МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра дискретной математики и алгоритмики

КЛИЦУНОВ Андрей Владимирович

СЛОЖНОСТЬ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ПОИСКОМ СПЕЦИАЛЬНЫХ ДЕРЕВЬЕВ В ГРАФЕ

Магистерская диссертация
специальность 1-31 80 09 прикладная математика и информатика

Научный руководитель
Дугинов Олег Иванович
кандидат физ.-мат. наук, доцент

Допущена к защите

«___» ____________ 20___г.

Зав. кафедрой дискретной математики и алгоритмики
Котов Владимир Михайлович
доктор физ.-мат. наук, профессор

Минск, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

АГУЛЬНАЯ ХАРАКТАРЫСТЫКА РАБОТЫ

Магістарская дысертацыя, 55 с., 13 крыніц, 17 выяў.

ГРАФ, ДРЭВА, ВОСТАЎНАЕ ДРЭВА, АБМЕЖАВАННЕ, NP-ПАЎНАТА, NP-СКЛАДАНАСЦЬ, ЗВЯДЗЕННЕ, ЭТАЛОННАЯ ЗАДАЧА, ПСЕЎДАПАЛІНАМІАЛЬНАЯ ВЫРАШАЛЬНАСЦЬ, ДАСТАЎКА ПАВЕДАМЛЕННЯ.

Аб'ект даследавання — графы.

Мэта работы — разглядзець спецыяльныя дрэвы з адрознымі ўласцівасцямі, вызначыць клас вылічальнай складанасці задачы пошуку гэтага спецыяльнага дрэва ў адвольным графе або ў графе з некаторага спецыяльнага класа, калі клас задачы вызначаны, разглядзець дакладныя (калі магчыма) ці набліжаныя алгарытмы пошуку, а таксама прапанаваць свае варыянты рашэння. Таксама мэтай работы з'яўляецца пошук некаторых неабходных умоў існавання ў графе спецыяльнага дрэва, а таксама вызначэнне класа вылічальнай складанасці задач, якія адпавядаюць неабходным умовам. Яшчэ ў мэту работы ўваходзіць больш падрабязнае разгледжанне задачы распаўсюджання інфармацыі па сетцы, яе класічнай пастаноўкі і іншых пастановак, вызначэнне класа гэтых задач па вылічальнай складанасці.

Метады даследавання — пабудова палінаміяльных звядзенняў, вывучэнне падыходаў да пабудовы эўрыстычных алгарытмаў, праца з навуковымі матэрыяламі.

Вынікі — пабудаваны шэраг палінаміяльных звядзенняў, які даказвае NP-складанасць разгледзеных задач пошуку ў графе спецыяльных дрэваў, а таксама атрыманыя некаторыя вынікі для спецыяльных класаў графаў. Больш падрабязна была разгледзена задача распаўсюджання інфармацыі па сетцы, яе класічная і іншыя варыянты пастаноўкі. Быў пабудаваны шэраг палінаміяльных звядзенняў задачы 3-ЗДЗЯЙСНЯЛЬНАСЦЬ да распазнавальных версій пастановак гэтай задачы. Пабудаваны палінаміяльны алгарытм для задачы МЭТАВАЕ МНОСТВА ў адным з спецыяльных класаў графаў.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Магистерская диссертация, 55 с., 13 источников, 17 изображений.

ГРАФ, ДЕРЕВО, ОСТОВНОЕ ДЕРЕВО, ОГРАНИЧЕНИЕ, NP-ПОЛНОТА, NP-ТРУДНОСТЬ, СВЕДЕНИЕ, ЭТАЛОННАЯ ЗАДАЧА, ПСЕВДОПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ, ДОСТАВКА СООБЩЕНИЯ.

Объект исследования – графы.

Цель работы — рассмотреть специальные деревья с различными свойствами, определить класс вычислительной сложности задачи поиска этого специального дерева в произвольном графе либо в графе из некоторого специального класса, если класс задачи определён, рассмотреть точные (если возможно) или приближённые алгоритмы поиска, а также предложить свои варианты решения. Также целью работы является поиск некоторых необходимых условий существования в графе специального дерева, а также определение класса вычислительной сложности задач, которые соответствуют этим необходимым условиям. Ещё в цель работы входит более подробное рассмотрение задачи распространения информации в сети, её классической постановки и других постановок, определение класса этих задач по вычислительной сложности.

Методы исследования — построение полиномиальных сведений, изучение подходов к построению эвристических алгоритмов, работа с научными материалами.

Результаты — построен ряд полиномиальных сведений, доказывающий NP-трудность рассматриваемых задач поиска в графе специальных деревьев, а также получены некоторые результаты для специальных классов графов. Более подробно была рассмотрена задача распространения информации в сети, её классическая и другие варианты постановки. Был построен ряд полиномиальных сведений задачи 3-Выполнимость к распознавательным версиям постановок этой задачи. Построен полиномиальный алгоритм для задачи Целевое Множество в одном из специальных классов графов.

GENERAL DESCRIPTION OF WORK

Master's thesis, 55 pp., 13 sources, 17 images.

GRAPH, TREE, SPANNING TREE, RESTRICTION, NP-COMPLETENESS, NP-HARDNESS, REDUCTION, REFERENCE TASK, PSEUDOPOLYNOMIAL SOLVABILITY, INFORMATION DELIVERY.

Object of research — graphs.

The purpose of the work — to consider specified trees with different properties, to determine the class of computational complexity of the problem of finding this specified tree in an arbitrary graph or in a graph from a certain special class, if the class of the problem is defined, to consider accurate (if possible) or approximate search algorithms, and to offer some new solutions. The aim is also to find some necessary conditions for the existence of a specified tree in a graph, as well as to determine the class of computational complexity of problems that meet these necessary conditions. The goals of the work include a more detailed consideration of information delivery problem, its classical formulation and other formulations, the definition of the class of these problems by computational complexity.

Research methods — the construction of polynomial reductions, research of creating heuristic algorithms, work with research sources.

Results — a range of polynomial reductions proving the NP-hardness of the considered problems of searching a specified tree in a graph are constructed, and some results for special classes of graphs are obtained. Information delivery problem and its other versions were considered in more detail. A range of polynomial reductions of the problem 3-Satisfiability to the recognition versions of the formulations of this problem are constructed. NP-hardness of all considered problems is shown. A polynomial algorithm to special case of Target Set Selection problem is developed.

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня сеть Интернет занимает важное место в жизни среднестатистического человека, в частности, социальные сети. Люди каждый день делятся фотографиями, делятся своим настроением, отмечают места, в которых побывали, интересно проводят время.

Также произошла революция в области рекламы и маркетинга: теперь человек потребляет рекламу, не вставая из компьютера. Этому способствовало развитие рекомендательных систем, ценность пользовательских данных для этих систем, а также то, что реклама является единственным способом заработка для большинства интернет-ресурсов.

В данной работе будет рассмотрены задачи, связанные с поиском специальных деревьев в графе. Одной из этих задач является задача Целевое Множество, которая имеет важное теоретическое и практическое значение. Задача находит приложения в области маркетинга и анализа социальных сетей. Эта задача, в первую очередь, даёт математическую модель задачи, которая формулируется вопросом: «Как минимизировать количество источников информации так, чтобы эта информация в любом случае распространилась среди получателей?»

Также в этой работе будет рассмотрена задача распространения информации в сети (см. [1]), которая имеет прикладной характер, например, имеет применение в таких системах, как Personal handy-phone system, беспроводная ad-hoc сеть, но при этом сама задача изучена не так сильно, как другие теоретико-графовые задачи. Возможно, результаты в направлении этой задачи дадут толчок в развитии беспроводных сетей и мобильных систем.

Другие, рассматриваемые в данной работе, задачи также имеют прикладное значение, например, в компьютерных сетях и генетических алгоритмах необходимо решать задачу Остов Ограниченной Степени. На основе решения смежных с рассматриваемой темой задач разработан протокол канального уровня STP (Spanning Tree Protocol).

Также представляет интерес исследование задач поиска в графе специальных деревьев в специальных классах графов (например, k-регулярный граф). Это может быть полезно в тех случаях, когда на практике граф, которым описывается математическая модель задачи, принадлежит некоторому фиксированному классу графов.

Цель работы — выявить новые полиномиально разрешимые и NP-трудные случаи рассматриваемых задач, а также исследовать вопросы аппроксимации рассматриваемых задач.

ГЛАВА 1
ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В этой главе будет выполнен аналитический обзор литературы по теме — анализ работ, выполненных ранее отечественными и зарубежными исследователями, описание имеющихся подходов к исследованию проблемы, оценка степени изученности вопроса, формулирование проблемы, которая остается неразрешённой.

1.1 Задача распространения информации в сети

Доставка Сообщения
УСЛОВИЕ. Пусть имеется связный неориентированный граф G без кратных рёбер и петель, в каждой вершине которого находится терминал, способный принимать и передавать сообщения. У нас имеется одно сообщение, которое изначально находится только в одном терминале. Все остальные терминалы этого сообщения не имеют. За один шаг сообщение может быть передано по рёбрам графа из терминалов, где это сообщение есть, в терминалы без сообщения. При этом из одного терминала сообщение можно отправить только одному терминалу.
ВОПРОС. За какое минимальное число шагов (обозначим $s(G)$) можно доставить сообщение во все вершины графа?

В теоретико-графовой постановке в задаче требуется найти минимальное число k такое, что существует остовное дерево $T = (VT, ET)$ графа G и функция $w : ET \to \{1, 2, ..., k\}$ (расставляющая номера шагов, на которых будет происходить передача сообщения по рёбрам дерева) такая, что:

1. $w(e) \neq w(f)$ для любых двух смежных рёбер e и f дерева T;

2. значения функции w на рёбрах любой простой цепи дерева T, начинающейся в вершине s, образуют возрастающую последовательность.

Эта постановка равносильна поиску в G остовного дерева, для которого функция w удовлетворяет всем условиям и имеет минимальное по мощности множество значений.

Впервые задача распространения информации в сети была сформулирована в статье [1], в которой был найден точный алгоритм решения задачи в классе деревьев, а также проведено исследование качества базовых приближённых алгоритмов.

В данной работе будет исследована вычислительная сложность классической постановки (пункт 2.5), а также вычислительная сложность следующих формулировок задачи:

Ориентированная Доставка Сообщения с n источниками
УСЛОВИЕ. Пусть имеется связный ориентированный граф G без кратных дуг и петель, в каждой вершине которого находится терминал, способный принимать и передавать сообщения. У нас имеется одно сообщение, которое изначально находится только в некоторых n терминалах. Все остальные терминалы этого сообщения не имеют. За один шаг сообщение может быть передано по дугам графа из терминалов, где это сообщение есть, в терминалы без сообщения. При этом из одного терминала сообщение можно отправить только одному терминалу.
ВОПРОС. За какое минимальное число шагов можно доставить сообщение во все вершины графа?

Вычислительная сложность данной постановки задачи будет исследована в пункте 2.1.

