Наши лауреаты

За достижения в области естественных наук лауреатами премии им. А.Н. Севченко в 1995 г. стали А.Б. Антоневич и А.В. Лебедев. Предлагаем изложение доклада, с которым они выступили на заседании Ученого совета Белгосуниверситета.

УДК 517.946, 517.948

А.Б. АНТОНЕВИЧ, А.В. ЛЕБЕДЕВ

СТРУКТУРА C*-ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

The paper presents the main features and ideas of the C*-theory of functional-differential operators.

1. Разработанная авторами теория связывает два раздела современной математики:

теорию C-алгебр* и *теорию функционально-дифференциальных уравнений (операторов).*

Оба эти раздела к настоящему моменту являются уже устоявшимися (классическими) объектами математических исследований.

Теория C*-алгебр (алгебр операторов в гильбертовом пространстве) восходит к работам Ф.Дж. Мюррея (F.J. Murray), Дж. Фон Неймана (J. Von Neumann), И.М. Гельфанда, М.А. Наймарка, Ж. Диксмье (J. Dixmier), Дж. Глимма (J. Glimm), Ж.У. Макки (G.W. Mackey) и др. Многие разделы этой теории послужили инструментом, обеспечившим фундаментальные продвижения при исследовании различных конкретных классов операторов. Ее описанию посвящены известные монографии Ч.Е. Риккарта (C.E. Rickart, 1960), М.А. Наймарка (1968), Ж. Диксмье (J. Dixmier, 1969), С. Сакаи (S. Sakai, 1971), М. Такесаки (M. Takesaki, 1979), Р.В. Кадисона, Дж.Р. Рингроуза (R.V. Kadison, J.R. Ringrose, 1986) и др.

Что касается функционально-дифференциальных операторов (ФДО), то объект исследования здесь столь широк, что очертить его границы полностью невозможно. Фактически сюда включаются операторы, содержащие,

с одной стороны, некоторые операторы "локального" типа, например сингулярные интегральные или псевдодифференциальные;

а с другой стороны, объекты иной природы – "нелокального" типа.

Базовым примером здесь являются операторы (в некотором функциональном пространстве $F(X)$ функций на X) вида

$$b=\sum a_k(x,D)T_k\ , \qquad (1)$$

где $a_k(x,D)$ – дифференциальные или псевдодифференциальные операторы (X – область в R^n или многообразие), T_k – операторы замены переменной ("нелокальные" операторы) вида $(T_k f)(x)=f(\alpha_k(x))$, здесь $\alpha_k:\ X\to X$ – некоторые заданные отображения.

Такие операторы естественно возникают при математическом моделировании ряда физических, химических, экономических и других процессов в тех случаях, когда необходимо учитывать нелокальное избирательное взаимодействие и дальнедействие.

В действительности в изучаемый класс ФДО попадают и многочисленные операторы совсем другого сорта – операторы свертки с осциллирующими коэффициентами; псевдодифференциальные, сингулярные интегральные и теплицевы операторы с различными особенностями (разрывами) в коэффициентах; краевые задачи с данными на всей границе и др.

Присутствие "нелокальных" составляющих T_k в операторах вида (1) приводит к качественному усложнению этих операторов по сравнению с классическими псевдодифференциальными операторами. Поэтому для их исследования нужны принципиально новые подходы, что неоднократно отмечалось специалистами.

Круг задач, рассматриваемых в теории ФДО, чрезвычайно широк. Различным аспектам этой теории посвящены, например, монографии:

по дифференциальным и сингулярным интегральным уравнениям с отклоняющимся аргументом: Р. Белманн, К. Кук (R. Belmann, K. Cooke, 1961), Л.Е. Эльсгольц, С.Б. Норкин (1971), А.Д. Мышкис (1972), Д. Пршеворска-Ролевич (D. Przeworska-Rolewicz, 1973), Дж. Хэйл (J. Hale, 1977), Г.С. Литвинчук (1977), Н.К. Карапетянц, С.Г. Самко (1988), В.Г. Курбатов (1990), В.Г. Кравченко, Г.С. Литвинчук (V.G. Kravchenko, G.S. Litvinchuk, 1994);

по операторам с разрывными коэффициентами: И.Ц. Гохберг, Н.Я. Крупник (1973), Б.А. Пламеневский (1986), Б.-В. Шульце (B.-W. Schulze, 1991) и др.

