Интегралы I_1 и I_2 вычислены в леммах 1 и 2, для оценки интеграла I_3 воспользуемся неравенством Коши—Буняковского:

$$I_3 \le \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin \lambda_n(t;\theta)}{\sin \frac{t-\theta}{2}} \right|^3 dt \le \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t;\theta)dt \int_{-\pi}^{\pi} K_n^2(t;\theta)dt} \le$$

$$\le \sqrt{(1+\lambda_n(\theta))g_n(\theta)}.$$

Таким образом,

$$|f(x) - G_{2n}(x;f)| \le \frac{2\left[(1+\lambda_n(\theta))\lambda_n^2(\theta) + g_n(\theta)\right]}{g_n(\theta)} \omega_f\left(\frac{1}{\lambda_n^2(\theta)}\right) +$$

$$+ \frac{2\left[\lambda_n(\theta)\sqrt{(1+\lambda_n(\theta))g_n(\theta)} + g_n(\theta)\right]}{\pi g_n(\theta)} \omega_f\left(\frac{\sin\theta}{\lambda_n(\theta)}\right) \le$$

$$\le 4\left(\omega_f\left(\frac{1}{\lambda_n^2(\theta)}\right) + \omega_f\left(\frac{\sin\theta}{\lambda_n(\theta)}\right)\right), \ x = \cos\theta, \ x \in [-1;1].$$

Теорема 2 доказана.

1. Д ж р б а ш я н М. М. // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ-мат. 1956. Т. 9. № 7. С. 3.
2. Р у с а к В. Н. // Докл. АН БССР. 1964. Т. 8. № 7. С. 432.
3. О н ж е // Рациональные функции как аппарат приближения. Мн. 1979.
4. О н ж е // Мат. сб. 1985. Т. 128. № 4. С. 442.
5. П е к а р с к и й А. А. // Там же. 1987. Т. 133. № 1. С. 86.
6. Р о в б а Е. А. // Докл. АН БССР.1979. Т. 23. № 11. С. 968.
7. Т и м а н А. Ф. // Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.

Поступила в редакцию 10.03.95.

УДК 517.925.6

В. И. МАТАТОВ, Л. В. МИХАЙЛОВСКАЯ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

The necessary conditions of uniqueness of movable singularities for a system of two differential equations with cubic nonlinearities have been obtained. The degenerative cases when the symplifying linear transformation of the unknown functions does not work have also been considered.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} x' = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \ldots + \alpha_6 x^3 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 x y^2 + \alpha_9 y^3 = P_3(x,y), \\ y' = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \ldots + \beta_6 x^3 + \beta_7 x^2 y + \beta_8 x y^2 + \beta_9 y^3 = Q_3(x,y), \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha_0 = \alpha_0(z), \ldots, \beta_9 = \beta_9(z)$ — голоморфные функции z в области $D \subset \mathbf{C}$, $(P_3, Q_3)=1$, $z \in \mathbf{C}$, $(x, y) \in \hat{\mathbf{C}}^2$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, троеточия означают невыписанные члены второй степени относительно x, y. Целью статьи является нахождение необходимых условий однозначности подвижных особенностей системы (1), т. е. условий принадлежности ее классу P. Системам с кубическими нелинейностями посвящены работы [1, 2]. Следует отметить, что в данных статьях не рассматриваются вырожденные случаи, когда упрощающие линейные преобразования искомых функций не действуют.

С помощью линейного преобразования

$$x = X + \mu(z)Y, \ \ y = Y, \quad (2)$$

где $\mu(z)$ — любой из корней уравнения

$$\alpha_9 + (\alpha_8 - \beta_9)\mu + (\alpha_7 - \beta_8)\mu^2 + (\alpha_6 - \beta_7)\mu^3 - \beta_6\mu^4 = 0, \tag{3}$$

исходная система приводится к виду, не содержащему Y^3 в первом уравнении:

$$\begin{cases} X' = a_0 + a_1 X + a_2 Y + \ldots + a_6 X^3 + a_7 X^2 Y + a_8 X Y^2, \\ Y' = b_0 + b_1 X + b_2 Y + \ldots + b_6 X^3 + b_7 X^2 Y + b_8 X Y^2 + b_9 Y^3. \end{cases} \tag{4}$$

В (4) коэффициенты $a_0 = a_0(z)$, ..., $b_9 = b_9(z)$ определенным образом выражаются через α_0, ..., β_9 и μ, т. е. $a_0 = \alpha_0 - \beta_0\mu$, ..., $b_9 = \beta_9 + \beta_8\mu + \beta_7\mu^2 + \beta_6\mu^3$. Вводим в систему (4) параметр λ по формулам: $X = \xi$, $Y = \eta/\lambda$, $z = z_0 + \lambda^2 t$, где $z_0 \in D$ (ниже по тексту z_0 также берется из D) [3]. Соответствующая система нулевого приближения есть

$$\xi' = a_5(z_0)\eta^2 + a_8(z_0)\xi\eta^2, \quad \eta' = b_9(z_0)\eta^3.$$

Очевидно, что последняя система имеет многозначные подвижные особенности, за исключением случая, когда $b_9(z_0) = 0$. Так как z_0 — любая точка из D, то для однозначности подвижных особенностей системы (4) (т. е. принадлежности ее P-типу) необходимо, чтобы $b_9(z) \equiv 0$. Более подробно это условие записывается так:

$$\beta_9 + \beta_8\mu + \beta_7\mu^2 + \beta_6\mu^3 \equiv 0, \tag{5}$$

где $\mu = \mu(z)$ удовлетворяет уравнению (3).

Таким образом, верна следующая

Теорема 1. Для того, чтобы система (1) не имела многозначных подвижных особенностей, необходимо выполнение условия (5), где $\mu = \mu(z)$ —любой корень алгебраического уравнения (3) (предполагается, что корни этого уравнения существуют).

Замечание. Выразим функцию $\mu = \mu(z)$ через коэффициенты исходной системы (1). Умножая (5) на $\mu(z)$ и складывая полученное уравнение с (3), получим уравнение $\alpha_6\mu^3 + \alpha_7\mu^2 + \alpha_8\mu + \alpha_9 = 0$. Пусть $\alpha_6 \not\equiv 0$ (если $\alpha_6 \equiv 0$, то μ удовлетворяет квадратному уравнению, которое легко решается). Таким образом, будем рассматривать кубическое уравнение $\mu^3 + a\mu^2 + b\mu + c = 0$, где $a = \alpha_7/\alpha_6$, $b = \alpha_8/\alpha_6$, $c = \alpha_9/\alpha_6$. С помощью замены $\mu = \tilde{\mu} - a/3$ кубическое уравнение для μ приводится к виду $\tilde{\mu}^3 + p\tilde{\mu} + q = 0$, где $p = -a^2/3 + b$, $q = 2a^3/27 - (ab)/3 + c$. Используя формулу Кардано, получим $\tilde{\mu} = r + s = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$, где r и s удовлетворяют равенству $rs = -p/3$. Тем самым $\tilde{\mu}$ (а значит, и μ) выражается через коэффициенты исходной системы (1). Аналогичным образом функция $\nu = \nu(z)$ может быть выражена через коэффициенты исходной системы (см. теорему 3).

Возможен случай, когда уравнение (3) не имеет корней, т. е. когда реализуются тождества

$$\begin{gathered} \alpha_8(z) - \beta_9(z) \equiv 0, \alpha_7(z) - \beta_8(z) \equiv 0, \\ \alpha_6(z) - \beta_7(z) \equiv 0, \beta_6(z) \equiv 0, \quad \alpha_9(z) \not\equiv 0. \end{gathered} \tag{6}$$

В этом случае имеем систему

$$\begin{cases} x' = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \ldots + \alpha_6 x^3 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 x y^2 + \alpha_9 y^3, \\ y' = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \ldots + \alpha_6 x^2 y + \alpha_7 x y^2 + \alpha_8 y^3, \end{cases} \tag{7}$$