Ориентированная Доставка Сообщения
УСЛОВИЕ. Пусть имеется связный ориентированный граф G без кратных дуг и петель, в каждой вершине которого находится терминал, способный принимать и передавать сообщения. У нас имеется одно сообщение, которое изначально находится только в одном терминале. Все остальные терминалы этого сообщения не имеют. За один шаг сообщение может быть передано по дугам графа из терминалов, где это сообщение есть, в терминалы без сообщения. При этом из одного терминала сообщение можно отправить только одному терминалу.
ВОПРОС. За какое минимальное число шагов можно доставить сообщение во все вершины графа?

Вычислительная сложность данной постановки задачи будет исследована в пункте 2.2.

Доставка Сообщения в Подмножество Вершин
УСЛОВИЕ. Пусть имеется связный неориентированный граф G без кратных рёбер и петель, в каждой вершине которого находится терминал, способный принимать и передавать сообщения. У нас имеется одно сообщение, которое изначально находится только в одном терминале. Все остальные терминалы этого сообщения не имеют. За один шаг сообщение может быть передано по рёбрам графа из терминалов, где это сообщение есть, в терминалы без сообщения. При этом из одного терминала сообщение можно отправить только одному терминалу. Также имеется подмножество вершин, в которые необязательно отправлять сообщение.
ВОПРОС. За какое минимальное число шагов можно доставить сообщение во

вершины графа, в которые обязательно отправлять сообщение?

Вычислительная сложность данной постановки задачи будет исследована в пункте 2.3.

Доставка Сообщения с n источниками
УСЛОВИЕ. Пусть имеется связный неориентированный граф G без кратных рёбер и петель, в каждой вершине которого находится терминал, способный принимать и передавать сообщения. У нас имеется одно сообщение, которое изначально находится только в некоторых n терминалах. Все остальные терминалы этого сообщения не имеют. За один шаг сообщение может быть передано по рёбрам графа из терминалов, где это сообщение есть, в терминалы без сообщения. При этом из одного терминала сообщение можно отправить только одному терминалу.
ВОПРОС. За какое минимальное число шагов можно доставить сообщение во все вершины графа?

Вычислительная сложность данной постановки задачи будет исследована в пункте 2.4.

Доставка Сообщения с Выбором Источника
УСЛОВИЕ. Пусть имеется связный неориентированный граф G без кратных рёбер и петель, в каждой вершине которого находится терминал, способный принимать и передавать сообщения. У нас имеется одно сообщение, для которого можно выбрать один терминал, в котором оно находится. Все остальные терминалы этого сообщения не имеют. За один шаг сообщение может быть передано по рёбрам графа из терминалов, где это сообщение есть, в терминалы без сообщения. При этом из одного терминала сообщение можно отправить только одному терминалу.
ВОПРОС. За какое минимальное число шагов можно доставить сообщение во все вершины графа?

Вычислительная сложность данной постановки задачи будет исследована в пункте 2.6.

Все сформулированные выше задачи — задачи оптимизации. Для них будут рассмотрены распознавательные формулировки, где условие $s(G) \to min$ заменяется на вопрос: существует ли способ доставки сообщения в графе G, такой, что $s(G) \leqslant Y$? Показав, что распознавательная версия задачи являтется NP-полной, а следовательно, и NP-трудной, в силу связанности оптимизационной и распознавательной версии сводимостью по Тьюрингу получим, что оптимизационная версия задачи будет NP-трудной.

1.2 Задачи поиска специального остовного дерева

Остов Ограниченного Диаметра [2]
УСЛОВИЕ. Дан связный граф $G = (V, E)$, где V — множество вершин, $|V| = n$, E — множество рёбер, $f : E \to \mathbb{Z}_+$ — функция стоимости, и число $2 \leqslant D \leqslant n - 2$.
ВОПРОС. Существует ли в этом графе остовное дерево, имеющее минимальную суммарную стоимость и диаметр, меньший или равный D?

Для данной задачи в статье [3] получены следующие результаты:

- Если $D = 2$, или $D = 3$, или стоимости всех рёбер равны, то задача Остов Ограниченного Диаметра полиномиально разрешима.

- Если $4 \leqslant D \leqslant n - 2$ и стоимости всех рёбер не равны, то задача Остов Ограниченного Диаметра является NP-трудной (к этой задаче сводится эталонная задача Точное Покрытие 3-Множествами).

Замечание 1.1. С учётом того, что задача Точное Покрытие 3-Множествами является NP-полной в сильном смысле, в случае P $\neq$ NP задача Остов Ограниченного Диаметра при $4 \leqslant D \leqslant n-2$ и неодинаковых стоимостях рёбер не имеет псевдополиномиального алгоритма решения.

Для задачи Остов Ограниченного Диаметра в пункте 4.1 будет определена её вычислительная сложность в классе k-регулярных графов.

Остов Ограниченной Степени
УСЛОВИЕ. Дан граф $G = (V, E)$, $f : E \to \mathbb{Z}_+$ — функция стоимости — и положительное число $K \leqslant |V|$.
ВОПРОС. Существует ли остовное дерево в графе G минимальной стоимости, к которой для любой фиксированной вершины её степень в том остовном дереве не превышает K?

Для данной задачи в научных статьях найдены следующие результаты:

- Для любого фиксированного $K \geqslant 2$ данная задача NP-трудная (для $K = 2$ задача эквивалентна поиску гамильтонова пути в графе (см. [2])).

- Задача аппроксимации оптимального решения задачи Остов Ограниченной Степени с константной точностью является NP-трудной (см. [2]).

- В статье [4] предложен Ant-based алгоритм решения данной задачи, не имеющий гарантированной оценки точности, как и большинство других известных эвристик, применённых к этой задаче.

- Также рассматривают формулировку этой задачи, где ограничение на степень не одинаково для всех вершин, а своё для различных вершин, в статье [5] предложены приближённые алгоритмы решения задачи в данной формулировке.

Замечание 1.2. С учётом того, что задача Гамильтонов Путь является NP-полной в сильном смысле, задача Остов Ограниченной Степени является NP-полной в сильном смысле и в случае $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ не имеет псевдополиномиального алгоритма решения.

Для задачи Остов Ограниченной Степени в пункте 4.3 будет определена её вычислительная сложность в классе k-регулярных графов и в классе планарных графов с ограниченной максимальной степенью вершин.

1.3 Задача Целевое Множество

Целевое Множество
УСЛОВИЕ. Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф, на множестве вершин которого задана функция активации $f : V \to N$, которая определяет порог активации каждой вершины графа. Пусть S — подмножество вершин графа G. Процесс активации вершин начинается с того, что все вершины графа G, принадлежащие S, и только они активируются. Таким образом, изначально $S_0 = S$. Далее совершается итерационный процесс, на каждой итерации которого активируются новые вершины в соответствии со следующим првилом: множество активированных вершин на i-й итерации $S_i = S_{i-1} \cup \{v \in V : |N(v) \cap S| \geqslant f(v),\ i = 1, 2, \ldots, t\}$. Процесс завершается в тот момент, когда на некоторой k-й итерации либо все вершины графа G активированы, либо ни одна из неактивированных вершин не переходит в состояние активированной.
ВОПРОС. Необходимо найти наименьшее (по числу вершин) начальное множество S активированных вершин такое, что по завершению процесса активации все вершины графа G имеют статус активированных.

Для данной задачи в научных статьях найдены следующие результаты:

- В работе [6] была доказана NP-трудность задачи в классе планарных графов.

- В работе [7] разработан такой полиномиальный алгоритм, решающий задачу в классе графов с ограниченным параметром twin cover number некоторой константой k для случая задачи, в котором функция активации ставит в соответствие каждой вершине v графа половину степени вершины v.

- В работе [8] задача Целевое Множество исследована в классе графов сотовых сетей.
- В работе [9] доказано, что задача Целевое Множество является NP-трудной в классе двудольных графов с минимальной степенью вершин не меньше 2 и функцией активации, которая тождественно равна 2.

В работе для задачи Целевое Множество в пункте 4.5 будут исследованы следующие вопросы:

- Вычислительная сложность задачи в классе рёберных графов с функцией активации, принимающей значения из множества $\{1, 2\}$.
- Вычислительная сложность задачи в классе пороговых графов G с функцией активации, для которой выполняются следующие условия: 1) $deg(v) \geqslant deg(u) \Rightarrow f(v) \geqslant f(u)$ для любой пары вершин v, u графа G; 2) $f(v) < deg(v)$ для любой вершины v графа G.

ГЛАВА 2
ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ В СЕТИ

В этой главе будут изложены результаты исследования вычислительной сложности задачи распространения информации по сети в классической и других формулировках.

Далее в этой главе нам понадобится следующая задача:

3-Выполнимость (3-Вып)
УСЛОВИЕ. Дана КНФ F, состоящая из m элементарных дизъюнкций c_1, c_2, c_m ... по n булевым переменным x_1, x_2,... x_n, причём каждый литерал $(x_i, \bar{x}_i)$ входит во все дизъюнкции не более, чем 2 раза, а в каждую элементарную дизъюнкцию входит ровно 3 литерала.
ВОПРОС. Существует ли набор значений булевых переменных, на котором КНФ равна единице?

Далее в пунктах главы сразу будет рассматриваться распознавательная версия задачи, о которой ведётся речь в этом пункте. Каждая из них принадлежит классу NP, т.к. сертификат (порядок доставки информации, отвечающий за существование способа доставки сообщения за число шагов $\leqslant Y$) можно проверить за линейное, т.е. полиномиальное от числа вершин время (для Y, значительно большего (экспоненциально), чем количество вершин, ответ всегда «да» — очевидно — поэтому такое значение Y нас не интересует).

2.1 Случай ориентированного графа с n источниками

Покажем, что к этой задаче полиномиально сводится задача 3-Вып, из чего будет следовать то, что распознавательная версия задачи Ориентированная Доставка Сообщения с n источниками является NP-полной. Для этого построим пример этой задачи по примеру задачи 3-Вып. Для каждой переменной x_i, которой соответствуют 2 литерала x_i и $\bar{x}_i$, строим следующие графы:

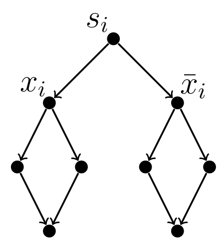

Рисунок 2.1.1.—Конструкция для одной переменной

Далее в этом графе каждой элементарной дизъюнкции будут соответствовать вершины, в которые будут идти дуги из одной (любой) из двух вершин, в которые, в свою очередь, идут дуги из некоторого литерала, и эта дуга в вершину c_i идёт, если этот литерал состоит в дизъюнкции, соответствующей вершине. Так соединим всех детей вершин-литералов с вершинами-дизъюнкциями, в результате получим следующий граф:

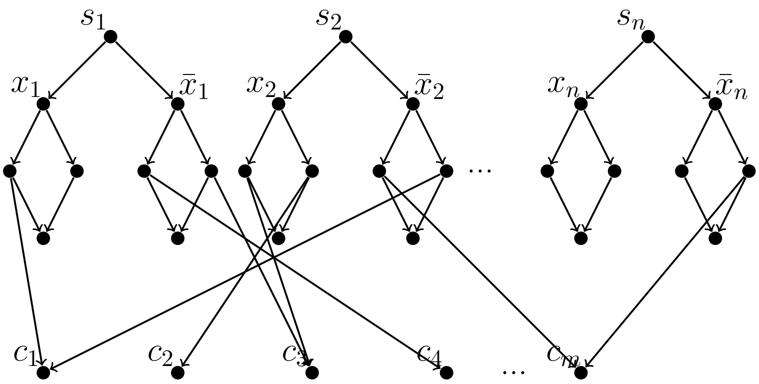

Рисунок 2.1.2.—Граф G

Обозначим построенный граф G, в вершинах s_i будет первоначально находиться сообщение.

Теорема 2.1. *Для КНФ F существует набор значений переменных, на котором значение F равно $1 \Leftrightarrow s(G) \leqslant 4$ (т.е. в G из вершин $s_1, \ldots, s_n$ сообщение можно доставить во все вершины за не более, чем 4 шага).*

Доказательство. $\Rightarrow$ Покажем схему доставки сообщения, для этого сделаем это для каждой конструкции, соответствующей некоторой переменной (рис. 2.1.1), вместе с дугами в вершины-дизъюнкции, в которых присутствуют литералы, по которым построены вершины конструкции. Без ограничения общности в выполняющем наборе $x_i = 1$, в случае $x_i = 0$ действия аналогичны (первым ходом идём в вершину $\bar{x}_i$, а далее доставляем сообщение в подграфе, достижимом из $\bar{x}_i$ так, как доставляется сообщение в подграфе, достижимом из x_i, в случае $x_i = 1$ и делаем подобное для подграфа, достижимого из x_i). На дугах будем обозначать номер шага, на котором по этой дуге будет отправляться сообщение.

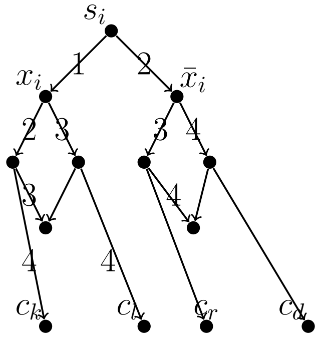

Рисунок 2.1.3.—Способ доставки

В результате во все вершины-дизъюнкции, в которых переменная принимает значение 1, мы доставили сообщение за 4 шага. Т.к. у нас все дизъюнкции имеют хотя бы одну переменную, равную единице, сообщение в каждую вершину-дизъюнкцию будет доставлено, а в остальные оно очевидно будет доставлено, исходя из построения доставки.

$\Leftarrow$ Для доказательства нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Для любого способа доставки сообщения в графе G за 4 шага во все его вершины верно следующее: из любой вершины s_i сообщение доставлено в вершины-дизъюнкции, в которых присутствует либо только x_i, либо только $\bar{x}_i$.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть сообщение доставлено в графе G за 4 шага, и есть такая вершина s_i, соответствующая переменной, что из неё доставляется сообщение в вершины-дизъюнкции, в которых хотя бы раз присутствуют и x_i, и $\bar{x}_i$. Рассмотрим конструкцию для этой переменной, где без ограничения общности первым шагом сообщение доставлено в вершину x_i, а третьим из $\bar{x}_i$ доставлено сообщение в левую вершину (если оно никуда не доставляется на третьем шаге, в вершину c_w, $w \in \{r, d\}$, где присутствует литерал $\bar{x}_i$, сообщение нельзя доставить на четвёртом шаге):

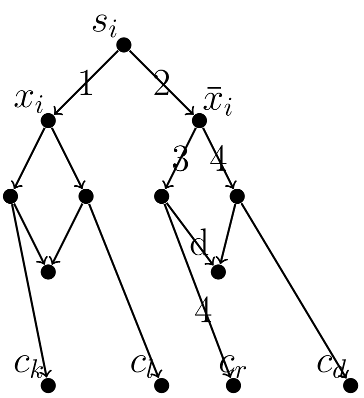

Рисунок 2.1.4.—Доставка сообщения

Заметим, что в вершину d сообщение доставится в этом случае не ранее, чем на пятом шаге, противоречие. □

Воспользуемся доказанным утверждением. Берём все вершины-литералы, в которые было доставлено сообщение на первом шаге, тогда выполняющим набором будет набор значений, где эти выбранные литералы равны единице. Доказанное утверждение гарантирует, что все переменные не могут принять одновременно 2 различных значения, а полученный набор будет выполняющим, т.к. сообщение доставлено во все вершины-дизъюнкции, что говорит о том, что есть хотя бы один её литерал, из которого было доставлено сообщение, а в него, исходя из доказательства утверждения 2.1, сообщение было доставлено на первом шаге, а это означает, что он принял значение 1. □

Сведение будет полиномиальным, т.к. его временная сложность ограничена полиномом от числа дизъюнкций и числа переменных, а число переменных, в свою очередь, ограничено полиномом от числа дизъюнкций, т.е. временная сложность сведения ограничена полиномом от числа дизъюнкций, следовательно, полиномом от длины кода примера задачи 3-Вып.

В итоге доказано, что распознавательная версия задачи Ориентированная Доставка Сообщения с n источниками является NP-полной, следовательно, и NP-трудной, а это, в свою очередь, позволяет говорить, что оптимизационная версия этой задачи является NP-трудной.

2.2 Случай ориентированного графа с одним источником

Рассмотрим ориентированный граф, построенный на рисунке 2.1.2. Достроим его до графа следующего вида: вводим новую вершину s, из которой проводим в вершину s_i цепь из дуг длиной $n + 1 - i$. В результате имеем следующий граф:

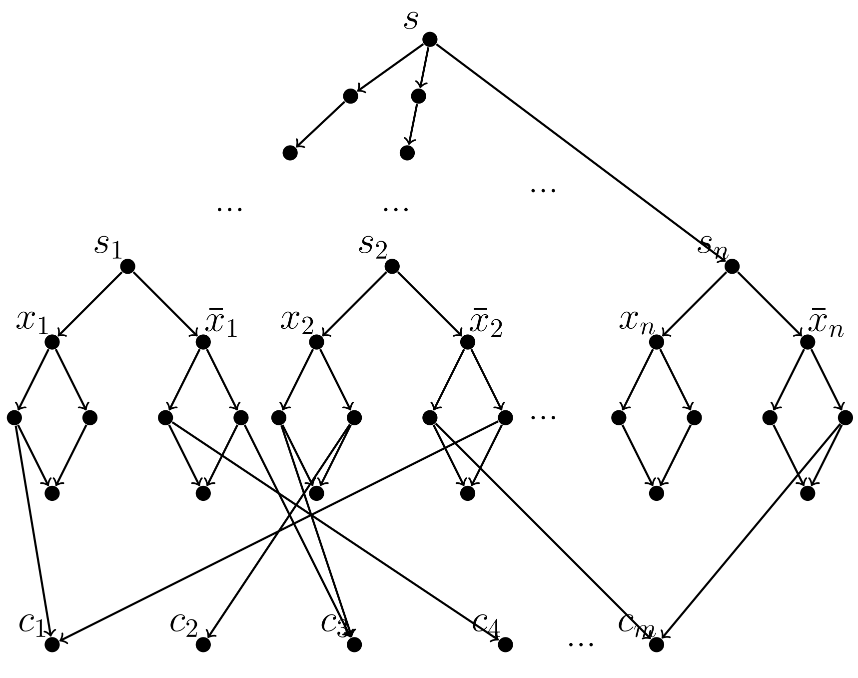

Рисунок 2.2.1.—Граф H

Полученный граф обозначим H, в нём первоначально информация находится в вершине s.

Теорема 2.2. $s(H) \leqslant n+4 \Leftrightarrow s(G) \leqslant 4$, *где G — граф задачи* Ориентированная Доставка Сообщения с n источниками.

Доказательство. $\Leftarrow$ Доставим за первые n шагов информацию из вершины s во все вершины s_i. Первым шагом отправим сообщение из s в первую вершину самой длинной цепи, вторым — в первую вершину самой длинной цепи из тех, что первая их вершина не получила сообщения, и так далее. Как только первая вершина цепи длины i получает сообщение, из неё в вершину s_i можно доставить сообщение за $i-1$ шаг независимо от того, куда вершина s будет после отправлять сообщение. После того, как мы доставили сообщение за n шагов в вершины s_i, мы можем за $\leqslant 4$ шага доставить сообщение в остальные вершины, и в результате нам понадобится $n+4$ шага.

$\Rightarrow$ Рассмотрим первые n шагов способа доставки сообщения в графе H. Если они такие же, какие описаны в доказательстве достаточности, то всё будет доказано. Предположим, что на каком-то шаге из вершины s доставляется сообщение в первую вершину не самой длинной цепи без сообщения, тогда по этой самой длинной цепи без сообщения цепи в вершину s_k, связанную этой самой цепью с s, сообщение попадёт не ранее, чем на $n+1$ шаге. Тогда либо в вершину x_i, либо в вершину $\bar{x}_i$ сообщение будет доставлено не ранее, чем на $n+3$ шаге, без ограничения общности, в вершину $\bar{x}_i$. Получим такую ситуацию.

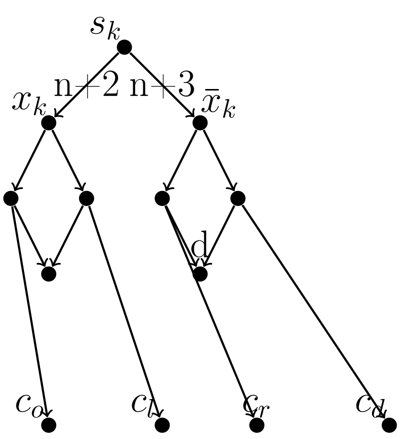

Рисунок 2.2.2.—Доставка сообщения

Получаем противоречие, т.к. в вершину d сообщение попадёт не ранее, чем на $n+5$ шаге. □

Используя транзитивность отношения эквивалентности, из теорем 2.1, 2.2 получим полиномиальное сведение задачи 3-Вып к задаче Ориентированная Доставка Сообщения, где построенным примером задачи Ориентированная Доставка Сообщения будет пример, построенный из примера задачи Ориентированная Доставка Сообщения с n источниками, который, в свою очередь, будет построен из примера 3-Вып.

Теорема 2.3. *Для КНФ F существует набор значений переменных, на котором значение F равно 1 $\Leftrightarrow s(H) \leqslant n + 4$.*

Сведение будет полиномиальным, т.к. число добавленных вершин и рёбер относительно сведения из предыдущего пункта полиномиально (квадратично) от числа булевых переменных.

В итоге доказано, что распознавательная версия задачи Ориентированная Доставка Сообщения — NP-полная, следовательно, NP-трудная, а это, в свою очередь, позволяет говорить, что оптимизационная версия этой задачи является NP-трудной.

