занных с упоминанием слов и словосочетаний в поисковых системах, приводит к мультиколлинеарности и ошибками спецификации.

Для описания взаимосвязи между показателями, модель была специфицирована следующим образом: (а) учитывалась инерционность индексов с помощью переменной авторегрессии (б) рассмотрена квадратичная форма модели (инвертированная U-образная кривая), которая отражает известную закономерность: чем чаще упоминается словосочетание, тем большее влияние это будет оказывать на индекс, но при редком упоминании или при постоянном – эффект будет снижаться. При оценке модели с включением индекса глобализации, применялось преобразование переменных с учетом разночастотности данных. Также проводилась коррекция на сезонность в начале календарного года. В результате получена оценка индекса глобализации KOF на основе эконометрической модели вида:

$$\underset{}{Z_t} = -11{,}18 + \underset{(0{,}005)}{0{,}556\ GTI_t} - \underset{(0.0001)}{0{,}004\ GTI_t^2} + \underset{(0.0002)}{0{,}877\ Z_{t-1}} \quad \underset{(0.000)}{} R^2 = 0{,}972 \tag{1}$$

где Z_t – индекс глобализации KOF для Беларуси; GTI_t – индекс упоминания словосочетания «Республика Беларусь» в Google Trend.

Предварительная оценка прогнозных качеств модели была проведена на основе ретроспективного прогноза на 2017 год, т. е. модель переоценивалась на данных до 2016 года, затем оценивался прогноз и делался вывод о его точности на основе средней относительной ошибки прогноза в процентах (MAPE). Поскольку ошибка прогноза на двенадцать месяцев 2017 года составила всего 0,46 %, это позволяет сделать вывод о пригодности модели (1) для построения прогнозов. Согласно полученному прогнозу индекс глобализации KOF до декабря 2020 года будет демонстрировать умеренный рост (2,32 %).

Таким образом, можно говорить о том, что результаты проведенного анализа свидетельствуют в пользу выдвинутого авторами предположения. Международные спортивные мероприятия привлекают внимание мирового сообщества, что выражается в резком увеличении показателей поисковых запросов (индексации) в глобальных поисковых системах и находит свое отражение в росте значений индекса глобализации KOF. Проведение международных спортивных мероприятий приведет к устойчивому росту интереса к стране, что в свою очередь способно повлиять на ее экономическое и социальное развитие. Таким образом, данный нейтральный инструмент мягкой силы может быть каналом экономического, социального, политического влияния принимающей страны, а также способом улучшения репутационного имиджа страны, ее бренда.

Библиографические ссылки

1. KOF Swiss Economic Institute [Electronic resource] : KOF Globalization Index. – Mode of access : http://globalization.kof.ethz.ch. – Date of access : 19.12.2019.

2. Abakumova, J. G. Globalization and Export Flows Between Eurasian Economic Union Countries: A Gravity Model Approach / J. G. Abakumova, O. K. Primierova // Globalization and its socio-economic consequences. – 2019. – Vol. 74. DOI : 10.1051/shsconf/20207406001.

3. Abakumova, J. G. Globalization, Growth and Inequality: Testing Causality and Asymmetries / J. G. Abakumova, O. K. Primierova // Ekonomicko-manazerske spektrum. – 2018. – № 12(2). – Pp. 83–95.

УДК 330.101.542

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СО ВЗАИМОСВЯЗАННЫМИ СРЕДНЕЙ И ПРЕДЕЛЬНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬЮ КАПИТАЛА И ТРУДА

А. Ф. Проневич[1], Г. А. Хацкевич[2]

[1] *Кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического и информационного обеспечения экономических систем Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, г. Гродно*

[2] *Доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой бизнес-администрирования Института бизнеса Белорусского государственного университета, г. Минск*

В работе рассмотрены обратные задачи восстановления двухфакторных производственных функций исходя из заданной предельной производительности труда (капитала). Указаны аналитические виды производственных функций, обладающих линейной производительностью труда. Исследованы взаимосвязи между средней и предельной производительностями капитала и труда. Полученные результаты могут быть использованы при моделирования реальных производственных процессов.

Ключевые слова: производственный процесс; производственная функция; средняя производительность капитала (труда); предельная производительность капитала (труда).

ANALYTICAL FORMS OF PRODUCTION FUNCTIONS WITH INTERRELATED AVERAGE AND MARGINAL PRODUCTIVITY OF CAPITAL AND LABOR

A. F. Pranevich[1], G. A. Khatskevich[2]

[1] *PhD in Phisics and Mathematics, Associate Professor,*
Associate Professor of the Department of Mathematic and Software Support for Economic Systems
Grodno State University named after Yanka Kupala, Grodno
[2] *Doctor of Economics, Professor, Head of the Department of Business Aadministration*
School of Business of Belarusian State University, Minsk

The article is devoted to the study of inverse problems of identifying two-factor production functions from given marginal product of labor (capital). The analytical forms of two-factor production functions with given linear marginal product of labor are given. The relationships between the average and marginal productivity of capital and labor are studied. The obtained results can be applied in modeling of production processes.

Key words: Production process; production function*;* average product of capital (labor); marginal product of capital (labor).

Введение. Производство есть процесс преобразования одних благ в другие: факторов производства в готовую продукцию. Зависимость между количеством используемых факторов производства и максимально возможным при этом выпуском продукции называют производственной функцией (ПФ). Все факторы производства можно представить в виде двух агрегатов (капитал и труд), а моделирование производственного процесса P осуществлять на основании двухфакторной ПФ:

$$Y = F(K,L) \quad \forall (K,L) \in G, \tag{1}$$

где K – капитал, L – труд, Y – объем выпущенной продукции, неотрицательная функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на области G из пространства затрат $\mathbf{R}_+^2 = \{(K,L) \in \mathbf{R}^2 : K \ge 0, L \ge 0\}$, а $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел.

Выбор функциональной формы ПФ (1) является одним из наиболее сложных и ответственных этапов экономико-статистического моделирования. Здесь происходит «стыковка» информации об объекте моделирования и сведений о свойствах различных параметрических классов функций, из числа которых предстоит выбрать вид модели [1]. Параметрический вид большинства из применяемых в настоящее время ПФ (1) возник или может рассматриваться (см, например, [1–5]) как общий интеграл системы дифференциальных уравнений в частных производных, выражающий инвариантность некоторых характеристик ПФ или соотношений между ними при изменении аргументов.

Каждая из двухфакторных ПФ (1) характеризуется рядом экономико-математических показателей [1, с. 45–51]. Важнейшими из которых (см., например, [6]) являются *средняя производительность капитала* (*труда*):

$$AP_K(F) = \frac{F(K,L)}{K} \quad \left(AP_L(F) = \frac{F(K,L)}{L} \right),$$

которая показывает среднюю отдачу от каждой единицы капитала (труда), и *предельная производительность капитала* (*труда*):

$$MP_K(F)=\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}\ \left(MP_L(F)=\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}\right),$$

которая приближенно показывает на сколько измениться объем выпуска при использовании дополнительной единицы капитала (труда) и неизменном количестве труда (капитала).

Так, например, в таблице 1 представлены средняя и предельная отдачи капитала и труда для двухфакторных ПФ Кобба – Дугласа:

$$F(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta}\ \ \forall(K,L)\in\mathbf{R}_{+}^{2},\ \ A>0,\ \ \alpha,\beta\in\mathbf{R}\backslash\{0\},$$

и ПФ CES (ПФ с постоянной эластичностью замещения)

$$F(K,L)=A\left(bK^{-\gamma}+(1-b)L^{-\gamma}\right)^{-\mu/\gamma}\ \forall(K,L)\in G,\ \mu,A>0,\ b\in[0;1],$$

$$\gamma\in[-1;0)\cup(0;+\infty).$$

При этом из таблицы 1 видно, что предельная и средняя производительности капитала (труда) для ПФ Кобба – Дугласа связаны между собой линейной зависимостью и степенной зависимостью в случае CES-функции.

Таблица 1 – Средняя и предельная производительности капитала (труда) для ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов производства $(k=K/L)$

№	Показатель	Функция Кобба – Дугласа	CES-Функция (при $\mu=1$)
1.	$AP_K(F)$	$AK^{\alpha-1}L^{\beta}$	$A(a+(1-a)k^{\gamma})^{-1/\gamma}$
2.	$AP_L(F)$	$AK^{\alpha}L^{\beta-1}$	$A(ak^{-\gamma}+1-a)^{-1/\gamma}$
3.	$MP_K(F)$	$\alpha\cdot AP_K(F)$	$\frac{a}{A^{\gamma}}(AP_K(F))^{\gamma+1}$
4.	$MP_L(F)$	$\beta\cdot AP_L(F)$	$\frac{1-a}{A^{\gamma}}(AP_L(F))^{\gamma+1}$

Примечание – Источник: разработана авторами.

Основные результаты. Данная работа продолжает исследования [2–5] по изучению ПФ, обладающих заданными экономико-математическими характеристиками. В статье получены аналитические виды двухфакторных ПФ с заданной предельной производительностью труда (капитала). Способ построения ПФ основан на нахождении решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка методом характеристик. Основные результаты работы составляют таблица 2 и утверждения относительно предельной производительности труда (закономерности относительной предельной производительности капитала формулируются аналогично).

Теорема 1. *Процесс P у которого предельная производительность труда линейно зависит от выпуска, т.е.* $MP_L(F)=f(K,L)\cdot F+g(K,L)\ \ \forall(K,L)\in G,\ \ f,g\in C(G)$, *может быть описан одной из ПФ вида* $F_{\varphi}:(K,L)\to h(K,L)\left(\varphi(K)+\int\frac{g(K,L)}{h(K,L)}dL\right)$ $\forall(K,L)\in G$, *где* φ *– произвольная непрерывно дифференцируемая функция на луче* $(0;+\infty)$, *а функция* $h(K,L)=\exp\int f(K,L)\,dL$ (*при интегрировании L рассматривается как параметр*).

Следствие 1. *Если производственный процесс P такой, что у него предельная производительность труда* $MP_L(F)=f(K,L)\cdot F$, *то производственный процесс P* *может быть описан ПФ аналитического вида* $F_{\varphi}:(K,L)\to \varphi(K)\exp\int f(K,L)\,dL$ $\forall (K,L)\in G.$

Теорема 2. *Пусть для производственного процесса P задана предельная производительность труда* $MP_L(F)=f(K,L)$ $\forall (K,L)\in G,$ $f\in C(G).$ *Тогда процесс P может быть описан одной из ПФ вида* $F_{\varphi}:(K,L)\to \int f(K,L)\,dL+\varphi(K)$ $\forall (K,L)\in G,$ *где* φ *– произвольная непрерывно дифференцируемая функция на открытом луче* $(0;+\infty).$

Следствие 2. *Процесс P у которого предельная производительность труда есть линейная функция* $MP_L(F)=\alpha K+\beta L+\gamma$ $\forall (K,L)\in \mathbf{R}_{+}^{2},$ $\alpha,\beta,\gamma\in \mathbf{R},$ *может быть описана одной из двухфакторных ПФ вида* $F_{\varphi}:(K,L)\to \alpha KL+\dfrac{\beta}{2}L^2+\gamma L+\varphi(K)$ $\forall (K,L)\in G.$

Взаимосвязи между средней и предельной отдачей факторов производства для двухфакторной ПФ (1) описаны в таблице 2. Отметим, что взаимосвязи между средней и предельной производительностью факторов на основе введенного г.Б. Клейнером показателя эластичности влияния предельной отдачи факторов на среднюю производительность (мобильность отдачи фактора) были изучены в работе [7].

Таблица 2 – Аналитический вид ПФ $(\alpha,\beta,\gamma\in \mathbf{R}\backslash\{0\},\ \varphi\in C^1(0;+\infty))$

=	$\alpha\cdot AP_K(F)$	$\beta\cdot AP_L(F)$	$\alpha\cdot\left(AP_K(F)\right)^{\beta}$	$\alpha\cdot\left(AP_L(F)\right)^{\beta}$	$\gamma\cdot MP_K(F)$	$\gamma\cdot MP_L(F)$
$MP_K(F)$	$K^{\alpha}\varphi(L)$	$\varphi(L)\exp\left(\beta\frac{K}{L}\right)$	$\left(\alpha K^{1-\beta}+\varphi(L)\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$	$L\left(\alpha(1-\beta)\frac{K}{L}+\varphi(L)\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$	—	$\varphi(\gamma K+L)$
$MP_L(F)$	$\varphi(K)\exp\left(\alpha\frac{L}{K}\right)$	$L^{\beta}\varphi(K)$	$K\left(\alpha(1-\beta)\frac{L}{K}+\varphi(K)\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$	$\left(\alpha L^{1-\beta}+\varphi(K)\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$	$\varphi(K+\gamma L)$	—

Примечание – Источник: разработана авторами.

Библиографические ссылки

1. Клейнер, Г. Б. Производственные функции : теория, методы, применение / Г. Б. Клейнер. – М. : Финансы и статистика, 1986. – 239 с.

2. Khatskevich, G. A. On quasi-homogeneous production functions with constant elasticity of factors substitution / G. A. Khatskevich, A. F. Pranevich // Journal of Belarussian State University. Economics. – 2017. – № 1. – P. 46–50.

3. Khatskevich, G. A. Production functions with given elasticities of output and production / G. A. Khatskevich, A. F. Pranevich // Journal of Belarussian State University. Economics. – 2018. – № 2. – P. 13–21.

4. Khatskevich, G. A. Analytical forms of productions functions with given total elasticity of production / G. A. Khatskevich, A. F. Pranevich, Yu. Yu. Karaleu // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2019. – Vol. 1052. – P. 276–285.

5. Хацкевич, Г. А. Двухфакторные производственные функции с заданной предельной нормой замещения / Г. А. Хацкевич, А. Ф. Проневич, М. В. Чайковский // Эконом. наука сегодня. – 2019. – Вып. 10. – С. 171–182.

6. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. – М. : Прогресс, 1975. – 607 с.

7. Клейнер, Г. Б. Взаимосвязи между средней и предельной отдачей факторов производственной функции / Г. Б. Клейнер // Экономика и математические методы. – 1994. – Т. 30. – Вып. 1. – С. 102–118.