к $+\infty$ при $t\to\beta_0-0$, и интегралы от них на любом отрезке $[\beta_0-\varepsilon, \beta_0]$ не ограничены, то решения уравнения (5) не могут удовлетворять условию А ни при каких начальных значениях.

Доказательства этих утверждений, несмотря на то, что $\beta(\xi)=\mathrm{const}$, идейно похожи на доказательства теорем 2 и 3.

1. Задворный Б. В. // Дифференц. уравнения. 1989.Т. 25. № 2. С. 332.
2. Он же // Материалы республиканской научно-практической конференции творческой молодежи «Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение». Мн., 1988. С. 126.
3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
4. Задворный Б. В. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 2. С. 351.

Поступила в редакцию 01.02.94

УДК 517.925

Б. С. КАЛИТИН, Л. В. КАЛИТИНА

ОПТИМИЗАЦИЯ ОЦЕНКИ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

The paper deals with the problem of the estimation of regions of asymptotic stability for continious autonomous nonlinear systems. The assumed problem on the estimation may be reduced to the solution of the special problem of nonlinear programming. The example of application is reported.

Пусть G — открытое множество, содержащее начало координат n-мерного вещественного пространства $\mathbf{R}^n$. Предположим, что G связно и рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(x),\ x\in G,\ f(o)=0, \tag{1}$$

где функция $f:G\to\mathbf{R}^n$ непрерывна и обеспечивает единственность решений (1) в G.

Известно, что теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости в прямом методе [1] позволяет оценить область притяжения нулевого решения (см. [2, С. 17]). Обобщение этого утверждения содержится в [3—5] и других работах. Центральное место в этом направлении исследований занимает критерий В. И. Зубова [6, теорема 22], однако в практическом отношении он недостаточно эффективен. Приведем одно из таких утверждений, вытекающее из [4].

Теорема 1. Пусть для системы (1) существует непрерывно дифференцируемая функция $V:G\to\mathbf{R}^+$ такая, что:
1) $V(x)>0\ \forall x\in G\setminus\{0\}$ и $V(0)=0$;
2) область $V_c=\{x\in G| 0\leqslant V(x)<c\}$ ограничена;
3) $\dot{V}(x)<0\ \forall x\in V_c\{0\}$.
Тогда нулевое решение (1) асимптотически устойчиво и множество V_c содержится в области притяжения этого решения. Здесь $\dot{V}$ — производная по времени, вычисленная от функции V в силу системы (1).

В данной статье показывается, что задача о построении наилучшей оценки V_c области асимптотической устойчивости с помощью теоремы 1 может быть сведена к задаче нелинейного программирования. Эта же идея была использована в работах [7, 8] для частного случая систем второго порядка, где в качестве функции Ляпунова взята квадратичная форма.

Определение 1. Непрерывная определенно положительная функция $V:G\to\mathbf{R}^+$ называется *концентрической* на интервале $[0, c^*[$, если множество уровня $V_c=\{x\in G| 0\leqslant V_x<c\}$ имеет связное компактное замыкание $\bar{V}_c$ для всех $0<c<c^*$, содержащееся в области G.

Через c_0 будем обозначать верхнюю грань всех таких чисел c^* (возможно, что $c_0=+\infty$), т. е. $[0, c_0[$ есть наибольший интервал, на котором V является концентрической.

Теорема 2. Пусть для системы (1) существуют окрестность U точки $x=0$ в G и непрерывно дифференируемая концентрическая на интервале $[0, c_0[$ функция $V:G\to\mathbf{R}^+$ такая, что:
1) $V(x)>0\ \forall x\in G\setminus\{0\}$ и $V(0)=0$;

2) $\dot V(x)<0\ \ \forall x\in U\setminus\{0\}$.

Пусть x^0 — решение задачи нелинейного программирования

$$\begin{cases} V(x)\to\min, \\ \dot V(x)=0, \\ x\neq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда для любого числа r такого, что

$$0<r<\min\left\{V(x^0),c_0\right\}, \qquad (3)$$

множество

$$V_r=\left\{x\in G|0\leqslant V(x)<r\right\}$$

расположено в области асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1).

Доказательство. По теореме 1 решение $x=0$ асимптотически устойчиво. Пусть x^0 — оптимальный план задачи (2), а число r удовлетворяет (3). Покажем, что имеет место соотношение

$$\dot V(x)<0\quad \forall x\in V_r\setminus\{0\}. \qquad (4)$$

С этой целью предположим противное, т. е. существует точка $x^*\in V_r\setminus\{0\}$, что $\dot V(x^*)\geqslant 0$. Сразу отметим, что равенство $\dot V(x^*)=0$ в данном случае невозможно, поскольку, иначе, на плане x^* задачи (2) функция $V(x)$ принимала бы значение, меньшее, чем в оптимальной точке x^0. Следовательно, $\dot V(x^*)>0$.