2.3 Случай с доставкой в подмножество вершин

Покажем, что 3-Вып полиномиально сводится к этой задаче. Для этого построим граф по переменным, литералам и дизъюнкциям следующего вида:

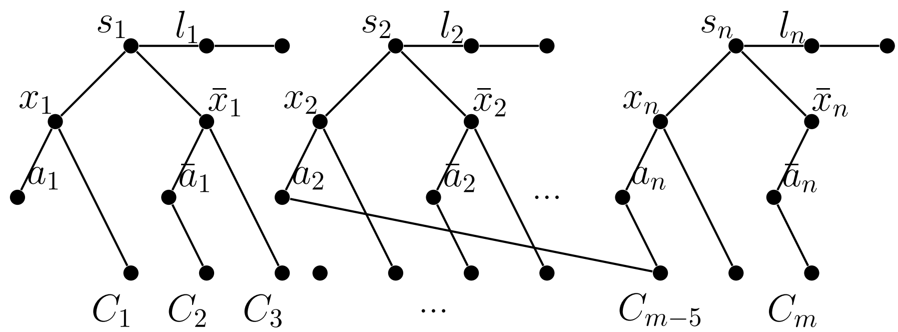

Рисунок 2.3.1.—Граф G

Как и ранее, вершины s_i сответствуют переменным, x_i и $\bar{x}_i$ соответствуют литералам, C_i — элементарным дизъюнкциям, а рёбра, идущие в элементарные дизъюнкции из вершин a_i, x_i означают, что литерал x_i состоит в этой дизъюнкции. Аналогично для рёбер из вершин $\bar{a}_i$ и $\bar{x}_i$. Также из каждой вершины-переменной выпускаем простую цепь длины 2 на двух дополнительных вершинах, своих для каждой вершины s_i. Обозначим построенный граф G. В нём информация находится в вершинах s_1, s_2, …, s_n. Множество вершин, в которые необязательно доставлять сообщение — вершины из множества $X = \{a_i\} \cup \{\bar{a}_i\}$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 2.4. *Для КНФ F существует набор значений переменных, на котором значение F равно* $1 \Leftrightarrow s(G) \leqslant 3$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Покажем схему доставки сообщения, для этого сделаем это для каждой конструкции, соответствующей некоторой переменной (рис. 2.3.2), вместе с рёбрами в вершины дизъюнкции, в которых присутствуют литералы, по которым построены вершины конструкции. Без ограничения общности в выполняющем наборе $x_i = 1$, в случае $x_i = 0$ действия аналогичны (схема доставки будет такая же, но в качестве вершины x_i будет вершина $\bar{x}_i$, и наоборот). На рёбрах будем обозначать номер шага, на котором по нему будет отправляться сообщение.

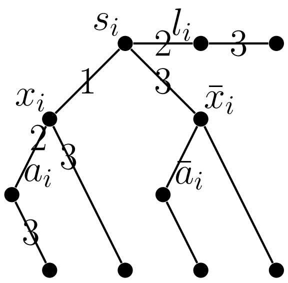

Рисунок 2.3.2.—Доставка сообщения

В результате во все вершины-дизъюнкции, в которых переменная принимает значение 1, мы доставили сообщение за 3 шага. Т.к. у нас все дизъюнкции имеют хотя бы одну переменную, равную единице, сообщение в каждую вершину-дизъюнкцию будет доставлено, а в остальные оно очевидно будет доставлено, исходя из построения доставки.

$\Leftarrow$ Для доказательства нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 2.2. *Для любого способа доставки сообщения в графе G во все вершины, за исключением множества вершин X, за 3 шага верно следующее: из любой вершины s_i сообщение доставлено в вершины-дизъюнкции, в которых присутствует либо только x_i, либо только $\bar{x}_i$.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть сообщение доставлено в графе G за 3 шага, и есть такая вершина s_i, соответствующая переменной, что из неё доставляется сообщение в вершины-дизъюнкции, в которых хотя бы раз присутствуют и x_i, и $\bar{x}_i$. Заметим, что в вершины x_i, $\bar{x}_i$ сообщение может попасть на втором или первом шаге лишь из вершины s_i (это верно, потому что другие вершины, из которых сообщение может попасть в x_i или $\bar{x}_i$, кроме s_i, находятся на расстоянии $\geqslant 2$ от любой вершины, где первоначально есть информация). Чтобы из этих вершин одновременно доставлялось сообщение, нужно, чтобы в них обеих оно попало на первом или втором шаге, что возможно лишь из вершины s_i но тогда в вершину l_i сообщение попадёт не ранее, чем на четвёртом шаге, что приводит к противоречию с тем, что это способ доставки сообщения за $\leqslant 3$ шага. □

Воспользуемся доказанным утверждением. Рассмотрим все пути, по которым в вершины, соответствующие элементарным дизъюнкциям, было доставлено сообщение. Т.к. длина этого пути $\leqslant 3$, в нём не может участвовать более, чем 4 вершины, среди которых, как минимум, сама вершина-дизъюнкция, вершина $\in \{s_i\}$ и вершина-литерал, соответствующий переменной. Из этого литерала можно отправить сообщение либо сразу в вершину-дизъюнкцию, откуда уже в другую вершину-дизъюнкцию мы ничего не сможем доставить (есть максимум один ход, а нужного ребра в графе нет), либо в вершину $\in X$, соответствующую этому литералу, откуда тоже можно отправить последним ходом сообщение в вершину-дизъюнкцию.

Из этих рассмотренных путей выделяем все вершины-литералы. Строим набор значений: всем выделенным литералам присваиваем значение 1, если остались непроинициализованные переменные, даём им произвольное значение. Доказанное утверждение гарантирует, что все переменные не могут принять одновременно 2 различных значения, а полученный набор будет выполняющим, т.к. сообщение доставлено во все вершины-дизъюнкции, что говорит о том, в каждой дизъюнкции присутствует литерал, которому мы присвоили значение 1. □

Сведение будет полиномиальным, т.к. его временная сложность ограничена полиномом от числа дизъюнкций и числа переменных, а число переменных, в свою очередь, ограничено полиномом от числа дизъюнкций, т.е. временная сложность сведения ограничена полиномом от числа дизъюнкций, следовательно, полиномом от длины кода примера задачи 3-Вып.

В итоге доказано, что распознавательная версия задачи Доставка Сообщения в Подмножество Вершин является NP-полной, следовательно, и NP-трудной, а это, в свою очередь, позволяет говорить, что оптимизационная версия этой задачи является NP-трудной.

2.4 Случай неориентированного графа с n источниками

Можно заметить, что в доказательстве необходимости теоремы 2.4 приводился способ доставки, который не доставлял сообщение в вершины множества X, но для любой пары вершин a_i, $\bar{a}_i$ есть хотя бы одна вершина из этой пары, в которую сообщение было доставлено. Зная это, немного преобразовав пример задачи Доставка Сообщения в Подмножество Вершин, построенный по примеру задачи 3-Вып, получим пример задачи Доставка Сообщения с n источниками и с аналогичными идеями доказательства построим полиномиальное сведение задачи 3-Вып к рассматриваемой задаче.

Преобразование состоит в том, чтобы ввести дополнительно n вершин с информацией и связать каждую из них с парой вершин a_i, $\bar{a}_i$ так, чтобы информацию можно было доставить лишь в одну из этих вершин и только на третьем шаге, чтобы наша добавка никак не затрагивала идеи доказательства эквивалентности примеров задач («да»-пример переводится в «да»-пример, «нет»-пример — в «нет»-пример). Добавим в граф G из предыдущего пункта n графов вида:

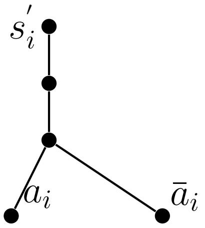

Рисунок 2.4.1.—Добавка к a_i, $\bar{a}_i$

В результате получаем следующий граф:

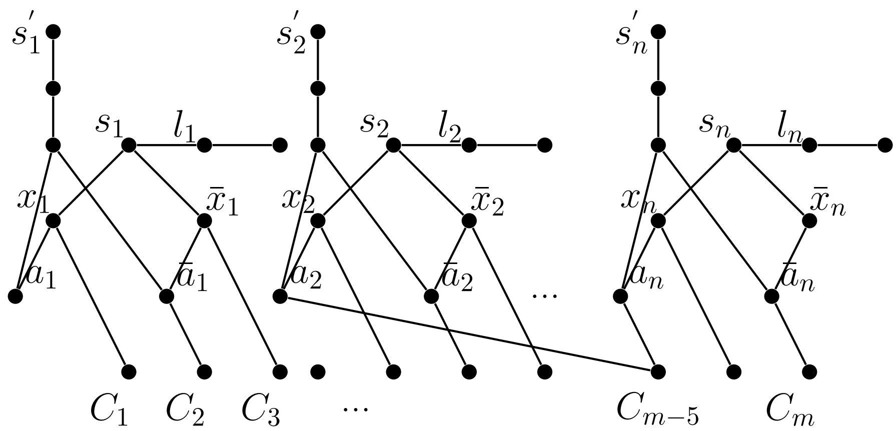

Рисунок 2.4.2.—Граф H

Соответствия параметров задачи 3-Вып и графовых объектов те же, что и в графе G из задачи Доставка Сообщения в Подмножество Вершин. Обозначим построенный граф — пример задачи Доставка Сообщения с n источниками — H. В нём информация находится в вершинах s_1, s_2, ..., s_n, а также в вершинах $s_1^{'}$, $s_2^{'}$, ..., $s_n^{'}$.

Теорема 2.5. *Для КНФ F существует набор значений переменных, на котором значение F равно $1 \Leftrightarrow s(H) \leqslant 3$.*

Это сведение такое же полиномиальное, как и сведение из пункта 2.3. В итоге доказано, что распознавательная версия задачи Доставка Сообщения с n источниками является NP-полной, следовательно, и NP-трудной, а это, в свою очередь, позволяет говорить, что оптимизационная версия этой задачи является NP-трудной.

2.5 Случай неориентированного графа с одним источником

К этой задаче сведём задачу Доставка Сообщения с n источниками. Рассмотрим пример этой задачи: дан граф G, выделены n вершин $s_1, s_2, \ldots s_n$, в которых есть сообщение, k — параметр количества шагов, за которые нам необходимо доставить сообщение.

По этому примеру построим пример задачи Доставка Сообщения с $n-1$ источниками следующим образом:

1. Добавим в граф $n-1$ вершину — вершины $s_1^{'}$, $s_2^{'}$, $s_{n-1}^{'}$.

2. Соединим пары вершин $\{s_i, s_i^{'}\}$, $i = \overline{1, n-2}$, простой цепью длины 2.

3. Вершину $s_{n-1}^{'}$ соединим рёбрами с вершинами s_{n-1}, s_n.

4. Добавим простую цепь длины k и соединим её вершиной s_n, т.е мы вывели из вершины s_n простую цепь длины $k+1$.

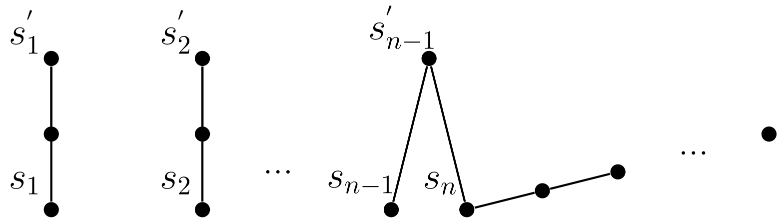

Рисунок 2.5.1.—Добавка к G

Обозначим полученный граф H. Такое построение графа H и множества вершин $S^{'} = \{s_i^{'}\}$, $i = \overline{1, n-1}$, по графу G и множеству вершин $S = \{s_i\}$, $i = \overline{1, n}$, обозначим $H, S^{'} = reduce(G, H)$. Вместе с множеством $\{s_i^{'}\}$, $i = \overline{1, n-1}$, вершин, в которых есть информация, и числом $Y = k+2$ получаем пример задачи Доставка Сообщения с $n-1$ источниками.

Лемма 2.1. $s(G) \leqslant k \Leftrightarrow s(H) \leqslant k+2$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Сделаем в графе H такие первые 2 шага сообщения: из вершин $s_i^{'}$, $i = \overline{1, n-2}$ доставим сообщения по цепи в вершины s_i, $i = \overline{1, n-2}$, а из вершины $s_{n-1}^{'}$ первым шагом доставим сообщение в s_n, вторым из вершины $s_{n-1}^{'}$ доставим сообщение в s_{n-1}, из s_n доставим сообщение в первую вершину прикреплённой цепи. В итоге сообщение есть во всех вершинах s_i, $i = \overline{1, n}$, и есть граф C_k в котором на конце есть сообщение. Применим способ доставки сообщения в G за $\leqslant k$ шагов, в цепи доставим сообщение за k шагов, очевидно, как. В итоге в H сообщение будет доставлено за $\leqslant k+2$ шага.

$\Leftarrow$ Если для вершин $s_i^{'}$, $i = \overline{1, n-2}$, первые 2 шага доставки сообщения в вершины графа не совпадают с шагами, описанными для этих вершин в доказательстве достаточности, что сделаем их такими, этим мы как минимум не замедлим доставку сообщения из $s_i^{'}$ в s_i, $i = \overline{1, n-2}$. Если первым шагом из вершины $s_{n-1}^{'}$ сообщение доставляется не в вершину s_n, получим противоречие, т.к. нам минимум $k+2$ шага требуется, чтобы доставить сообщение в конец прикреплённой к s_n цепи.

С учётом этого второй шаг доставки сообщения из вершины s_n однозначно определён: доставляется сообщение в первую вершину присоединённой цепи. Посмотрим, какой должен быть второй шаг доставки сообщения из вершины $s_{n-1}^{'}$. Если из $s_{n-1}^{'}$ не доставлено вторым шагом сообщение в вершину s_{n-1} сделаем это. В результате после второго шага доставки сообщения в графе H за $\leqslant k+2$ шага мы пришли к тому, что нам нужно доставить сообщение в графе G за $\leqslant k$ шагов. □

Теперь построим пример задачи Доставка Сообщения по примеру задачи Доставка Сообщения с n источниками следующим образом:

```
H = G, S' = S
for i in range(0, n-1):
    H, S' = reduce(H, S')
```

В результате множество $S^{'}$ будет одноэлементным. $Y = k + 2n - 2$ — число шагов, за которое необходимо доставить сообщение.

Теорема 2.6. $s(G) \leqslant k \Leftrightarrow s(H) \leqslant k + 2n - 2$.

Доказательство. На i-м шаге (шаги нумеруются с единицы) построения примера задачи Доставка Сообщения строится пример задачи Доставка Сообщения с $n-i$ источниками, где в качестве Y выступает $k+2i$. Пусть нулевой шаг построения примера строит пример задачи Доставка Сообщения с n источниками с графом G, множеством вершин S, в которых первоначально есть сообщение, и $Y = k$ — число шагов. Тогда последовательно применим лемму 2.1 для примеров, построенных на i-м и $(i+1)$-м шаге, $i = \overline{0, n-2}$. □

Сведение будет полиномиальным, т.к. его временная сложность ограничена полиномом от числа вершин в графе G (им ограничено n — мощность подмножества всех вершин, а также k — в силу налагаемых условий (достижимость всех вершин из S) для значений k, значительно больших числа вершин, ответ всегда «да»), а само число вершин ограничено полиномом от числа рёбер, т.к.

в графе нет изолированных вершин. Длина кода примера задачи Доставка Сообщения с n источниками в худшем случае является полиномом от числа рёбер.

В итоге доказано, что распознавательная версия задачи Доставка Сообщения является NP-полной, следовательно, и NP-трудной, а это, в свою очередь, позволяет говорить, что оптимизационная версия этой задачи является NP-трудной.

2.6 Случай с возможностью выбора источника

К этой задаче сведём задачу Доставка Сообщения. Рассмотрим пример данной задачи: дан граф G, выделена вершина s. Нужно определить, можно ли доставить сообщение во все вершины графа из стартовой за не более, чем k шагов. По этому графу построим граф H задачи Доставка Сообщения с Выбором Источника следующим образом: выведем дополнительно из вершины s простой путь длины $k+1$. Обозначим введённые вершины цепи через v_i, $i = \overline{1, k+1}$.

Рисунок 2.6.1.—Добавка к G

Теорема 2.7. *$s(G) \leqslant k \Leftrightarrow s(H) \leqslant k+1$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Возьмём в графе H в качестве стартовой вершины вершину s. Первым шагом доставим сообщение в вершину v_1, далее за оставшиеся k шагов доставим сообщение по цепи, а также в остальной части графа H тем способом, которым это можно сделать в графе G.

$\Leftarrow$ Нетрудно видеть, что если стартовать в графе H не из вершин $\{v_i | i = \overline{1, k+1}\} \cup \{s\}$, то доставить сообщение во все вершины графа H за не более, чем $k+1$ шагов, невозможно (минимум 2 шага, чтобы доставить сообщение в v_1, следовательно, минимум $k+2$ шага, чтобы доставить сообщение в v_{k+1}). Значит, через некоторое число $i \geqslant 1$ шагов в способе доставки сообщения в графе H за $\leqslant k+1$ шагов будет следующая ситуация: сообщение будет только в вершинах v_j, $j \geqslant 1$, и в вершине s (если s выбрана в качестве стартовой вершины, то, очевидно, $j = 1$). Тогда в качестве способа распространения сообщения по графу G можно взять тот способ, который распространяет сообщение в графе H по вершинам не из достроенной цепи. $\square$

В результате доказано, что распознавательная версия задачи Доставка Сообщения с Выбором Источника является NP-полной, следовательно, и NP-трудной, а это, в свою очередь, позволяет говорить, что оптимизационная версия этой задачи является NP-трудной.

Воспользуемся полученным результатом и покажем, что задача Доставка Сообщения является NP-трудной в классе графов, диаметр которых не превышает 2. Для этого к распознавательной версии задачи Доставка Сообщения с Выбором Источника в этом же классе графов сведём задачу Доставка Сообщения с Выбором Источника. Из этого, в свою очередь, будет следовать, что задача Доставка Сообщения является NP-трудной в классе графов, диаметр которых не превышает 2, т.к. к этой задаче сводится задача Доставка Сообщения с Выбором Источника в классе графов, диаметр которых не превышает 2, по Тьюрингу.

Рассмотрим пример распознавательной версии данной задачи: дан граф G, нужно определить, можно ли доставить сообщение во все вершины графа из некоторой, выбранной в качестве стартовой, за не более, чем k шагов. По этому графу построим граф H задачи Доставка Сообщения с Выбором Источника следующим образом: введём дополнительно вершину v, которую соединим со всеми вершинами графа G, а также соединим её с v_i, $i = \overline{1,k}$ — k новых вершин.

Теорема 2.8. $s(G) \leqslant k \Leftrightarrow s(H) \leqslant k+1$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Первым шагом в графе H из вершины v, которую выбираем в качестве стартовой, доставляем сообщение в ту вершину, которая в качестве стартовой даёт в графе G доставку сообщения за $\leqslant k$ шагов. Далее из той вершины за оставшиеся k шагов доставим сообщение по вершинам, которые есть одновременно в обоих графах, а из вершины v доставим сообщение в вершины v_i, $i = \overline{1,k}$.

$\Leftarrow$ Рассмотрим способ, который доставляет сообщение во все вершины графа H за $\leqslant k+1$ шагов. Учитывая, что при удалении вершины v из графа H получаем $k+1$ компоненту связности, сообщение в вершину v должно быть доставлено не позже, чем после первого шага (минимум k шагов на то, чтообы доставить сообщение во все компоненты, кроме той, откуда пришло сообщение в вершину v). Очевидно, что если сообщение попало впервые в вершину, которая есть и в графе G, то оно либо было доставлено из вершины v, либо эта вершина является стартовой. В первом случае, с учётом того, что при удалении вершины v из графа H получаем $k+1$ компоненту связности, в вершины графа G из вершины v можно доставить сообщение лишь раз, а во втором случае из вершины v сообщение будет доставляться только в вершины v_i.

Отсюда получаем, что на некотором шаге j, $j \geqslant 1$, мы будем иметь сообщение в одной из вершин w подграфа H, являющегося графом G, а также сообщение в вершине v и $j-1$ вершине среди множества $\{v_i\}$. Берём в графе G вершину w в качестве стартовой и для доставки в нём сообщения смотрим, как оно было доставлено из этой вершины в подграфе графа H, который G, за $\leqslant k+1-j \leqslant k$ шагов. $\square$

Следствие 2.8.1. *Задача* Доставка Сообщения *в классе графов, диаметр которых не превышает 2, является NP-трудной.*

В результате доказано, что распознавательные версии задач Доставка Сообщения с Выбором Источника и Доставка Сообщения в классе графов, диаметр которых не превышает 2, являются NP-полными, следовательно, и NP-трудными, а это, в свою очередь, позволяет говорить, что оптимизационные версии Доставка Сообщения с Выбором Источника и Доставка Сообщения в этом же класе графов является NP-трудными.

В итоге показана NP-трудность всех постановок задач, а также NP-полнота распознавательных версий задач. В том числе показана NP-трудность для всех рассмотренных специальных случаев задач. В силу выбранных эталонных задач для рассмотренных задач обоснована NP-трудность в сильном смысле, из чего следует отсутствие псевдополиномиального алгоритма решения, если $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$.

ГЛАВА 3
ЗАДАЧА ПОИСКА ПОЛНОГО K-АРНОГО ДЕРЕВА ВЫСОТЫ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА ВЕРШИНЫ

Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета
УСЛОВИЕ. Дан граф $G = (V, E)$, в котором выделена некоторая вершина v.
ВОПРОС. Существует ли в этом графе дерево, являющееся полным k-арным деревом высоты с корнем в вершине v, имеющее высоту, равную эксцентриситету вершины v?

3.1 Случай 3-арного дерева

Покажем, что для $k = 3$ эта задача является NP-трудной. В качестве эталонной задачи возьмём задачу 3-Разбиение, где мощность множества A из постановки задачи является степенью тройки.

3-Разбиение [2]
УСЛОВИЕ. Дано конечное множество A, содержащее $3m$ элементов, число $B \in \mathbb{Z}_+$, и «размер» $s(a) \in \mathbb{Z}_+$ для всех $a \in A$, такой, что $\frac{B}{4} < s(a) < \frac{B}{2}$ и $\sum\limits_{a \in A} s(a) = mB$.
ВОПРОС. Можно ли множество A разбить на m непересекающихся подмножеств S_1, S_2, $\ldots$, S_m, что для $i = \overline{1, m}$ $\sum\limits_{a \in S_i} s(a) = B$?

Покажем, что задача 3-Разбиение в случае $m = 3^l$ также является NP-полной. Сведём к этой задаче задачу 3-Разбиение с произвольным m. Построим пример задачи 3-Разбиение в случае $m = 3^l$ из примера задачи 3-Разбиение с произвольным m следующим образом: возьмём достаточно большое число X и умножим его на все $s(a)$, чтобы диапазон значений $Xs(a)$ был достаточно широким, и в нём можно было найти достаточно много чисел, отличных от $Xs(a)$, где $a \in A$.

Рассмотрим все пары элементов из множества A, для них посчитаем сумму размеров в паре. После подсчёта всех этих чисел каждое из них вычтем из XB, получим некоторое множество значений, обозначим его Q. Построим $3^{l-1} - m$ одинаковых троек чисел, сумма в которых равна XB, но при этом ни одно из этих чисел не содержится в множестве Q, а также любая их попарная сумма не равна $XB - s(a)$, где $a \in A$. Так как число различных значений в множестве V и в множестве попарных сумм ограничено полиномом от m, а X взято достатночно большим, такую тройку можно найти. В результате исходное множество A с множеством построенных троек и даст пример задачи 3-Разбиение в случае $m = 3^l$.

Тогда нетрудно видеть, что оба примера эквивалентны в смысле их принадлежности их к «да»(«нет»)-примеру, т.к. по построению любая тройка элементов, где одновременно находятся элементы из множества A и элементы введённых троек, не даст сумму размеров, равную XB.

Рассмотрим пример задачи 3-Разбиение в случае $m = 3^l$. По нему построим граф следующего вида: введём $3m$ вершин, соответствующим элементам множества A (вершины-элементы), также введём вершины, соответствующие всем тройкам чисел из множества A, что их сумма размеров равна B (вершины-тройки). Далее возьмём полное 3-арное дерево H высоты $l - 1$ (3^{l-1} вершин на расстоянии $l - 1$ от корня дерева) и все вершины на высоте $l - 1$ попарно соединим со всеми вершинами-тройками. Полученный граф обозначим G, в качестве вершины v возьмём корень дерева.

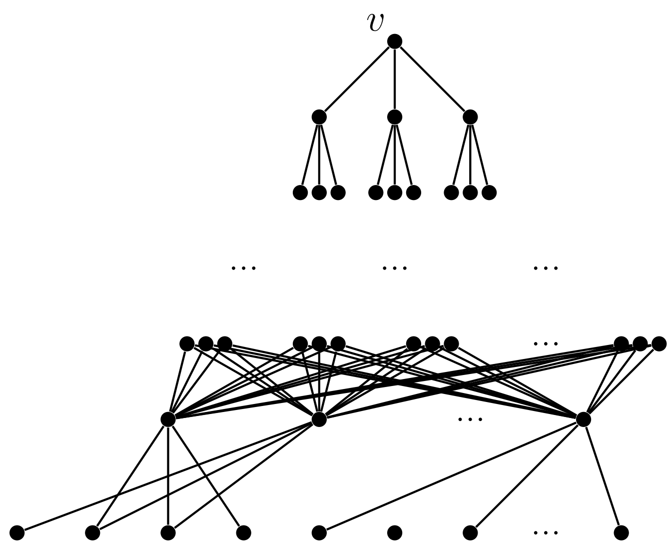

Рисунок 3.1.1.—Граф G

Нетрудно видеть, что граф из примера задачи 3-Разбиение в случае $m = 3^l$ строится за полиномиальное ($\mathcal{O}(m^4)$) время. Также очевидно, что задача Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета $\in$ NP, т.к. с помощью поиска в ширину можно за линейное от числа вершин проверить сертификат.

Теорема 3.1. *Множество A можно разбить на m непересекающихся подмножеств $S_1, S_2, \ldots, S_m$, что для $i = \overline{1, m}$ $\sum\limits_{a \in S_i} s(a) = B \Leftrightarrow$ в графе G существует полное 3-арное остовное дерево с корнем в вершине v, имеющее высоту, равную $ecc(v)$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ При наличии разбиения в графе G есть способ из m

вершин провести $3m$ рёбер во все вершины-элементы. Возьмём эти вершины-тройки, сгруппируем произвольным образом по тройкам и каждую тройку поставим в соответствие вершине из графа G, которая находится на высоте $l-1$. Все вершины-тройки связаны со всеми вершинами высоты $l-1$, поэтому в искомое 3-арное дерево пойдут три ребра между тройкой и вершиной на высоте $l-1$. Вместе с деревом H и рёбрами во все вершины-элементы получим полное 3-арное дерево высоты $ecc(s)$.

$\Leftarrow$ Если в графе G есть полное 3-арное дерево высоты $ecc(s)$, то в силу того, что на высоте $l+1$ находится $3m$ вершин, на высоте l у этого дерева m вершин. Тогда тройки, соответствующие этим вершинам высоты l, и будут давать искомое разбиение. □

Следствие 3.1.1. *Задача* Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета *для $k = 3$ является NP-трудной в классе двудольных графов.*

Доказательство. Следует из того, что при сведении задачи 3-Разбиение был построен двудольный граф. □

Замечание 3.1. С учётом того, что задача 3-Разбиение является NP-полной в сильном смысле, задача Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета для $k = 3$ является NP-полной в сильном смысле и в случае $P \neq NP$ не имеет псевдополиномиального алгоритма решения.

Замечание 3.2. Если рассматривать построенное сведение как сведение к задаче, где заданы веса, равные у всех рёбер, и необходимо найти минимальное по весу дерево, то можно показать NP-трудность задачи, где ищется минимальное по весу специальное дерево (3-арное, полное, с высотой, равной эксцентриситету заданного корня) в призвольном взвешенном графе.

3.2 Случай с произвольным корнем

Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета с Произвольным Корнем
УСЛОВИЕ. Дан граф $G = (V, E)$.
ВОПРОС. Существует ли в этом графе дерево, являющееся полным k-арным деревом высоты с корнем в некоторой вершине v, имеющее высоту, равную эксцентриситету этой вершины?

Покажем, что эта задача для $k = 3$ является NP-полной, а, следовательно, и NP-трудной. Для этого построим полиномиальное сведение задачи 3-Разбиение к задаче Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета с Произвольным Корнем. Рассмотрим пример задачи 3-Разбиение в случае $m = 3^l$. По нему построим граф следующего вида: введём $3m$ вершин, соответствующим элементам множества A (вершины-элементы), также введём вершины, соответствующие всем тройкам чисел из множества A, что их сумма размеров равна B (вершины-тройки). Далее возьмём полное 3-арное дерево H высоты $l-1$ (3^{l-1} вершин на расстоянии $l-1$ от корня дерева) и все вершины на высоте $l-1$ попарно соединим со всеми вершинами-тройками.

Обозначим этот подграф графа G через T. Введём вершину v и соединим её с уже имеюимся графом, а также возьмём 2 полных 3-арных дерева высоты $l+1$ (обозначим $T_{3,l+1}$) и соединим их корни с вершиной v. Полученный граф обозначим G, в качестве вершины v возьмём корень дерева.

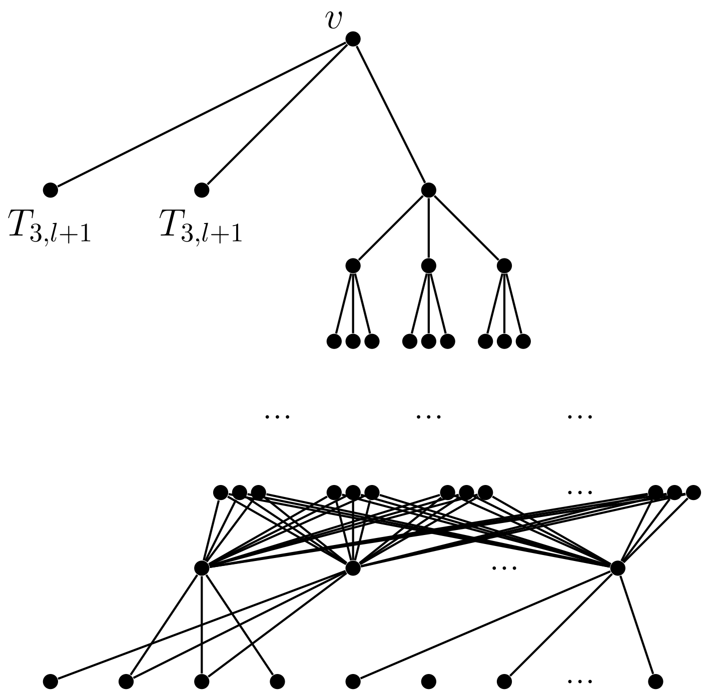

Рисунок 3.2.1.—Граф G

Нетрудно видеть, что граф из примера задачи 3-Разбиение в случае $m = 3^l$ строится за полиномиальное ($\mathcal{O}(m^4)$) время (аналогично рисунку 3.1.1). Также очевидно, что задача Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета с Произвольным Корнем $\in$ NP, т.к. с помощью поиска в ширину можно за линейное от числа вершин время проверить сертификат.

Теорема 3.2. *Множество A можно разбить на m непересекающихся подмножеств $S_1, S_2, \ldots, S_m$, что для $i = \overline{1,m}$ $\sum\limits_{a \in S_i} s(a) = B \Leftrightarrow$ в графе G существует полное 3-арное остовное дерево с корнем в некоторой вершине s, имеющее высоту, равную $ecc(s)$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ При наличии разбиения в графе T есть способ из m вершин провести $3m$ рёбер во все вершины-элементы. Возьмём эти вершины-тройки, сгруппируем произвольным образом по тройкам и каждую тройку поставим в соответствие вершине из графа G, которая находится на высоте $l-1$. Все вершины-тройки связаны со всеми вершинами высоты $l-1$, поэтому в искомое 3-арное дерево пойдут три ребра между тройкой и вершиной на высоте $l-1$. Вместе с деревом H и рёбрами во все вершины-элементы получим полное 3-арное дерево высоты $l+1$. Тогда получаем, что вершину v можно взять в качестве искомой вершины s, т.к. её эксцентриситет равен $l+2$, а она является корнем дерева, у которого 3 вершины дерева на высоте 1 являются корнями $T_{3,l+1}$, то есть получаем $T_{3,l+2}$.

$\Leftarrow$ Покажем, что в качестве вершины s может быть лишь вершина v. Во-первым. заметим, что если эта вершина содержится в некотором $T_{3,ecc(s)}$, то вершина v в нём либо корень, либо лист, т.к. её степень равна трём, а для того, чтобы вершина в этом дереве была на высоте $\in \overline{1, ecc(s)-1}$, её степень должна быть как минимум равна 4. Будем рассуждать от противного.

Пусть s — произвольная вершина из одного из двух подграфов $T_{3,l+1}$. Нетрудно видеть, что её эксцентриситет $\geqslant l+3$. Значит, в это дереве должно быть $\geqslant \frac{3^{l+4}-1}{2}$ вершин, но т.к. v может быть в этом дереве только листом, данное дерево в качестве вершин может иметь лишь вершины подграфа $T_{3,l+1}$ и вершину v, а их всего $\frac{3^{l+2}-1}{2}+1$. Противоречие.

Пусть s — произвольная вершина подграфа T. Нетрудно видеть, что её эксцентриситет также $\geqslant l+3$. С учётом того, какую структуру имеет граф G (он двудольный), заметим следующее: в любом корневом дереве-подграфе графа G вершины, имеющие одинаковую чётность расстояния до корня, имеют также одну чётность расстояния до любой вершины графа G. Из этого следует, что в $T_{3,ecc(s)}$ все вершины, находящиеся на высоте одной чётности, имеют ту же чётность расстояния до вершины v.

Учитывая, что v может быть в этом дереве только листом, получаем, что данное дерево в качестве вершин может иметь лишь вершины подграфа T и вершину v. Значит, мы можем посчитать и оценить сверху, сколько вершин максимально может быть на высотах той чётности, которую будут иметь в этом дереве вершины, имеющие ту же чётность расстояния до v, что и вершины подграфа T, находящиеся на расстоянии $l+2$ от v. Их число равно:

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant l+1, i\equiv l+1 (mod\ 2)}^{l+1} 3^i \leqslant \frac{3^{l+2}-1}{8} < 3^{l+2}.$$

Из этого следует, что высота $T_{3,ecc(s)}$ не может превышать $l+2$, иначе вершин на «уровни» некоторой чётности не хватит. Противоречие.

Теперь мы знаем, что вершина s — вершина v. Значит в подграфе есть полное 3-арное дерево высоты $l+1$ (обозначим Tr) с корнем в вершине, связанной в v ребром, то в силу того, что у Tr на высоте $l+1$ находится $3m$ вершин, на высоте l у этого дерева m вершин. Тогда тройки, соответствующие этим вершинам высоты l, и будут давать искомое разбиение. □

Следствие 3.2.1. *Задача* Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета с Произвольным Корнем *для $k = 3$ является NP-трудной в классе двудольных графов.*

Доказательство. Следует из того, что при сведении задачи 3-Разбиение был построен двудольный граф. □

Замечание 3.3. С учётом того, что что задача 3-Разбиение является NP-полной в сильном смысле, задача Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета с Произвольным Корнем для $k = 3$ является NP-полной в сильном смысле и в случае $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ не имеет псевдополиномиального алгоритма решения.

Замечание 3.4. Если рассматривать построенное сведение как сведение к задаче, где заданы веса, равные у всех рёбер, и необходимо найти минимальное по весу дерево, то можно показать NP-трудность задачи, где ищется минимальное по весу специальное дерево (3-арное, полное, с высотой, равной эксцентриситету некоторого корня) в призвольном взвешенном графе.

3.3 Случай произвольной арности дерева

Покажем, что задача Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета является NP-трудной для любого $k \geqslant 3$. Для этого воспользуемся тем фактом, что эта задача для $k = 3$ является NP-трудной, и построим сведение задачи Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета к задаче Полное $(k+1)$-арное Дерево Высоты Эксцентриситета для произвольного $k \geqslant 3$.

Пусть G — граф задачи Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета. Построим по нему граф H задачи Полное $(k+1)$-арное Дерево Высоты Эксцентриситета следующим образом: возьмём $T_{k+1,ecc(v)-1}$ (полное $(k+1)$-арное дерево высоты $ecc(v) - 1$) и соединим его корень ребром с вершиной v. Также для каждой остальной вершины графа G введём по одному дереву $T_{k+1,ecc(v)-2}$ и соединим его корень ребром с соответствующей этому дереву вершиной графа G. Также необходимо соединить вершину v со всеми листьями деревьев, соответствующих вершинам из $V \setminus \{v\}$, чтобы $ecc(v)$ не изменился. Нетрудно видеть, что сведение является полиномиальным, т.к. суммарное число дополнительных вершин и рёбер порядка $\mathcal{O}(|V|^2)$.

Теорема 3.3. *В графе G существует полное k-арное остовное дерево с корнем в вершине v, имеющее высоту, равную $ecc(v)$ $\Leftrightarrow$ в графе H существует полное $(k+1)$-арное остовное дерево с корнем в вершине v, имеющее высоту, равную $ecc(v)$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Искомое дерево для графа H получается из нужного дерева для графа G путём добавления к каждой вершине v_{cur} тех деревьев, которые были введены, обрезанных до нужной высоты (до $ecc(v)-1-h(v_{cur})$, где $h(v_{cur})$ — высота текущей вершины в искомом дереве $T_{k,ecc(v)}$ для графа G). В результате каждая нелистовая вершина будет иметь по $(k+1)$ дочерних вершин, а высота дерева останется равной $ecc(v)$.

$\Leftarrow$ Получим дерево для графа G путём удаления «лишнего» из имеющегося дерева для графа H. Для каждой нелистовой вершины удалим по одному дочернему поддереву, делаем это следующим образом: если есть поддерево, корня которого нет в графе G, то его удаляем, если того поддерева нет, удаляем любое. После удаления все дочерние поддеревья будут иметь корень $\in V$. Заметим, что вершины степени 2 не могут быть нелистовыми в этом дереве, поэтому для вершины v дочерними для этого дерева $T_{k+1,ecc(v)}$ могут быть только вершины графа G и корень добавленного $T_{k+1,ecc(v)-1}$. Поэтому после всех удалений получим k-арное полное дерево высоты $ecc(v)$, в котором присутствуют лишь вершины графа G. □

Замечание 3.5. С учётом того, что задача Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета при $k=3$ является NP-полной в сильном смысле, задача Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета для $k \geqslant 4$ является NP-полной в сильном смысле и в случае $P \neq NP$ не имеет псевдополиномиального алгоритма решения.

Замечание 3.6. Если рассматривать построенное сведение как сведение к задаче, где заданы веса, равные у всех рёбер, и необходимо найти минимальное по весу дерево, то можно показать NP-трудность задачи, где ищется минимальное по весу специальное дерево (k-арное, полное, с высотой, равной эксцентриситету заданного корня) в призвольном взвешенном графе.

3.4 Случай произвольной арности дерева с произвольным корнем

Используя результат из пункта 3.3, покажем, что задача Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета с Произвольным Корнем является NP-трудной для любого $k \geqslant 3$. Для этого построим сведение задачи Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета к ней.

Пусть G — граф задачи Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета, v — вершина, которая должна быть корнем искомого дерева. Построим по нему граф H задачи Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета с Произвольным Корнем следующим образом: пусть $h = \lceil \log_k |V| \rceil$. Заведём дополнительно вершину s, к которой присоединим $k-1$ дерево $T_{k,h}$, а также одно дерево $T_{k,h-ecc(v)}$. Далее к этому дереву $T_{k,h-ecc(v)}$ присоединим, заменив некоторую листовую вершину на v, граф G, а для остальные листья заменим на $T_{k,ecc(v)}$.

Полученное сведение будет полиномиальным, т.к. у нас достроен полином от $|V|$ (следует из неравенств: $k \leqslant n$, $\frac{k^{h+1}-1}{k-1} < k^{h+1} \leqslant k^2 k^{h-1} \leqslant n^2 n = n^3$), деревьев, число вершин и рёбер которых тоже является полиномом от числа вершин графа G.

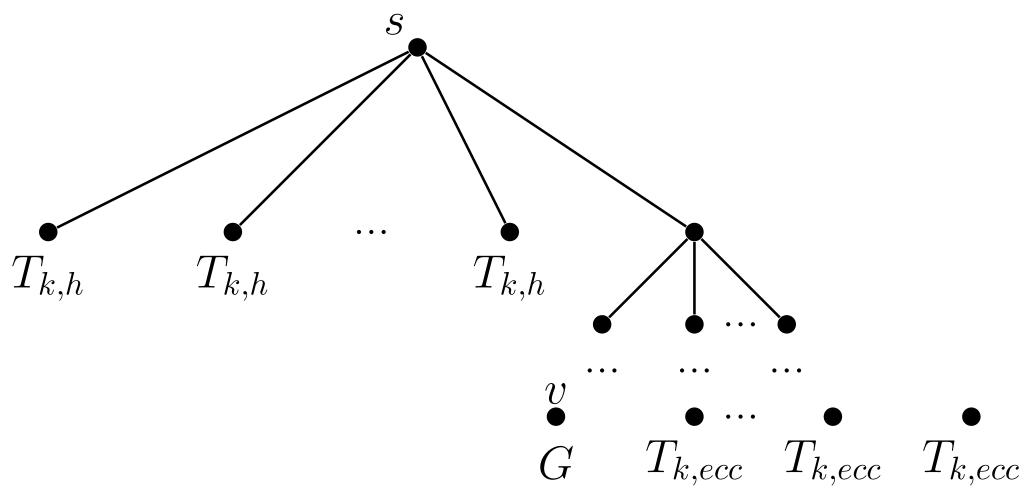

Рисунок 3.4.1.—Граф H

Теорема 3.4. *В графе G существует полное k-арное остовное дерево с корнем в вершине v, имеющее высоту, равную $ecc(v)$ $\Leftrightarrow$ в графе H существует полное k-арное остовное дерево с корнем в некоторой вершине w, имеющее высоту, равную $ecc(w)$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Нетрудно видеть, что вершина s графа H будет той, для которой найдётся искомое дерево, которое получится, если взять объединение дерева для G из вершины v с тем подграфом, который был достроен при построении сведения.

$\Leftarrow$ Заметим, что в силу того, что $deg(s) = k < k + 1$, вершина s либо корень, либо лист, либо её нет в том дереве, которое удовлетворяет условию для некоторой вершины w, отсюда следует, что если w не совпадает с s, то в этом дереве не может быть больше, чем на единицу, вершин, чем в некоторой компоненте связности, которая получится после удаления s и в которой содержится вершина w. Посчитаем, сколько вершин содержится в каждой такой компоненте. Если эта компонента не содержит в себе G в качестве подграфа, то таких компонент $k-1$ и те являются $T_{k,h}$, следовательно, число вершин в этой компоненте равно $\frac{k^{h+1}-1}{k-1} < k^{h+1}$. Если эта компонента содержит в себе G в качестве подграфа, что в ней ровно $\frac{k^{h-ecc(v)}-1}{k-1} + |V| + (k^{h-ecc(v)} - -1)(\frac{k^{ecc(v)+1}-1}{k-1}) =$

$$= \frac{|V|(k-1) + k^{h-ecc(v)} - 1 + k^{h+1} + 1 - k^{ecc(v)+1} - k^{h-ecc(v)}}{k-1} =$$

$$= \frac{|V|(k-1) + k^{h+1} - k^{ecc(v)+1}}{k-1} = [|V| \leqslant k^h] \leqslant \frac{2k^{h+1}}{k-1} < k^{h+1}.$$

Учитывая, что $ecc(w) \geqslant h+2 \ \forall w \in V(H) \setminus \{s\}$, получаем, что ни одна вершина, кроме вершины s, не может быть вершиной, для которой существует полное k-арное остовное дерево с высотой, равной её эксцентриситету, т.к. вершин, котрые могут войти в это дерево, недостаточно.