Описываемая ниже C^*-теория ФДО, конечно же, не решает всех задач, встречающихся при исследовании таких операторов. Мы сосредоточили свои усилия прежде всего на решении ряда фундаментальных проблем, возникающих в теории фредгольмовости функционально-дифференциальных операторов.

О решении каких проблем идет речь?

Если мы рассматриваем упомянутые выше "локальные" операторы (сингулярные интегральные, псевдодифференциальные, теплицевы...), то в применении к ним исследуемые проблемы формулируются так:

1. Описание алгебр, порожденных этими операторами.
2. Построение символа и символического исчисления (т.е. объектов, в терминах которых определяется фредгольмовость).
3. Нахождение условий фредгольмовости операторов.
4. Построение регуляризатора.
5. Вычисление индекса.

Перечисленные проблемы являются классическими для “локальных” операторов. Методы их решения для псевдодифференциальных операторов разрабатывались многими математиками, в том числе и выдающимися, среди которых Дж. Кон (J. Kohn), Л. Ниренберг (L. Nirenberg), С.Г. Михлин, Л. Хермандер (L. Hörmander), Ф. Трев (F. Treves), М. Атья (M. Atiyah), И.М. Сингер (I.M. Singer) и др.

Получению методов решения этих же проблем для "нелокальных" ФДО и были посвящены исследования авторов и их коллег (В.В.Бреннера, М.В. Белоусова, В.Б. Рывкина, Данг Суан Тханя, Сериня Алиу Ло и других ученых) проводившиеся в течение последних 20 лет. При этом важнейшим инструментом, позволившим построить единую теорию решения упомянутых задач для разнообразных классов "нелокальных" ФДО, стало именно привлечение современных C^*-алгебраических методов.

Основные результаты и приложения созданной теории изложены в [1–3]* . Мы не будем приводить точных формулировок результатов, а попытаемся объяснить общую структуру теории и ее взаимосвязи с другими теориями и направлениями исследований.

Начнем с пояснения *различий*, возникающих при рассмотрении "локальных" и "нелокальных" объектов.

1.1. Локальная ситуация. В классической теории псевдодифференциальных операторов (ПДО) с непрерывными коэффициентами вопрос о фредгольмовости решается по следующей схеме.

1. По ПДО a с помощью преобразования Фурье строится матрично-значная функция $\sigma(a)$ (морфизм порожденного расслоения над кокасательным к X пространством), называемая *символом* a. Символ отражает основные алгебраические свойства оператора и, кроме того,

---

*Вторая часть монографии [3]: Antonevich A., Belousov M., Lebedev A. Functional differential equations: II. C^*-applications находится в печати и планируется к выходу в 1996 году.

оператор a фредгольмов тогда и только тогда, когда $\sigma(a)$ обратим.

Другими словами условие фредгольмовости a сводится к условию:

$$\det\sigma(a)(x,\xi)\neq 0\,. \tag{2}$$

2. Индекс a выражается через гомотопические инварианты $\sigma(a)$.

Замечания. 1) По существу, в этой ситуации привлечения сколь-нибудь серьезных результатов из теории C^*-алгебр не требуется, так как возникающая здесь алгебра символов (= матриц-функций) является "простейшей" (очень подробно изученной) C^*-алгеброй и гомотопические свойства ее элементов также хорошо известны (в К-теории).

2) В случае рассмотрения ПДО с разрывными коэффициентами привлечение C^*-алгебр становится уже необходимым и в локальной ситуации (см. [4]).

1.2. Нелокальная ситуация. Более сложная природа операторов вида (1) проявляется, в частности, в том, что для них *не* существует матрицы-функции, обладающей основными свойствами классического (описанного выше) символа. Поэтому первой задачей при исследовании фредгольмовых свойств операторов вида (1) стало выяснение того, объект какой природы может служить символом оператора вида (1).

В результате оказалось (см. п.п. 3, 4), что структура символов операторов вида (1) носит *существенно бесконечномерный* характер (и связана с так называемыми скрещенными призведениями алгебр и групп), и работа с такими объектами уже просто невозможна без использования высокоразвитого C^*-алгебраического аппарата.

Более того, получив в качестве символов столь нетривиальный объект, мы, в дополнение к упомянутым (классическим для "локальных" операторов) проблемам, сталкиваемся с еще одной:

вычислить условия обратимости символа.

Эти условия уже не могут быть выписаны в таком простом виде, как в (2), и для их исследования авторам пришлось разработать ряд качественно *новых* C^*-алгебраических методов (см. п. 6).

Перейдем теперь к краткому описанию идей и структуры теории.

2. Основной C^*-алгебраический объект. C^*-алгебра, порожденная динамической системой. Аксиматика (порождаемая операторами (1)) сводится к следующему.

1. Выделяется исходная (базовая) C^*-алгебра A (локальных операторов). Теоретически это может быть *любая* C^*-алгебра.

2. Рассматривается некоторая группа G и представление $G\ni g\to T_g$ этой группы унитарными операторами T_g, обладающими свойством $T_gAT^*g=A$, т.е. задающими автоморфизмы

$$\hat{T}_g(a)=T_gaT^*{}_g,\quad a\in A \tag{3}$$

алгебры A.

3. Исследуемый объект – C^*-алгебра $C^*(A,G,T_g)$, порожденная операторами $a\in A$ и $T_g, g\in G$, т.е. равномерное замыкание множества операторов вида

$$\sum_g a_gT_g,\quad a_g\in A, \tag{4}$$

Это и есть C^*-алгебра, порожденная динамической системой (группой автоморфизмов).

Замечания. 1). Как уже говорилось (в п.1), при рассмотрении конкретных классов операторов роль алгебры A играют классические операторные алгебры, такие как алгебра псевдодифференциальных операторов, алгебра операторов типа свертки, алгебра общих краевых задач в смысле Буте де Монвеля и др.

2). Теория C^*-алгебр очень близкой к $C^*(A,G,T_g)$ природы (так называемых *скрещенных произведений*) была уже довольно хорошо развита к моменту, когда авторы приступили к разработке соответствующей теории ФДО. Она восходит к знаменитым работам Ф.Дж. Мюррея, Дж. Фон Неймана (F.J. Murray, J. Von Neumann) [6,7], ей посвящена монография Г.К. Педерсена (G.K. Pedersen) [5]. Однако необходимо сразу же отметить, что для исследования ФДО необходимы *не* те аспекты этой теории, которые возникают в чисто C^*-алгебраических задачах и описаны в упомянутой работе [5]. Это связано с тем, что рассматриваемые проблемы взяты из *другой* области математики: при изучении ФДО нам прежде всего важно описание структуры и свойств конкретных операторов вида (4), условий их фредгольмовости, компактности, обратимости, в то время как обсуждаемые в [6] классические C^*-алгебраические проблемы это — классификация C^*-алгебр, разложение алгебр, алгебры Фон - Неймана, факторы и т.д.

Поэтому авторы встали перед необходимостью создать синтез методов, восходящих к ФДО, а не к C^*-алгебрам (применение динамических систем, гиперболических разложений, теории устойчивости, эргодической теории и т.п.) и поднять эти методы до уровня современной теории C^*-алгебр, получив тем самым единый общий аппарат.

3. Теоремы об изоморфизме. Среди наиболее важных структурных блоков и *методов* описываемой далее теории следует выделить совокупность так называемых теорем об изоморфизме.

Эти теоремы дают легко проверяемые условия (на действие автморфизмов), при которых две C^*-алгебры рассмотренного типа изоморфны. Центральным результатом такого сорта (лежащим в основе практически всех остальных) является

Теорема. *Пусть G – дискретная аменабельная группа, действующая топологически свободно автоморфизмами $\hat{T}_g$* (3), *тогда*

$$C^*\left(A,G,T_g\right) \cong A \underset{\hat{T}}{\times} G, \tag{5}$$

где справа стоит скрещенное произведение алгебры A на группу автоморфизмов $\hat{T} = \left\{\hat{T}_g\right\}_{g\in G}$.

На протяжении последних 25 лет частные случаи формулы (5) (для более узких классов алгебр и групп) были получены в работах Д. Пршеворской-Ролевич (D. Przeworska-Rolewicz), У.Б. Арвесона (W.B. Arveson), К.Б. Джозефсона (K.B. Josephson), А.Б. Антоневича, А.В. Лебедева, В.В. Бреннера, Ю.И. Карловича, А.Б. Батхина и др.

Приведенный выше результат (доказанный в [3], гл.2) потребовал качественно нового (по сравнению с разработанными ранее) подхода к доказательству и является *предельно возможным* результатом такого сорта (как показано в [5], гл.7, условие аменабельности группы G отбросить нельзя).

Замечания. 1). Напомним, что начало исследования скрещенных произведений восходит к работам [6,7], где такие алгебры были представлены в качестве примеров C^*-алгебр с весьма сложной математической структурой.

2). К настоящему времени о структуре и свойствах скрещенных призведений известно довольно много (см., например, [5]), поэтому полученная теорема позволяет, с одной стороны, применять для работы с алгебрами типа $C^*\left(A,G,T_g\right)$ уже созданный (для скрещенных призведений) математический аппарат, а с другой стороны, развитые авторами методы работы с алгебрами типа $C^*\left(A,G,T_g\right)$ (см. далее п.п.6,7) позволили получить соответствующие новые результаты в теории скрещенных произведений. В частности, с помощью этой теоремы удалось получить описание структуры ряда идеалов в скрещенных произведениях, выявить симметрии спектра элементов из $C^*\left(A,G,T_g\right)$, описать условия наличия (отсутствия) компактных элементов в рассматриваемых алгебрах и тем самым получить критерии совпадений условий фредгольмовости и обратимости для изучаемых операторов.

3). Приведенная теорема, являясь одним из центральных технических результатов описываемой теории, фактически сыграла для исследуемых объектов роль некоммутативного преобразования Фурье (см.1.1), что и позволило далее построить символическое исчисление для ФДО и выписать условия их фредгольмовости (п.п.4,6).

4. Символ ФДО. Теоремы об изоморфизме, с одной стороны, подсказывают правильную конструкцию символа для того или иного класса "нелокальных" ФДО, а с другой — служат одним из инструментов, позволяющих обосновать соответствующее символическое исчисление.

Например, для оператора b вида (1) символом $\sigma(b)$ оказывается опять-таки *нелокальный* ФДО (действующий в пространстве функций (2n переменных) на кокасательном к X пространстве) вида

$$\sigma(b) = \sum \sigma(a_k(x,\xi))V_k,$$

где $\sigma(a_k)$ – символ оператора a_k (см.1.1.), а V_k – оператор типа замены переменной, порожденной кодифференциалом $\partial\alpha_k$ отображения α_k.

Построенные символы отражают основные алгебраические свойства исследуемых операторов и

оператор b фредгольмов тогда и только тогда, когда его символ $\sigma(b)$ обратим (ср.1.1.).

После этого задача сводится к получению условий обратимости символов (т.е. обратимости элементов из C^*-алгебр, описанного в п.2 вида).

Оказалась, что в классической теории C^*-алгебр не существует готового аппарата для решения этой задачи (ср. замечание 2 в п.2). Авторами разработано несколько общих методов вычисления условий обратимости, которые (качественно отличаясь друг от друга) могут применяться в зависимости от конкретной ситуации. Список этих методов приведен в п.6.

5. Методы исследования. В этом пункте перечислены основные общие разделы математики и методы из этих разделов, используемые для обоснования и применения C^*-теории ФДО (курсивом выделены методы, C^*-алгебраические аспекты которых разработаны авторами).

C^* - алгебры.

1) Теория представлений.
2) Автоморфизмы C^*-алгебр.
3) Скрещенные произведения.
4) C^*-алгебры со следом.
5) *Теоремы об изоморфизме*.
6) *C^*-локализация.*
7) Непрерывные поля алгебр.

Группы.

8) Абстрактный гармонический анализ.
9) Теория аменабельных групп.

Динамические системы.

10) Эргодическая теория.
11) Показатели Ляпунова.

Интегро-дифференциальные уравнения.

12) Классическая теория псевдодифференциальных (сингулярных, интегральных, теплицевых) операторов.
13) Операторы типа свертки.
14) Теория операторов Буте де Монвеля.
15) Теория пространств Соболева.

Функционально-дифференциальные уравнения.

16) *Операторы типа Квеселава–Векуа.*

К-теория.

6. Условия обратимости элементов из $C^*(A,G,T_g)$.

I. Траекторный метод (1,3,4,5).* В этом методе условия обратимо-

* Цифры в скобках рядом с названием соответствуют методам исследований, приведенным в п.5, используемым для обоснования и применения данного метода вычислений условий обратимости.

сти *недискретных* операторов вида (4) вычисляются с помощью *дискретных* операторов, построенных по траекториям точек спектра алгебры A. На этом пути, в частности, получены условия обратимости исследуемых операторов, являющиеся нелокальными аналогами классической альтернативы Фредгольма.

II. Гиперболические линейные расширения (5). В этом методе по оператору (4) строится линейное расширение динамической системы, порожденной операторами T_g, и оказывается, что

оператор b обратим тогда и только тогда, когда построенное линейное расширение гиперболично.

В результате применения этого метода получены бесконечномерные C^*-алгебраические аналоги и усиления конечномерных теорем Мазера–Саккера–Селла (Mather–Sacker–Sell).

Метод исключительно эффективен, если динамическая система порождена одной образующей.

С помощью этого метода (и операторов типа Квеселава–Векуа (см.5 (16) и п.7)) также вычисляется индекс ФДО.

III. Эргодические меры и показатели Ляпунова (5,10,11). В случае, когда A – коммутативная алгебра для двучленных операторов вида $b = a_0 + a_1 T$, вышеприведенный метод можно развить далее, используя явное вычисление спектральных характеристик оператора через интегралы по эргодическим (относительно рассматриваемой динамической системы) мерам.

Обобщение этой идеи на случай, когда коэффициенты a_0 и a_1 являются непрерывными компактнозначными операторными функциями, приводит к вычислению спектральных характеристик через соответствующие показатели Ляпунова (это обобщение получено в работах Ю.Д. Латушкина и А.М. Степина [8,9]).

IV. Аппроксимационный подход (5,8). В этом методе динамическая система, порожденная исследуемыми операторами, заменяется (аппроксимируется) динамической системой, порожденной другими (конструктивно более простыми) операторами (в частности, периодическими), что позволяет применять, например, методы C^*-алгебр, порожденных конечными динамическими системами (см.V).

С помощью этого метода для рассматриваемых алгебр и операторов

(а) построен аналог теории классических почти периодических функций,

(б) доказаны C^*-аналоги теорем Винера о заданном виде обратного оператора,

(в) доказана спектральная устойчивость для сильных возмущений (порождаемых заменой динамической системы).

V. Случай конечной группы автоморфизмов (5,7). Два случая, когда группа G, участвующая в задании алгебры $C^*(A,G,T_g)$, конечна, условия обратимости элементов из $C^*(A,G,T_g)$ вычисляются через условия обратимости специальным образом построенной матрично-операторной функции (с коэффициентами из A), т.е. сводятся к условиям обратимости операторов "локального" типа.

7. Структура C^*-теории ФДО. Приведенная схема описывает структуру построенной C^*-теории функционально-дифференциальных операторов.

Цифры возле стрелок указывают, какие методы из перечисленных в п.5 использованы для получения соответствующих результатов.

В блоке "условия обратимости символа..." римские цифры I, II,... указывают на соответствующие методы, описанные в п.6.

Работа выполнена при поддержке Международной Соросовской Программы Образования в области точных наук.

1. Антоневич А.Б. Линейные функциональные уравнения: операторный подход. Мн., 1988.
2. Antonevich A. Linear functional equations. Operator approach. Basel, 1996.
3. Antonevich A., Lebedev A. Functional differential equations: I. C^*-theory. London, 1994.
4. Пламеневский Б.А. Алгебры псевдодифференциальных операторов. М., 1986.
5. Pedersen G.K. C^*-algebras and their Automorphism Groups. London, 1979.
6. Murray F.J., Von Neumann J. // Ann. Math. 1936. V.37, P.116.
7. Murray F.J., Von Neumann J. // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. V.41. P.208.
8. Латушкин Ю.Д., Степин А.М. // Мат. сб. 1990. Т.181. №6. С.723.
9. Они же // Успехи мат. наук. 1991. Т.46. №2. С.85.