Далее, множество V_r есть окрестность нуля и поэтому существует точка $y\in V_r\cap U$, для которой $\dot V(y)<0$. При этом так как множество $\bar V_r$ связно (функция V — концентрическая на интервале $[0, c_0[$),то точки y и x^* можно соединить непрерывной линией, целиком содержащейся в V_r. По построению в концевых точках этой линии непрерывная функция $\dot V(x)$ принимает значения разных знаков. Поэтому в одной из точек линии (пусть это будет в точке $z\neq 0$) неизбежно выполняется равенство $\dot V(z)=0$ и условие $V(z)<V(x^0)$.

С другой стороны, точка z есть план задачи (2), т. е. $V(z)\geqslant V(x^0)$ по определению ее решения. Но это приводит нас к противоречию. Таким образом, неравенство (4) справедливо. Отсюда в силу ограниченности множества $\bar V_r$ по теореме 1 и следует требуемое.

Теорема 3. Пусть для непрерывной определенно положительной функции $V{:}G\to R^+$ существует непрерывная определенно положительная концентрическая на интервале $[0, c^*[$ функция $\varphi{:}G\to R^+$ такая, что

$$V(x)\geqslant\varphi(x)\ \ \forall x\in G. \qquad (5)$$

Тогда функция V является также концентрической на $[0, c^*[$.

Доказательство. Во-первых, покажем, что для множеств уровней $V_c=\{x\in G|0\leqslant V(x)<c\}$ и $\varphi_c=\{x\in G\setminus 0\leqslant\varphi(x)<c\}$ имеет место включение

$$V_c\subset\varphi_c\ \ \forall c\in[0,\ c^*[. \qquad (6)$$

Действительно, в противном случае для некоторого значения $c\in[0, c^*[$ существует точка $y\in V_c\cap G$, для которой одновременно выполнялись бы неравенства $V(y)<c$ и $\varphi(y)\geqslant c$. Однако это противоречило бы заданному неравенству (5), т. е, соотношение (6) справедливо.

Докажем теперь связность замыкания $\bar V_c$ для $0<c<c^*$. Поскольку функция φ концентрическая, то множество $\bar\varphi_c$ компактно и связно. Из (6) следует, что $\bar V_c\subset\bar\varphi_c$, т. е. $\bar V_c$ также компактно. Если $\bar V_c$ несвязно, то его можно представить как объединение двух непересекающихся множеств W_1 и W_2, каждое из которых непусто и компактно. Заметим, что функция V определенно положительная, это, в частности, означает, что V_c есть окрестность нуля. Поэтому, не нарушая общности дальнейших рассуждений, можно считать, что W_2 есть компактная связная окрестность начала R^n. Пусть x^0 есть решение задачи нелинейного программирования $\varphi(x)\to\min$, $x\in \mathrm{Fr}W_2$, где $\mathrm{Fr}W_2$ — граница множества W_2. Тогда ясно, что справедливы соотношения

$$\bar\varphi_{\varphi(x^0)}\subset W_2,\ \ V(x^0)=c. \qquad (7)$$

Кроме того, так как $W_2\subset\bar V_c\subset\bar\varphi_c$, то $\varphi(x^0)\leqslant c$.

С другой стороны, на основании (5), $c = V(x^0) \geq \varphi(x^0)$. Следовательно, имеем равенство $c = \varphi(x^0)$. Поэтому из (7) вытекают условия: $W_1 \cap \bar{\varphi}_{\varphi(x^0)} = W_1 \cap \bar{\varphi}_c = \phi$. Но последнее невозможно на основании (6), так как $\mathrm{Fr} W_1 \cap \bar{V}_c \neq \phi$. Следовательно, $\bar{V}_c$ связно. Теорема 3 доказана.

Пример. Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -bf(x_1) - ax_2, \end{cases} \tag{8}$$

где $a > 0$, $b > 0$; $f(x_1) = \sin(x_1 + \delta) - \sin\delta$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$.

Возьмем семейство функций Ляпунова

$$V(x) = b\int_0^{x_1} f(t)dt + \frac{x_2^2}{2} + \lambda\left(b\int_0^{x_1} f(t)dt + \frac{(ax_1 + x_2)^2}{2}\right), \ \lambda > 0.$$

Производная по времени от нее, равная

$$\dot{V}(x) = -\lambda_1 x_1 f(x_1) - ax_2^2, \ \lambda_1 = \lambda ab,$$

является определенно отрицательной функцией для

$$-(\pi + 2\delta) < x_1 < \pi - 2\delta. \tag{9}$$

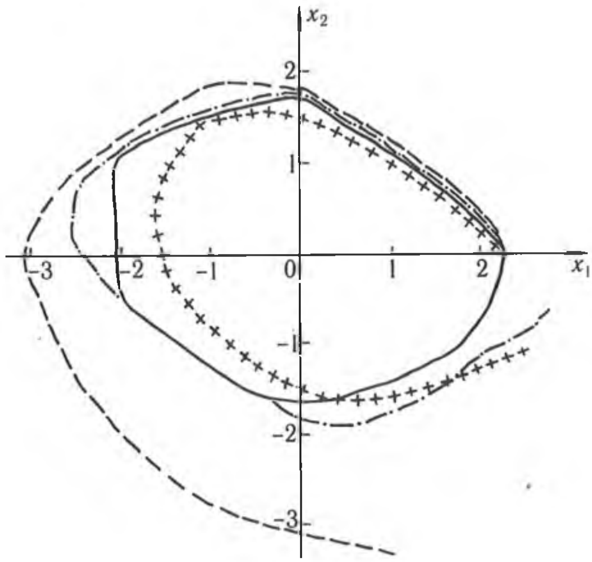
В полосе (9) плоскости R^2 функция V определенно положительна и, кроме того, имеет место оценка

$$V(x) \geq \frac{x_2^2}{2} + \lambda\frac{(ax_1 + x_2)^2}{2}.$$

Поэтому по теореме 3 функция V является концентрической, по крайней мере, на интервале $[0, c[$ при условии, что эллипс

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{(ax_1 + x_2)^2}{2} = c$$

не выходит за границу вертикальной полосы (9). Производя необходимые вычисления, легко видеть, что наибольшее значение c, при котором указанный эллипс содержится в замыкании области (9), соответствует значению $c = c_0 = \frac{1}{4}a^2(\pi - 2\delta)^2$. Следовательно, функция V является концентрической на максимальном в данном случае интервале $[0, c_0[$.



Решая для каждого значения $\lambda > 0$ задачу оптимизации (2), получим семейство оценок области асимптотической устойчивости нулевого решения системы (8). Объединение этого семейства по всем $\lambda > 0$ дает некоторую суммирующую оценку области притяжения, которая изображена на рисунке сплошной линией для наборов значений параметров задачи а = 0,3; в = 1; δ = 0,412.

Для сравнения приведены оценки области притяжения системы (8), полученные методом Попова (на рис. обозначены + + +) и ТОП-методом (—·—·—) в [9] с теми же значениями параметров *а, в,* δ. Пунктирной линией отмечена точная граница области притяжения, построенная в [9].

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., 1990.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
4. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., 1964.
5. Абдуллин Р. З., Анапольский Л. Ю. и др. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. М., 1987.
6. Зубов В. И. Устойчивость движения. М., 1984.
7. Скибенко В. П., Окунева В. М. // Методы оптимизации и их приложения. Иркутск, 1982. С. 127.
8. Они же // Численные методы анализа и их приложения. Иркутск, 1983. С. 98.
9. Guruprasada V. R., Krishnamoorthy N. // Electrical Power and Energy Systems. 1989. V. 11.

Поступила в редакцию 04.06.93.

УДК 517.977

А. И. КАЛИНИН

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОР ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ*

An algorithm for the construction of an asymptotically optimal controller for a linear singularly perturbed system is described.

1. В классе скалярных кусочно-непрерывных управляющих воздействий рассмотрим следующее семейство задач терминального управления линейной стационарной системой:

$$J(u) = c_1' y(t^*) + \mu c_2' z(t^*) \to \max, \tag{1}$$

$$\dot{y} = A_1 y + A_2 z + b_1 u, \quad y(\tau) = y^*,$$

$$\mu \dot{z} = A_3 y + A_4 z + b_2 u, \quad z(\tau) = z^*, \tag{2}$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in T_\tau = [\tau, t^*], \tag{3}$$

$$H_1 y(t^*) = g_1, \quad H_2 z(t^*) = g_2, \tag{4}$$

где μ — малый положительный параметр, y, z, g_1, g_2 — векторы размерности n_1, n_2, m_1, m_2 соответственно ($m_1 < n_1$, $m_2 \leq n_2$), а остальные элементы задач имеют соответствующие размеры. Предполагается, что:

а) матрица A_4 является устойчивой, т. е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.

Кусочно-непрерывное управление $u(t, \mu)$, $t \in T_\tau$, для которого выполнено условие (3), назовем допустимым, если порожденная им траектория системы (2) удовлетворяет терминальным ограничениям (4). Если же равенства (4) выполняются с точностью до $O(\mu)$, то управление будем называть асимптотически допустимым. Асимптотически допустимое управление назовем асимптотически оптимальным, если оно отклоняется по критерию качества (1) от оптимального управления на величину порядка $O(\mu)$.

В реальных условиях динамические системы функционируют в присутствии возмущений, не учтенных в модели (1)—(4). Предположим, что в некотором конкретном случае поведение системы на промежутке

* Работа финансируется Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь.