Краткие сообщения

УДК 517.962.4

Л. А. АЛЬСЕВИЧ

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С РАСПАДАЮЩЕЙСЯ ОТРАЖАЮЩЕЙ МАТРИЦЕЙ

Periodic linear differential systems are investigated by the Mironenko method. The conditions to reduce the investigation of a linear system with the dimension 4 to the analysis of a linear system with the dimension 2 are given.

В случае, если для периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений удается найти отражающую функцию ОФ, то, как известно [1], для такой системы можно указать начальные данные периодических решений и исследовать эти решения на устойчивость. В. И. Мироненко (см., напр., [1]) и Л. А. Альсевич (см., напр., [2]) указаны классы систем, неинтегрируемых в квадратурах, для которых удается найти ОФ. Оказывается, что аппарат ОФ полезен и тогда, когда саму ОФ изучаемой системы найти невозможно. Впервые об этом четко говорится в [3].

В настоящей работе указаны случаи, когда изучение вопроса существования и устойчивости периодических решений линейной периодической системы размерности 4 удается заменить изучением линейной системы размерности 2. Основным требованием при этом является то, что для рассматриваемой линейной системы

$$\dot{x}_k = p_{k1}(t)x_1 + p_{k2}(t)x_2 + p_{k3}(t)x_3 + p_{k4}(t)x_4,\quad k = \overline{1,\ 4} \tag{1}$$

с непрерывными на $\mathbf{R}$ коэффициентами $p_{kj}(t)$, $k,\ j = \overline{1,\ 4}$ отражающая матрица (ОМ) должна иметь вид:

$$M(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) & \beta(t) & 0 & 0 \\ \gamma(t) & \delta(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(t) & \beta(t) \\ 0 & 0 & \gamma(t) & \delta(t) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

В данной работе это требование сводится к условиям на коэффициенты $p_{ij}(t)$, $i,\ j = \overline{1,\ 4}$ системы (1). Опуская случаи, когда такая ОМ находится в конечном виде и при этом по определенному алгоритму, мы подробно остановимся на ситуации, когда ОМ в принципе не может быть найдена.

Один из таких случаев был отмечен ранее [4]. Это система вида:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} P(t) & \alpha(t)E \\ \beta(t) & P(t)+\gamma(t)E \end{bmatrix} x,$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ — нечетные непрерывные 2ω-периодические скалярные функции, $P(t)$ — произвольная непрерывная 2ω-периодическая и E-единичная матрицы размерностей $n\times n$. Изучение такой системы сводится к изучению системы $\dot{y} = P(t)y$. При этом если ОМ последней системы — $F(t)$, то ОМ исходной системы —

$$\begin{bmatrix} F(t) & 0 \\ 0 & F(t) \end{bmatrix},$$

где 0 — нулевая матрица размерности $n \times n$.

Введем обозначения $\varphi(-t)=\bar\varphi$; $2\varphi_ч=\varphi+\bar\varphi$, $2\varphi_н=\varphi-\bar\varphi$.

Будем считать, что коэффициенты p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24} системы (1) удовлетворяют условию:

А. Сумма $p_{24}+\bar p_{13}$ обращается в нуль только в изолированных точках τ_k, в которых функции

$$\frac{p_{14}}{p_{24}+\bar p_{13}} \text{ и } \frac{p_{23}}{p_{24}+\bar p_{13}}$$

доопределяются до непрерывно дифференцируемых функций.

В настоящей работе доказана

Теорема. Пусть коэффициенты $p_{14}(t)$, $p_{23}(t)$, $p_{13}(t)$, $p_{24}(t)$ системы (1) 2ω-периодические, непрерывно дифференцируемые и удовлетворяют условию А, остальные коэффициенты системы (1) 2ω-периодические и непрерывные, при этом все коэффициенты системы (1) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$p_{14}(t)\not\equiv 0;\ p_{23}(t)\not\equiv 0;\ p_{14}(0)=p_{23}(0)=0;$$

$$(p_{13}+p_{24})_ч\equiv 0;\ (p_{31}+p_{42})_ч\equiv 0;\ (p_{11}+p_{22}-p_{33}-p_{44})_ч\equiv 0;$$

$$(p_{13})_ч\equiv\frac{(p_{14}p_{23})_н}{p_{24}+\bar p_{13}};\ 2(p_{31})_ч=\frac{p_{14}p_{41}-\bar p_{23}\bar p_{32}}{p_{24}+\bar p_{13}};$$

$$p_{32}\equiv\frac{p_{14}(p_{42}+\bar p_{31})}{p_{24}+\bar p_{13}};\ p_{41}\equiv\frac{p_{23}(\bar p_{31}+p_{42})}{p_{24}+\bar p_{13}};$$

$$p_{34}-p_{12}\equiv\frac{p_{14}(p_{11}+\bar p_{22}-p_{33}-\bar p_{44})}{p_{24}+\bar p_{13}};\quad p_{43}-p_{21}\equiv\frac{p_{23}(p_{11}+\bar p_{22}-p_{33}-\bar p_{44})}{p_{24}+\bar p_{13}};$$

$$(p_{11})_ч-(p_{33})_ч\equiv(p_{13})_ч\frac{p_{33}+\bar p_{44}-p_{11}-\bar p_{22}}{p_{24}+\bar p_{13}};$$

$$\frac{p_{14}}{p_{24}+\bar p_{13}}\left(p_{22}-p_{11}+\frac{p_{14}p_{21}-\bar p_{23}\bar p_{12}}{p_{24}+\bar p_{13}}\right)+\frac{\bar p_{14}(p_{14}\bar p_{21}-\bar p_{23}p_{12})}{(p_{24}+\bar p_{13})^2}+$$

$$+\left(\frac{p_{14}}{p_{24}+\bar p_{13}}\right)'-p_{12}\equiv 0;$$

$$\frac{p_{23}}{p_{24}+\bar p_{13}}\left(p_{11}-p_{22}+\frac{\bar p_{14}\bar p_{21}-p_{23}p_{12}}{p_{24}+\bar p_{13}}\right)+\frac{\bar p_{23}(\bar p_{14}p_{21}-p_{23}\bar p_{12})}{(p_{24}+\bar p_{13})^2}+$$

$$+\left(\frac{p_{23}}{p_{24}+\bar p_{13}}\right)+p_{21}\equiv 0;$$

Тогда характер устойчивости системы (1) совпадает с характером устойчивости двумерной системы

$$\dot y=\begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t)\\ p_{21}(t) & p_{22}(t)\end{bmatrix}y. \tag{3}$$

Решение $x(t;\omega,x_0)$ системы (1) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда $x_0=(x_{10},x_{20},x_{30},x_{40})^т=(y_{10},y_{20},y_{10},y_{20})^т$ и решение $y(t;\omega,y_0)$, $y_0=(y_{10},y_{20})^т$ системы (3) 2ω-периодично.

Доказательство, согласно [1], вытекает из [3] и следующей леммы.

Лемма. При выполнимости условий теоремы отражающая матрица системы (1) имеет вид (2), где функции $\alpha(t)$ и $\delta(t)$ являются решениями задачи Коши:

$$\alpha'+\left(2(p_{11})_г+\frac{\bar p_{23}\bar p_{12}-p_{14}p_{21}}{p_{24}+\bar p_{13}}\right)\alpha+\frac{p_{23}\bar p_{12}-\bar p_{14}p_{21}}{p_{24}+\bar p_{13}}\delta=0,$$

$$\delta'+\left(2(p_{22})_г+\frac{p_{23}p_{12}-\bar p_{14}\bar p_{21}}{p_{24}+\bar p_{13}}\right)\delta+\frac{\bar p_{23}p_{12}-p_{14}\bar p_{21}}{p_{24}+\bar p_{13}}\alpha=0,$$

$\alpha(0)=\delta(0)=1$;

функции $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ определяются равенствами

$$\beta = \frac{-1}{p_{24} + \bar{p}_{13}} (p_{14}\alpha + \bar{p}_{14}\delta),$$

$$\gamma = \frac{1}{p_{24} + \bar{p}_{13}} (\bar{p}_{23}\alpha + p_{23}\delta).$$

При этом матрица

$$\begin{bmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{bmatrix}$$

является отражающей матрицей системы (3).

Доказательство первой части леммы следует из основного соотношения [1]:

$$M'(t) + M(t)P(t) + P(-t)M(t) = 0, \ M(0) = E,$$

где $P(t)$ — матрица коэффициентов системы (1), E — единичная матрица. Это соотношение является необходимым и достаточным для того, чтобы дифференцируемая матрица $M(t)$ была ОМ системы (1).

Доказательство второй части леммы следует из теоремы 1 [2] и условий на коэффициенты системы (1):

$$p_{13}(0) = p_{14}(0) = p_{23}(0) = p_{24}(0) =$$

$$= p_{31}(0) = p_{32}(0) = p_{41}(0) = p_{42}(0) = 0.$$

1. М и р о н е н к о В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986. С. 30.
2. А л ь с е в и ч Л. А. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 5. С. 882.
3. М и р о н е н к о В. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 1. С. 39.
4. М и р о н е н к о В. И., К а с т р и ц а О. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 1. С. 67.

Поступила в редакцию 01.07.93.

УДК 517.5

В. Н. РУСАК, Н. К. АГАФОНОВА

ТОЧНЫЙ ПОРЯДОК НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

The nonperiodical continuou functions with a given restriction for integral modulas of smoothness are studied. Exact orders of the best rational approximations in uniform metric are found for those classes of functions.

Пусть $C[a, b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$, где норма задается равенством

$$\| f(x) \| = \sup_{a \le x \le b} | f(x) |.$$

Будем рассматривать конечные разности порядка $r+1$ с шагом τ

$$\Delta^{r}_{r+1} f(x) = \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{\nu} C^{\nu}_{r+1} f(x + \nu\tau),$$

и обозначим через $W^r\Omega_M$, $r \in N$, классы функций из пространства $C[a, b]$, которые подчинены ограничению

$$\int_a^{b-(r+1)\tau} | \Delta^{r}_{r+1} f(x) | \, dx \le M\tau^{r+1}, \text{ для любого } \tau > 0. \qquad (1)$$

Пусть $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x) \in C[a, b]$ алгебраическими полиномами в равномерной метрике, т. е.

$$E_n(f) = \inf_{p_n(x)} \| f(x) - p_n(x) \|.$$

В свою очередь, наилучшее рациональное приближение в метрике пространства $C[a, b]$ определяется равенством: