3.** $\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

23.4. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}dx}{2+x^2}$. **23.5.** $\int\frac{x^3dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$.

Домашнее задание

23.6. $\int\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$. **23.7.** $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$.

23.8. $\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$, $x>0$. **23.9.** $\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)\sqrt{9-x^2}}$.

2.24. Определённый интеграл

Задачи

24.1. Найдите интегральную сумму S_n и вычислите интеграл для функции $f(x)=1+x$ на отрезке $[-1,4]$, разделяя его на n равных отрезков и выбирая значения ξ_k в серединах этих отрезков.

24.2. Вычислите: **1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+...+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

24.3. Применяя формулу интегрирования по частям, вычислите:

1) $\int\limits_0^{2\pi}x^2\cos xdx$; **2)** $\int\limits_0^{\sqrt{3}}x\operatorname{arctg}xdx$.

24.4. Применяя замену переменной, вычислите интегралы: **1)** $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$;

2) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}dx$.

24.5. Докажите, что если $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, то $\int\limits_0^{\pi/2}f(\sin x)dx=\int\limits_0^{\pi/2}f(\cos x)dx$.

24.6. Получив рекуррентную формулу, вычислите интегралы: **1)** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx$;

2) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx$.

Домашнее задание

24.7. Вычислите $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$.

24.8. Найдите $\int\limits_0^2 f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ при } 0 \le x \le 1, \\ 2-x, \text{ при } 1 < x \le 2. \end{cases}$

24.9. Вычислите: **1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)$.

24.10. **1)** Докажите, что если $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, то $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx$. **2)** Вычислите $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

24.11. Вычислите интегралы: **1)** $\int\limits_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx$; **2)** $\int\limits_0^e (x\ln x)^2 dx$; **3)** $\int\limits_0^e (x\sin x)^2 dx$.

2.25. Приложения определенного интеграла. Вычисление площадей

Задачи

25.1. Найдите площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольных координатах: **1)** $y=x^2,\ x+y=2$;

2) $y=(x+1)^2,\ x=\sin\pi y,\ y=0\ (0\le y\le 1)$.

25.2. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho=a(1+\cos\varphi),\ a>0$ (*кардиоида*), заданной в полярных координатах.

25.3. Перейдя к полярным координатам, вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=6x,\ y-x\sqrt{3}=0,\ y+x=0$.

25.4. Найдите площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ и осью абсцисс.

Домашнее задание

25.5. В каком отношении парабола $y^2=2x$ делит площадь круга $x^2+y^2=8$?

25.6. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho^2=a^2\cos 2\varphi,\ a>0$

(*лемниската*).

25.7. Перейдя к полярным координатам, найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy,\ a>0$ (*лемниската*).

25.8. Вычислите площадь, ограниченную эллипсом $x=2\cos t,\ y=3\sin t$.

2.26. Приложения определенного интеграла. Вычисление длин дуг и объемов тел вращения

Задачи

26.1. Найдите длину кривых: **1)** $y^2=2px,\ 0\le x\le 1$; **2)** $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

26.2. Найдите длину кривой $\rho=a\left(1+\cos\varphi\right)$ (*кардиоида*).

26.3. Найдите объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной кривыми $y=2x-x^2,\ y=0$: **1)** вокруг оси Ox; **2)** вокруг оси Oy.

26.4. Найдите объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной кривыми $y=\sin x,\ y=1,\ 0\le x\le \pi/2$ вокруг оси Oy.

№№ 2431, 2435, 2437, 2440, 2443, 2448, 2450, 2472, 2473 (сборник задач I).

Домашнее задание

26.5. Найдите длину дуги кривых: **1)** $y=\ln\cos x,\ 0\le x\le a<\pi/2$;

2) $\rho=a\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$ (*спираль Архимеда*); **3)** $\rho=a\sin^2\dfrac{\varphi}{3}$.

26.6. Найдите объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной кривыми $y=\sin x,\ y=0,\ 0\le x\le\pi$: **1)** вокруг оси Ox; **2)** вокруг оси Oy.

26.7. Найдите объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной кривой $x^2+(y-b)^2=a^2,\ 0<a\le b$, вокруг оси Ox.

2.27. Несобственные интегралы первого рода. Признаки сходимости

Задачи

№№ 2338, 2344, 2359, 2367 (сборник задач I);

№№ 9.13 – 9.22 (сборник задач IV)

Домашнее задание

№№ 9.1 – 9.12 (сборник задач IV)

2.28. Несобственные интегралы второго рода. Абсолютная и условная сходимость

Задачи

№№ 2335, 2337, 2362, 2363, 2364, 2369 , 2378, 2379 (сборник задач I);
№№ 9.23 ─9.27 (сборник задач IV).

Домашнее задание

№№ 9.28 ─9.33 (сборник задач IV); №№ 2360, 2370 а) (сборник задач I).

2.29. Формула Тейлора

$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$ – формула Тейлора для функции $f(x)$ с центром в точке x_0, $R_n(x)-n$-ый остаточный член формулы Тейлора. При $x_0=0$ формулу Тейлора называют формулой Маклорена.

Формула Маклорена для чётной функции имеет вид $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$, а для нечётной $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+2})$.

Задачи

29.1. Многочлен $P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ разложите по целым положительным степеням $(x+1)$.

29.2. Функцию $f(x)=\dfrac{1}{2x+3}$ разложите: **1)** по формуле Маклорена до $o\left(x^n\right)$; **2)** по степеням $(x-1)$ до $o\left((x-1)^n\right)$.

29.3. Функцию $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2+x-12}$ разложите по формуле Маклорена до $o\left(x^n\right)$.

29.4. Функцию $f(x)=\ln\left(5-4x\right)$ разложите по формуле Маклорена до $o\left(x^n\right)$.

29.5. Функцию $f(x)=\dfrac{(1+x)^{10}}{(1-2x)^4(1+2x)^6}$ разложите по формуле Маклорена до $o\left(x^2\right)$.

29.6. Функцию $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ разложите по формуле Маклорена до $o\left(x^8\right)$.

29.7. Функцию $f(x)=e^x\ln(1+x)$ разложите по формуле Маклорена до $o\left(x^5\right)$.

29.8. Функцию $f(x)=\ln\cos x$ разложите по формуле Маклорена до $o\left(x^6\right)$.

29.9. Функцию $f(x)=e^{-2x}-e^{2x}+2x\left(e^{-2x}+e^{2x}\right)$ разложите по формуле Маклорена до $o\left(x^{2n}\right)$.

Домашнее задание

29.10. Функцию $f(x)=\left(x^3-8\right)^2$ представьте в виде многочлена по степеням $\left(x-2\right)$.

29.11. Функцию $f(x)=\sqrt{1-2x+x^2}-\sqrt[3]{1-3x+x^3}$ разложите по формуле Маклорена до $o\left(x^3\right)$.

29.12. Функцию $f(x)=e^{2x-x^2}$ разложите по формуле Маклорена до $o\left(x^5\right)$.

29.13. Функцию $f(x)=\sin\left(\sin x\right)$ разложите по формуле Маклорена до $o\left(x^3\right)$.

29.14. Функцию $f(x)=\sqrt{x}$ разложите по степеням $(x-1)$ до $o\left((x-1)^3\right)$.

29.15. Функцию $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$ разложите по формуле Маклорена до $o\left(x^{2n}\right)$.

2.30. Приложения формулы Тейлора

Для оценки погрешности, получаемой при замене функции ее приближенным значением, удобно использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\Delta x^k+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

Для раскрытия неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, т.е. при вычислении $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to x_0$, используют метод выделения главной части функций.

Задачи

30.1. С помощью формулы Тейлора приближённо вычислите $\sqrt[5]{250}$ и оцените погрешность.

30.2. Вычислите $\lg 11$ с точностью до 10^{-5}.

30.3. Вычислите: **1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$;.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\sin x}-\ln(1-x/2)-1}{\operatorname{tg}x-\sin x}$; **4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-x-\operatorname{ch}x}{\sin x-\operatorname{arctg}x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sqrt{x}-\sin(x-1)-2\cos(x-1)}{\operatorname{arc}\operatorname{tg}(x-1)-\ln x}$; **6)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left((x^3-x^2+x/2)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right)$; **8)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-x^2\ln\left(1+1/x\right)\right)$.

Домашнее задание

30.4. Вычислите: **1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\sin x-x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1+\sin x}+\ln(1-x)}{\operatorname{tg}x-\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\sin\pi x)}{\ln(1+\ln x)}$; **4)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$; **5)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left((x^2-x+2)e^{1/x}-\sqrt{x^4+x^2+1}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left((x^3+x)\sin\dfrac{1}{x}-\sqrt[3]{x^6-3x^4+1}\right)$.

30.5. С помощью формулы Тейлора приближённо вычислите $\arcsin 0,45$ и оцените погрешность.

30.6. Вычислите $\sin 1^\circ$ с точностью до 10^{-8}.

2.31. Исследование функций

Задачи

№№ 1269, 1301, 1436, 1442, 1472, 1473, 1481 (сборник задач I);
№№ 9.25, 9,34 (сборник задач III).

Домашнее задание

№№ 1268, 1299, 1433, 1434, 1471 (сборник задач I).

3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

3.1. Вариант коллоквиума по теме «Теория пределов»

1. Существует ли сходящаяся последовательность из целых чисел?
2. Пусть последовательности $(x_n), (y_n)$ – сходятся. Может ли расходится частное $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$? При каком условии?
3. Сколько различных корней имеет дробь $\sqrt[10]{\frac{2+i}{1-i}}$?
4. Верно ли утверждение, что любая неограниченная последовательность является бесконечно большой?
5. Обязательно ли сходится последовательность (x_n), если её подпоследовательности (x_{2n+1}) и (x_{2n}) сходятся?
6. Для функции $f(x)=\frac{2x}{1+x}$ на промежутке $0 \le x < +\infty$ указать: а) $\sup f(x)$; б) $\inf f(x)$.
7. Верно ли равенство $o(x+x^2)=o(x^2)$ при $x \to 0$?
8. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ непрерывна на каждом отрезке $[\alpha;\beta] \subset (a;b)$, то она будет непрерывна на интервале $(a;b)$?
9. Является ли непрерывность функции $f(x)$ в точке a слева и справа ***необходимым и достаточным*** условием непрерывности $f(x)$ в точке a?
10. Всякая ли функция, ***равномерно*** непрерывная на некотором промежутке, будет ***непрерывной*** на этом промежутке?
11. Существует ли такое значение a, при котором будет непрерывной функция $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{1+\sin x^2}-1}{x^2}, & x \le 0, \\ x^2+a, & x>0. \end{cases}$?
12. Может ли ограниченная на $[a;b]$ функция иметь разрывы второго рода?
13. Разложить на простые дроби $f(x)=\frac{2}{(x-1)(x^2+1)}$.

3.2. Задания для подготовки к контрольной работе по теме «Теория пределов»

1. Найти коэффициент при x^{24} в разложении $\left(x^{-0,2}-3x^{5}\right)^{10}$.

2. Найти наибольший коэффициент многочлена $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^{4}$.

3. Доказать, что выражение $C_{n+k}^{2}+C_{n+k+1}^{2}$ есть точный квадрат.

4. Записать число z в алгебраической и тригонометрической формах: $z=\frac{i}{\left(1+i\right)^{2}}$.

5. Решить уравнение $z^{4}+3-3i=0$.

6. Записать число z в алгебраической форме: $z=\left(\frac{i^{8}+\sqrt{3}i^{5}}{4}\right)^{5}$

7. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}\cdot 6^{n}-5^{n+1}}{5^{n}-\left(-1\right)^{n+1}\cdot 6^{n+1}}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}-\sqrt{n\left(n-1\right)}\right)$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(16n^{3}+2\right)\left(n^{2}+1\right)}}{\sqrt[5]{n^{7}+n+4}}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{5+3^{n+1}}$

8. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 6x\right)^{ctg^{2}x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{101}-101x+100}{x^{2}-2x+1}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^{2}-x^{2}}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(x^{2}+2x\right)}{\ln\left(1+\sqrt{x^{3}}\right)}$.

9. Разложить на простые дроби: $f(x)=\frac{x}{(x-1)^{2}(x^{2}+2x+2)}$

3.3. Задания для подготовки к контрольной работе по теме «Дифференциальное исчисление»

1. Найти производные y''_{xx} функций, заданных неявно уравнениями:

а) $(2a-x)y^2=x^3$; **б)** $e^{xy}+\dfrac{x}{y}=e$.

2. Найти производные y''_{xx} функций, заданных параметрически:

а) $\begin{cases} x=\ln\sin\left(t/2\right), \\ y=\cos\left(t/2\right). \end{cases}$, **б)** $\begin{cases} x=ach^2t, \\ y=bsht. \end{cases}$

3. Написать уравнение касательной к графику кривой в указанной точке:

а) $y=x^3/(2-x)^2$ в точке $\left(6;\dfrac{27}{2}\right)$; **б)** $x^3+y^2+2x-6=0$ в точке $(-1;3)$.

4. Найти: **а)** $d^{10}(x^2\cdot\sin\dfrac{x}{2})$; **б)** $d^{18}((x+2)^2\cdot\ln 2x)$.

5. Найти производные сложных функций **а)** $y=\ln\dfrac{x^2+a}{\sqrt{x^4+b^2}}+\dfrac{a}{b}arctg\,\dfrac{x^2}{b}$;

б) $y=(\cos 6x)^{tgx}+2^{\arccos\sqrt{3x-2}}$; **в)** $y=f(\sqrt{x^2+a^2})$, $y'''_{xxx}=?$

6. Найти пределы с помощью правила Лопиталя (Штольца):

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}-2x}{x-\sin x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2arctg\sqrt{x})\cdot\sqrt{x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$.

3.4. Задания для подготовки к контрольной работе по теме «Интегральное исчисление»

1. Вычислить интегралы, используя метод поднесения под дифференциал или замену переменной: **а)** $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$; **б)** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+13}}dx$; **в)** $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-5}}$; **г)** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$; **д)** $\int (3-2x)^{13}dx$; **е)** $\int x^5\sqrt{1-2x^{12}}dx$; **ж)** $\int xe^{-x^2}dx$; **з)** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; **и)** $\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x dx$; **к)** $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$.

2. Вычислить интегралы, используя метод интегрирования по частям: **а)** $\int xe^{\sqrt{x}}dx$; **б)** $\int x^3\sin 2x^2 dx$; **в)** $\int x^2 \operatorname{ch} 3x dx$; **г)** $\int x^2\cos\sqrt{x}dx$; **д)** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$; **е)** $\int x\arcsin\sqrt{x}dx$; **ж)** $\int \arcsin^2 x dx$; **з)** $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}dx$.

3. Вычислить интегралы от дифференциальных биномов: **а)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$; **б)** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[4]{\left(2+x^3\right)^5}}$.

4. Вычислить интегралы от рационально-тригонометрических функций: **а)** $\int \frac{dx}{\cos^6 x-\sin^6 x}$; **б)** $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$; **в)** $\int \frac{dx}{\cos x+\sin x}$; **г)** $\int \frac{dx}{1+4\cos x}$; **д)** $\int \frac{dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$.

5. Вычислить интегралы от квадратичных иррациональностей: **а)** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$; **б)** $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2+x+1}}dx$; **в)** $\int \frac{3-2x}{\sqrt{3+8x-4x^2}}dx$; **г)** $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

6. **а)** Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат, кривой $y=x^2+2x-3$ и касательной к ней в точке $(2;5)$. **б)** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=1-x^2$ и нормалью к ней, проведённой через точку параболы с абсциссой $x=-1$. **в)** Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, кривой $y=(x-1)^5+1$ и касательной к ней, параллельной прямой $10x-2y-5=0$. **г)** Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=5(x+1)^2$ и касательными к ней, проведёнными из точки $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

7. Вычислить объём тела, образованного при вращении около оси Ox фигуры, ограниченной кривыми: **а)** $y=\sin x,\ y=\cos x, y=0, 0\le x\le \pi/2$; **б)** $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}},\ y=0,\ x=\dfrac{\pi}{3},\ x=\dfrac{\pi}{2}$.

8. Вычислить объём тела, образованного при вращении около оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y=\cos x^2, y=1, 0\le x\le 1$.

9. Вычислить: **1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x - x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin x}{x\cos x-\sin x}$, используя формулу Тейлора.

3.5. Индивидуальные задания по теме: «Исследование функций. Построение графиков»

1. **а)** $y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$, **б)** $y=e^x-x$, **в)** $y=\cos x-\sin 2x/2$.

2. **а)** $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, **б)** $y=xe^{-2x}$, **в)** $y=\cos x+\cos 2x/2$.

3. **а)** $y=\sqrt{x^2-x}$, **б)** $y=x^2e^{-x}$, **в)** $y=\sin x-\sin 2x/2$.

4. **а)** $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$, **б)** $y=x^3e^{-x}$, **в)** $y=\sin x+\sin 2x/2$.

5. **а)** $y=\sqrt[3]{x^2(6-x)}$, **б)** $y=(x^2-2)e^{-2x}$, **в)** $y=\cos x+\sin 2x/2$.

6. **а)** $y=\dfrac{8x}{(x-2)^2}$, **б)** $y=(1-x)e^{3x+1}$, **в)** $y=\cos x-\cos 2x/2$.

7. **а)** $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, **б)** $y=e^{1-x^2}$, **в)** $y=\sin x-\sin^2 x$.

8. **а)** $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$, **б)** $y=e^{4x-x^2}$, **в)** $y=\sin 3x-3\sin x$.

9. **а)** $y=\sqrt[3]{1-x^3}$, **б)** $y=xe^{-x^2/2}$, **в)** $y=\sin 3x+3\sin x$.

10. **а)** $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$, **б)** $y=(x^2+2)e^{-x^2}$, **в)** $y=\cos 3x+3\cos x$.

11. **а)** $y=x\sqrt[3]{(x+1)^2}$, **б)** $y=e^{-x}/(1-x)$, **в)** $y=\cos 3x-3\cos x$.

12. **а)** $y=\sqrt[3]{(x+2)(x-1)^2}$, **б)** $y=e^{(1-x)/(1+x)}$, **в)** $y=\cos 2x\cos x$.

13. **а)** $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$, **б)** $y=(x-2)e^{-1/x}$, **в)** $y=\sin 2x\cos x$.

14. **а)** $y=\dfrac{(x-1)^3}{2+2x-x^2}$, **б)** $y=(x+2-3/x)e^{1/x}$, **в)** $y=\sin x\cos 2x$.

15. **а)** $y=\sqrt[3]{(x+2)^2(4-x)}$, **б)** $y=xe^{1/x^2}$, **в)** $y=\sin x\sin 2x$.

16. **а)** $y=\dfrac{8x+16}{x^2}$, **б)** $y=e^x-x$, **в)** $y=\cos 3x-3\cos x$.

17. **а)** $y=\dfrac{(x-1)^3}{2x^2}$, **б)** $y=xe^{-2x}$, **в)** $y=\cos 2x\cos x$.

18. **а)** $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$, **б)** $y=x^2e^{-x}$, **в)** $y=\sin 2x\cos x$.

19. **а)** $y=\sqrt[3]{1+x^3}$, **б)** $y=x^3e^{-x}$, **в)** $y=\sin x\cos 2x$.

20. **а)** $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x+2}}$, **б)** $y=(x^2-2)e^{-2x}$, **в)** $y=\sin x\sin 2x$.

21. **а)** $y=\dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$, **б)** $y=(1-x)e^{3x+1}$, **в)** $y=\cos x-\sin 2x/2$.

22. **а)** $y=3\sqrt[3]{x}-x$, **б)** $y=e^{1-x^2}$, **в)** $y=\cos x+\cos 2x/2$.

23. **а)** $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$, **б)** $y=e^{4x-x^2}$, **в)** $y=\sin x-\sin 2x/2$.

24. **а)** $y=\sqrt{9x^2+2x^3}$, **б)** $y=xe^{-x^2/2}$, **в)** $y=\sin x+\sin 2x/2$.

25. **а)** $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, **б)** $y=(x^2+2)e^{-x^2}$, **в)** $y=\cos x+\sin 2x/2$.

26. **а)** $y=x^2\sqrt{x+1}$, **б)** $y=e^{-x}/(1-x)$, **в)** $y=\cos x-\cos 2x/2$.

27. **а)** $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$, **б)** $y=e^{(1-x)/(1+x)}$, **в)** $y=\sin x-\sin^2 x$.

28. **а)** $y=x\sqrt[3]{(x+1)^2}$, **б)** $y=(x-2)e^{-1/x}$, **в)** $y=\sin 3x-3\sin x$.

29. **а)** $y=\sqrt[3]{\dfrac{(3x-2)^2}{x-1}}$, **б)** $y=(x+2-3/x)e^{1/x}$, **в)** $y=\sin 3x+3\sin x$.

30. **а)** $y=\sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2}$, **б)** $y=xe^{1/x^2}$, **в)** $y=\cos 3x+3\cos x$.

31. **а)** $y=\sqrt[3]{x^2(6-x)}$, **б)** $y=(x^2-2)e^{-2x}$, **в)** $y=\cos x+\sin 2x/2$.

32. **а)** $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$, **б)** $y=(x-2)e^{-1/x}$, **в)** $y=\sin 2x\cos x$.

33. **а)** $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, **б)** $y=e^{1-x^2}$, **в)** $y=\sin x-\sin^2 x$.

34. **а)** $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$, **б)** $y=x^3e^{-x}$, **в)** $y=\sin x+\sin 2x/2$.

3.6. Задания для подготовки к зачету

Номера задач и упражнений из книги [1]

1. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович — М.: АСТ: Астрель, 2010. – 558 с.

1. Введение

1) Решить уравнение $C_{x+1}^{x-2}+2C_{x-1}^{3}=7(x-1)$.

2) **а)** В разложении многочлена найти коэффициент при x^4: $\left(9-2x\right)^7$; при x^3: $\left(2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$; при x^5: $\left(\dfrac{1}{3}-2x\right)^7$. **б)** найти целые члены разложения: $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^5$, $\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}\right)^5$, $\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)^{12}$.

3) **а)** Используя метод математической индукции, доказать, что число $2^{2n-1}+3n+4$ при любом $n\in N$ кратно 9; **б)** №№ 1, 2, 9.б).

4) Вычислить:

а) $\dfrac{2+3i}{-1-i}$, $\dfrac{i+6}{7-2i}$, $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{2+2i}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\dfrac{\left(2+2i\right)^{20}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{15}}$, $\dfrac{\left(-3-3i\right)^{40}}{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{25}}$.

5) Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям: **а)** $2<\left|z\right|<4,\ \dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$; **б)** $\left|z\right|=2+3\operatorname{Im}z$; **в)** $z^2-\bar{z}^2=1$.

2. Предел последовательности

№№ 46, 47, 49, 50, 52, 56, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-4n+3})$.

3. Предел функции. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

№№ 405, 413, 419, 421, 435, 437, 455, 475, 474.а), 477, 483, 493, 514, 519, 523, 529, 541, 650, 651, 653, 656.

4. Непрерывность. Точки разрыва

№№ 666, 676, 679, 680, 731 а), в), 740 а)-е).

5. Производная. Дифференциал

№№ 860, 865, 880, 887, 895, 904, 928, 930, 961, 963, 1039, 1042, 1048, 1052, 1054, 1055, 1061, 1090, 1091, 1092.

6. Производные и дифференциалы высших порядков

№№ 1115, 1114, 1133, 1134, 1135, 1141, 1143, 1148,1149, 1161,1165,1163, 1171, 1173, 1193, 1201, 1204, 1207.

7. Раскрытие неопределенностей

№№ 1319, 1323, 1332, 1338, 1342, 1345, 1349, 1354, 1355.

8. Неопределенный интеграл

№№ 1634, 1646, 1656, 1669, 1675, 1681, 1686, 1694, 1703, 1709, 1778,1786, 1795, 1803, 1804, 1811, 1821, 1828,1869,1874,1883,1927, 1930, 1966, 1967, 1982, 1987, 1989, 1991, 1993, 2003, 2025, 2026, 2035.

9. Определенный интеграл и его приложения

№№ 2211, 2218, 2239, 2240, 2245, 2249, 2271, 2274, 2398, 2400, 2418, 2420, 2431, 2435, 2437, 2440, 2443, 2448, 2450.

10. Несобственные интегралы

№№ 2335, 2338, 2344, 2359, 2361, 2363, 2366, 23692378, 2379, 2392.

11. Формула Тейлора

№№ 1377, 1381, 1384, 1385, 1398, 1399, 1405, 1406.а),б).

12. Исследование функций

№№ 1433, 1434, 1442, 1299, 1301, 1302, 1305, 1472, 1473, 1477, 1481.

3.7. Вопросы к экзамену

1. Точные границы множества. Теорема о границах.
2. Формы представления комплексных чисел. Операции с комплексными числами. Свойства комплексных чисел.
3. Алгебра многочленов. Теорема Безу. Теоремы о корнях многочлена.
4. Предел числовой последовательности. М-лемма.
5. Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности.
6. Предельный переход в неравенствах.
7. Теорема о сжатой переменной.
8. Свойства бесконечно малых последовательностей. Теорема о представлении сходящейся последовательности.
9. Теорема о сходимости монотонной последовательности (теорема Вейерштрасса).
10. Число *e* как предел последовательности.
11. Лемма о вложенных отрезках.
12. Принцип выбора (теорема Больцано – Вейерштрасса).
13. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
14. Два определения предела функции. Теорема об односторонних пределах.
15. Критерий Коши существования предела функции.
16. Первый и второй замечательные пределы.
17. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.
18. Непрерывность сложной функции.
19. Стабилизация знака непрерывной функции Локальная ограниченность.
20. Монотонные функции. Точки разрыва монотонной функции.
21. Использование непрерывности при вычислении пределов.
22. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций.
23. Первая и вторая теоремы Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции.
24. Теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на отрезке функции.
25. Производная функции. Односторонние производные.
26. Геометрический и физический смысл производной.
27. Непрерывность дифференцируемой функции.
28. Производная обратной функции.
29. Производная сложной функции. Логарифмическая производная.
30. Производные функций, заданных неявно и параметрически.
31. Дифференциал. Критерий дифференцируемости функции.
32. Инвариантность формы первого дифференциала.
33. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.
34. Нарушение инвариантности формы у дифференциалов высших порядков.

35. Теорема Ферма.
36. Теорема Ролля.
37. Теорема Коши о средних значениях.
38. Теорема Лагранжа.
39. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.
40. Определение и свойства неопределенного интеграла.
41. Метод интегрирования по частям. Методы рационализации.
42. Определение и условия существования определенного интеграла (необходимое условие, критерий).
43. Достаточные условия равномерной непрерывности. Теорема Кантора.
44. Классы интегрируемых функций.
45. Свойства определенного интеграла.
46. Теоремы о среднем для определенного интеграла.
47. Свойства определенного интеграла с переменным верхним пределом.
48. Основная теорема интегрального исчисления.
49. Замена переменной в определенном интеграле.
50. Вычисление площади криволинейной трапеции и криволинейного сектора.
51. Вычисление длины кривой (3 способа задания кривой).
52. Вывод формулы Тейлора. Различные формы остаточного члена.
53. Теорема о единственности многочлена Тейлора.
54. Формулы Маклорена основных элементарных функций.
55. Применение формулы Тейлора.
56. Условия монотонности.
57. Экстремум функции. Необходимые условия экстремума.
58. Первое и второе достаточные условия экстремума.
59. Условия выпуклости функции.
60. Точки перегиба графика функции. Первое и второе достаточные условия точек перегиба.
61. Асимптоты графика функции.
62. Свойства несобственных интегралов 1-го и 2-го рода (НИ 1 и НИ 2).
63. Признаки абсолютной сходимости НИ.
64. Условная сходимость НИ. Признак Дирихле.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

4.1. Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учебник / Г.М. Фихтенгольц — СПб.: Лань, 2020. — Часть 1. — 444 с.

2. Тер-Крикоров А.М. Курс математического анализа. / А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. – 672 с.

3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1 / Л.Д. Кудрявцев — М.: Физматлит, 2015.— 444 с.

4. Абрашина-Жадаева Н.Г. Векторный и тензорный анализ в примерах и задачах = Vector and Tensor Analysis through Examples and Exercises : учеб. пособие / Н.Г. Абрашина-Жадаева, И.А. Тимощенко. – Мн: БГУ, 2019. – 250 с.

5. Чупригин О.А. Математический анализ. Теория в тестах. / О.А. Чупригин — Мн.: БГУ, 2019. — 184 с.

6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.
/ Б.П. Демидович — М.: Лань, 2020.— 624 с.

Дополнительная литература

7. Ильин В.А. Основы математического анализа. Ч.1 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк — М.: Физматлит, 2005. — 648 с.

8. Русак В. Курс вышэйшай матэматыкі. Алгебра і геаметрыя, аналіз функцый адной зменнай. / В. Русак, Л. Шлома, В. Ахраменка, А. Крачкоўскі — Мн., Вышэйшая школа, 1994.— 431 с.

9. Чупригин О.А. Математический анализ. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. / О.А. Чупригин — Мн.: БГУ, 2010. —270 с.

10. Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу. / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В. Н. Чубариков — М., Высшая школа, 1999.— 695 с.

11. Кашевский В.В. Математический анализ. Курс лекций. / В.В. Кашевский — Мн., БДУ. 2008.— 151 с.

12. Абрашына-Жадаева Н.Р. Вышэйшая матэматыка ў прыкладах і задачах. Матэматычны аналіз. / Н.Р. Абрашына-Жадаева, В.К. Ахраменка, С.С. Бяляўскі, Л.Л. Бярозкіна, А.А. Чупрыгін — Мн., БДУ. 2007.— 154 с.

13. Высшая математика. Сборник задач: учеб. пособие. В 3 ч. Ч.1. Аналитическая геометрия. Анализ функции одной переменной / В.К. Ахраменко [и др.]; под ред. Н.Г. Абрашиной-Жадаевой, В.Н. Русака. – Мн.: БГУ, 2013. – 359 с.

14. Абрашина-Жадаева Н.Г. Основы векторного и тензорного анализа. Теория. Задачи. / Н.Г. Абрашина-Жадаева, И.А. Тимощенко – Мн., БГУ. 2011. – 255 с.

15. Сидоров Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного. / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин — М., Наука, 1989.— 480 с.

16. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. / А.И. Маркушевич — М., Наука, 1978. – 528 с.
17. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко – М., Наука, 1981. – 305 с.
18. Краснов М.Л. Векторный анализ / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко — М.: Наука, 1978. — 160 с.
19. Зорич В.А. Математический анализ: в 2 т. / В. А. Зорич – М., Наука, 1981.
20. Никольский С.М. Курс математического анализа: в 2 т. / С.М. Никольский – М.: Наука, 1990.
21. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. / Д.Я. Стройк – М.: Наука, 1978.– 336 с.
22. Гурвиц А. Теория функций. / А. Гурвиц, Р. Курант – М.: Наука, 1968.– 648 с.

4.2. Электронные ресурсы

1. Кашевский В.В. УМК Математический анализ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/110421 – Дата доступа: 02.03.2015;
2. Кашевский В.В., Ильинкова Н.И. УМК Математический анализ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/170018 – Дата доступа: 29.03.2017.

4.3. Программа по математическому анализу

Егоров А.А., Ильинкова Н.И., Рыбаченко И.В., Чехменок Т.А. Математический анализ: учебная программа [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/247693 – Дата доступа: 30.06.2020;

Содержание учебного материала

Раздел 1. Введение в анализ

Тема 1.1. Элементы математической логики. Множества и операции над ними. Границы числовых множеств.

Тема 1.2. Метод математической индукции. Бином Ньютона.

Тема 1.3. Действительные числа. Комплексные числа и действия над ними.

Тема 1.4. Разложение многочленов на множители. Разложение правильных рациональных дробей на простейшие.

Раздел 2. Теория пределов

Тема 2.1. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Тема 2.2. Монотонные последовательности. Вложенные отрезки. Число e как предел последовательности.

Тема 2.3. Подпоследовательности. Принцип выбора. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

Тема 2.4. Предел функции в точке по Коши. Критерий Гейне существования предела функции. Локальные свойства предела функции. Замечательные пределы.

Тема 2.5. Непрерывные функции. Точки разрыва. Непрерывность элементарных функций.

Тема 2.6. Сравнение функций. Основные асимптотические разложения.

Раздел 3. Основы дифференциального исчисления

Тема 3.1. Производная функции, ее физический и геометрический смысл. Дифференцируемые функции. Дифференциал. Правила дифференцирования.

Тема 3.2. Формулы дифференцирования. Производные сложных, обратных, параметрических и неявных функций.

Тема 3.3. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

Тема 3.4. Основные теоремы о дифференцируемых функциях. Правило Лопиталя.

Раздел 4. Интегральное исчисление функции одной переменной

Тема 4.1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Тема 4.2. Методы интегрирования по частям и замена переменной.

Тема 4.3. Интегрирование рациональных функций.

Тема 4.4. Метод рационализации.

Тема 4.5. Определенный интеграл. Условия существования. Основные свойства. Равномерная непрерывность функций. Теорема Кантора. Классы интегрируемых функций.

Тема 4.6. Формула Ньютона−Лейбница. Теоремы о среднем. Методы вычисления определенного интеграла.

Тема 4.7. Приложения определенного интеграла.

Раздел 5. Несобственные интегралы

Тема 5.1. Несобственные интегралы первого и второго рода. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сравнения. Признак Дирихле.

Раздел 6. Формула Тейлора. Исследование функций

Тема 6.1. Формула Тейлора. Различные виды остаточного члена. Разложения основных элементарных функций.

Тема 6.2. Исследование функций. Построение графиков функций.