где $\alpha_9 = \alpha_9(z) \not\equiv 0$. Вводя в (7) параметр λ по формулам $x = \xi/\lambda$, $y = \eta$, $z = z_0 + \lambda^2 t$ и рассматривая систему нулевого приближения, получаем, что для принадлежности этой системы Р-типу необходимо, чтобы $\alpha_6(z) \equiv 0$. Преобразуем систему (7) (условие $\alpha_6(z) \equiv 0$ имеет место) с помощью формул $x = \xi / \lambda^3, y = \eta / \lambda^2, z = z_0 + \lambda^5 t$. При $\alpha_7(z_0) \neq 0$ соответствующая система нулевого приближения $\xi' = \alpha_7(z_0)\xi^2\eta$, $\eta' = \alpha_7(z_0)\xi\eta^2$ сводится к уравнению $\xi'' = (3/\xi)\xi'^2$, которое имеет многозначные подвижные особенности [3]. Итак, если (7) (при $\alpha_6(z) \equiv 0$) — Р-типа, то необходимо $\alpha_7(z) \equiv 0$. С учетом условий $\alpha_6(z) \equiv \alpha_7(z) \equiv 0$ будем рассматривать систему

$$\begin{cases} x' = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \ldots \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 y^3, \\ y' = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \ldots + \alpha_8 y^3, \end{cases} \tag{8}$$

где второе уравнение содержит только один член третьей степени. Пусть $x = \xi / \lambda, y = \eta / \lambda, z = z_0 + \lambda^2 t$. При λ=0 получим систему $\xi' = \alpha_8(z_0)\xi\eta^2 + \alpha_9(z_0)\eta^3$, $\eta' = \alpha_8(z_0)\eta^3$, которая заведомо имеет многозначные подвижные особенности, если $\alpha_8(z_0) \neq 0$. Таким образом, если (8) обладает свойством Пенлеве (т. е. принадлежит P), то необходимо выполнение тождества $\alpha_8(z) \equiv 0$. С учетом этого условия сделаем над системой (8) преобразование $x = \xi / \lambda^4, y = \eta / \lambda^3, z = z_0 + \lambda^5 t$ ($z_0 \in D$ и такое, что $\alpha_9(z_0) \neq 0$). В результате (при λ=0) получим систему $\xi' = \alpha_9(z_0)\eta^3$, $\eta' = \beta_3(z_0)\xi^2$, которая является автономной системой Гамильтона. Исключая из последней системы с помощью первого интеграла $\frac{1}{4}\alpha_9(z_0)\eta^4 - \frac{1}{3}\beta_3(z_0)\xi^3 = C_0$ (C_0 — произвольная постоянная) переменную $\eta(z)$ [4], получим уравнение первого порядка

$$\xi'^4 - 64\alpha_9(z_0)\left[\frac{1}{27}\beta_3^3(z_0)\xi^9 + \frac{1}{3}\beta_3^2(z_0)C_0\xi^6 + \beta_3(z_0)C_0^2\xi^3 + C_0^3\right] = 0. \tag{9}$$

По теореме Фукса [5] имеем следующее: если уравнение (9) — Р-типа, то необходимо $\beta_3(z_0) = 0$ (условие $\alpha_9(z_0) \neq 0$ учтено). Тем самым мы получили утверждение: если (8) (при $\alpha_8(z) \equiv 0$) есть система класса P, то необходимо $\beta_3(z) \equiv 0$, и она имеет вид

$$\begin{cases} x' = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_9 y^3, \\ y' = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_4 xy + \beta_5 y^2. \end{cases} \tag{10}$$

Полагая в (10) $x = \xi / \lambda^3, y = \eta / \lambda^2, z = z_0 + \lambda^3 t$, будем иметь систему нулевого приближения $\xi' = \alpha_9(z_0)\eta^3 + \alpha_3(z_0)\xi^2$, $\eta' = \beta_4(z_0)\xi\eta$, которая сводится к уравнению

$$\eta'' = \left(1 + \frac{\alpha_3(z_0)}{\beta_4(z_0)}\right)\frac{\eta'^2}{\eta} + \beta_4(z_0)\alpha_9(z_0)\eta_4. \tag{11}$$

Решения (11) имеют многозначные подвижные особенности, если $\beta_4(z_0) \neq 0$ [3] (учитываем то, что $\alpha_9(z_0) \neq 0$). Отсюда следует, что для системы (10) необходимым условием принадлежности ее классу P является тождество $\beta_4(z) \equiv 0$. В итоге доказана

Теорема 2. Пусть для системы (1) выполняются условия (6). Для того, чтобы соответствующая система была Р-типа, необходимо, чтобы она имела вид

$$\begin{cases} x' = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_9 y^3, \\ y' = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_5 y^2. \end{cases} \tag{B$_1$}$$

Система (4) с учетом условия $b_9(z) \equiv 0$ записывается следующим образом

$$\begin{cases} X' = a_0 + a_1 X + a_2 Y + \ldots + a_6 X^3 + a_7 X^2 Y + a_8 XY^2, \\ Y' = b_0 + b_1 X + b_2 Y + \ldots + b_6 X^3 + b_7 X^2 Y + b_8 XY^2. \end{cases} \tag{12}$$

Пусть

$$X = u, Y = \nu(z)u + v, \tag{13}$$

где u, v — новые искомые функции, а $\nu(z)$ — любой из корней уравнения

$$b_6 + (b_7 - a_6)\nu + (b_8 - a_7)\nu^2 - a_8\nu^3 = 0. \tag{14}$$

В результате получим систему

$$\begin{cases} u' = A_0 + A_1 u + A_2 v + \ldots + A_6 u^3 + A_7 u^2 v + A_8 uv^2, \\ v' = B_0 + B_1 u + B_2 v + \ldots + B_7 u^2 v + B_8 uv^2, \end{cases} \tag{15}$$

где $A_0 = A_0(z), \ldots, B_8 = B_8(z)$ — голоморфные функции z, которые определенным образом выражаются через $a_0, \ldots, b_8$ и ν, в частности $A_6 = a_6 + a_7\nu + a_8\nu^2$. С помощью преобразования $u = \xi / \lambda$, $v = \eta$, $z = z_0 + \lambda^2 t$ в (15) вводим параметр λ. Это дает систему нулевого приближения $\xi' = A_6(z_0)\xi^3$, $\eta' = B_3(z_0)\xi^2 + B_7(z_0)\xi^2\eta$. Очевидно, что если $A_6(z_0) \neq 0$, то последняя система $\notin$P. Значит, необходимое условие принадлежности (15) классу P есть тождество $A_6(z) \equiv 0$, т. е.

$$a_6 + a_7\nu + a_8\nu^2 \equiv 0, \tag{16}$$

где $\nu(z)$ — корень уравнения (14). Значит, справедлива

Теорема 3. Для того, чтобы система (12) была P-типа, необходимо выполнение тождества (16), где $\nu(z)$ — любое решение алгебраического уравнения (14) (условия существования корней для (14) имеют место).

Замечание. Здесь также возможен случай, когда уравнение (14) не имеет корней, т. е. когда реализуются условия $b_6(z) \not\equiv 0, b_7(z) - a_6(z) \equiv 0$, $b_8(z) - a_7(z) \equiv 0, a_8(z) \equiv 0$. В этом случае получается следующее: если соответствующая система (12) — P-типа, то необходимо, чтобы она имела вид

$$\begin{cases} X' = a_0 + a_1 X + a_2 Y + a_3 X^2 \\ Y' = b_0 + b_1 X + b_2 Y + b_3 X^2 + b_4 XY + b_6 X^3. \end{cases} \tag{B_2}$$

Для обоснования этого утверждения применяется метод малого параметра аналогично изложенному выше.

Из всего вышеизложенного вытекает

Теорема 4. Если исходная система (1) $\in$P, то:

1) либо она с помощью линейных преобразований (2), (13), где $\mu(z)$, $\nu(z)$ удовлетворяют соответственно уравнениям (3), (14), приводится к виду, не содержащему кубов искомых функций (т. е. u^3, v^3) в обоих уравнениях;

2) либо она сводится к системам (B_1) или (B_2), когда алгебраические уравнения (3) или (14) не имеют решений.

1. Bureau F. J. // Bull. cl. sci. Acad. roy Belg. 1981. V. 67. № 9. P. 512.
2. Прокашева В. А. // Доклады АН БССР. 1984. Т. 28. № 10. С. 869.
3. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.
4. Мататов В. И., Сабынич Л. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 1. С. 48.
5. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.

Поступила в редакцию 05. 01.95.