А из того, что для вершины s существует полное k-арное остовное дерево с высотой, равной её эксцентриситету, очевидно следует существование в графе G k-арного остовного дерева с корнем в вершине v и высотой, равной $ecc_G(v)$. Это дерево можно получить, удалив из дерева для графа H все вершины, которых нет в графе G. □

Замечание 3.7. С учётом того, что задача Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета при $k \geqslant 3$ является NP-полной в сильном смысле, задача Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета с Произвольным Корнем для $k \geqslant 3$ является NP-полной в сильном смысле и в случае P $\neq$ NP не имеет псевдополиномиального алгоритма решения.

Замечание 3.8. Если рассматривать построенное сведение как сведение к задаче, где заданы веса, равные у всех рёбер, и необходимо найти минимальное по весу дерево, то можно показать NP-трудность задачи, где ищется минимальное по весу специальное дерево (k-арное, полное, с высотой, равной эксцентриситету некоторого корня) в призвольном взвешенном графе.

3.5 Случай предела значения эксцентриситета корня

Полное k-арное Дерево Высоты Предела Эксцентриситета
УСЛОВИЕ. Дан граф $G = (V, E)$.
ВОПРОС. Существует ли в этом графе дерево, являющееся полным k-арным деревом высоты с корнем в выделенной вершине v, имеющее высоту, равную эксцентриситету этой вершины, а эксцентриситет, в свою очередь, равен $\lfloor log_k|V| \rfloor$?

Полное k-арное Дерево Высоты Предела Эксцентриситета с Произвольным Корнем
УСЛОВИЕ. Дан граф $G = (V, E)$.
ВОПРОС. Существует ли в этом графе дерево, являющееся полным k-арным деревом высоты с корнем в некоторой вершине v, имеющее высоту, равную эксцентриситету этой вершины, а эксцентриситет, в свою очередь, равен $\lfloor log_k|V|\rfloor$?

Покажем, что задача Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета полиномиально сводится к обеим задачам. Пусть G — граф задачи Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета, построим по нему граф $H = (VH, EH)$ следующим образом: построим граф, аналогичный графу, построенному при сведении Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета к Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета с Произвольным Корнем (пункт 3.2) с тем лишь отличием, что h будет удовлетворять тому, что $\log_k VH - \log_k(VH - V) \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — число, достаточно близкое к нулю.

Будем брать минимальное h, для которого неравенство выполняется. Выполнение этого неравенства гарантирует, что $ecc(s) = \lfloor log_k|VH|\rfloor$. Преобразовав неравенство $\log_k VH - \log_k(VH - V) \leqslant \varepsilon$, можно получить условие, накладываемое на $|VH|$, при выполнении которого выполнится само неравенство. А именно: $|VH| \geqslant \frac{|V|k^\varepsilon}{k^\varepsilon - 1}$. Число $\frac{k^\varepsilon}{k^\varepsilon-1}$ можно считать константой, поэтому сведение будет полиномиальным (это ограничивает разницу между количеством добавленных вершин по сравнению с графом G между искомым h и $h - 1$).

Теорема 3.5. *В графе G существует полное k-арное остовное дерево с корнем в вершине v, имеющее высоту, равную $ecc(v)$ $\Leftrightarrow$ в графе H существует полное k-арное остовное дерево с корнем в вершине s, имеющее высоту, равную $ecc(s) = h + 1$.*

Теорема 3.6. *В графе G существует полное k-арное остовное дерево с корнем в вершине v, имеющее высоту, равную $ecc(v)$ $\Leftrightarrow$ в графе H существует полное k-арное остовное дерево с корнем в некоторой вершине w, имеющее высоту, равную $ecc(w)$.*

Замечание 3.9. С учётом того, что задача Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета при $k \geqslant 3$ является NP-полной в сильном смысле, задачи Полное k-арное Дерево Высоты Предела Эксцентриситета с Произвольным Корнем и Полное k-арное Дерево Высоты Предела Эксцентриситета для $k \geqslant 3$ являются NP-полными в сильном смысле и в случае P $\neq$ NP не имеют псевдополиномиального алгоритма решения.

Замечание 3.10. Если рассматривать построенное сведение как сведение к задаче, где заданы веса, равные у всех рёбер, и необходимо найти минимальное по весу дерево, то можно показать NP-трудность задачи, где ищется минимальное по весу специальное дерево (k-арное, полное, с высотой, равной эксцентриситету вершины, равному $\lfloor log_k|V|\rfloor$) в призвольном взвешенном графе.

В итоге показана NP-полнота всех распознавательных версий рассмотренных задач, что, в свою очередь, показывает NP-трудность рассмотренных задач. В том числе показана NP-трудность для всех рассмотренных специальных случаев задач. В силу выбранных эталонных задач для рассмотренных задач обоснована NP-трудность в сильном смысле, из чего следует отсутствие псевдополиномиального алгоритма решения, если P $\neq$ NP.

ГЛАВА 4
ДРУГИЕ ЗАДАЧИ ПОИСКА СПЕЦИАЛЬНЫХ ДЕРЕВЬЕВ В ГРАФЕ

В этой главе будут рассмотрены другие, помимо рассмотреных выше, задачи поиска специальных деревьев в графе.

4.1 Поиск остова ограниченного диаметра

Точное Покрытие 3-Множествами [2]
УСЛОВИЕ. Дано множество X, $|X| = 3q$ (т.е. мощность множества X кратна трём), и множество C трёхэлементных подмножеств множества X, $|C| = m$.
ВОПРОС. Существует ли подмножество $C^{'} \subseteq C$ такое, что каждый элемент множества X встречается ровно раз в $C^{'}$?

Используя полиномиальное сведение, которое было построено в статье [3], можно показать, что задача Остов Ограниченного Диаметра в случае, если $4 \leqslant D \leqslant n-2$ и стоимости всех рёбер не равны, является NP-полной для k-регулярных графов, $k \geqslant 4$. Возьмём пример задачи Точное Покрытие 3-Множествами и построим граф, как из статьи [3], но выведем цепь длины $D-4$, а не $D-2$. Обозначим этот граф G.

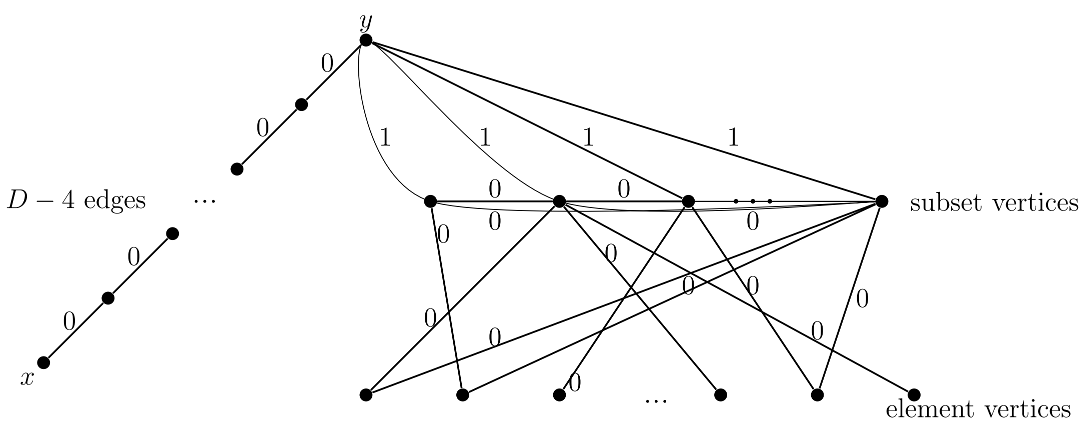

Рисунок 4.1.1.—Граф G

Теперь по графу G построим граф H, который будет $(m+3)$-регулярным. Заметим, что степени вершин-подмножеств уже имеют такую степень. Для каждой вершины v графа G из множества $V \setminus C$, где C — множество вершин-подмножеств, введём дополнительно по $m+3-deg(v)$ вершин и свяжем их ребром с v стоимости $q+1$. Далее берём все новые вершины, их множество обозначим A, их будет $N = 2+1+(D-4)(m+1)+3q(m+3)-3m$ и строим на них $(m+2)$-регулярный граф, стоимости рёбер которого равны $(N+1)(q+1)$.

Этот граф существует в силу того, что для нечётного m N чётно, а для чётного числа вершин в полном графе хроматический индекс равен $|V|-1$. А если N нечётно, то $m+2$ чётно, и $(m+2)$-регулярный граф можно получить из $\frac{m+2}{2}$ Гамильтоновых циклов, на которые факторизуется полный граф на нечётном числе вершин. Нетрудно видеть, что $\forall D, q$ $N \geqslant m+3$, а это позволяет говорить о том, что новых вершин достаточно, чтобы на них построить $(m+2)$-регулярный граф.

Теорема 4.1. *Существует $C' \subseteq C$ такое, что каждый элемент множества X встречается ровно раз в C' $\Leftrightarrow$ в графе H существует остовное дерево T диаметр которого не превышает D, а его стоимость $\leqslant q + N(q+1)$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Построим дерево в графе H нужного диаметра и стоимости. Возьмём вершины, соответствующие C', все рёбра из них в вершины-элементы, в вершину y и в вершины $C \setminus C'$, а также цепь из y длины $D-4$ с рёбрами нулевой стоимости. Получили остовное дерево, диаметр которого $\leqslant D-2$, а суммарная стоимость которого равна q. Теперь возьмём и добавим в дерево N рёбер стоимости $q+1$ из вершин графа G в вершины множества A, получим остовное дерево для графа H, суммарная стоимость которого равна $q+N(q+1)$, а диаметр его не превышает D.

$\Leftarrow$ Учитывая, что каждая вершина множества A имеет лишь одно ребро, стоимость которого не превышает $q+N(q+1)$, именно оно должно присутствовать в остовном дереве. Отсюда следует, что в графе G есть остовное дерево, стоимость которого не превышает q, из чего следует, что в нём не более, чем q рёбер единичной стоимости, которые соединяют вершины-подмножества и вершину y.

Также очевидно, что их ровно q, т.к. у нас $3q$ вершин-элементов, и если каждая из них не будет находиться от вершины y на расстоянии 2, то диаметр остовного дерева будет больше, чем D (путь из вершины $\in A$, связанной с x, в вершину $\in A$, связанную с вершиной-элементом, находящейся на расстоянии от y большем, чем 2). В результате эти q вершин-подмножеств и дадут нам C'. □

4.2 Поиск остова ограниченного диаметра с максимальным числом висячих вершин

Остов Ограниченного Диаметра с Максимальным Числом Висячих Вершин

УСЛОВИЕ. Дан связный граф $G = (V, E)$, где V — множество вершин, $|V| = n$, E — множество рёбер, $K \leqslant n$, $f : E \to \mathbb{Z}_+$ — функция стоимости, и число $2 \leqslant D \leqslant n-2$.
ВОПРОС. Существует ли в этом графе остовное дерево, имеющее минимальную суммарную стоимость, K или более висячих вершин и диаметр, меньший или равный D?

Покажем, что данная задача для $D \geqslant 6$, некоторого $K \geqslant \frac{n}{2}$ и неодинаковых стоимостях всех рёбер является NP-трудной, для этого к ней сведём задачу Остов Ограниченного Диаметра при $4 \leqslant D \leqslant n-2$ и неодинаковых стоимостях рёбер. Для этого возьмём распознавательные версии обеих задач (вместо поиска остовного дерева минимальной суммарной стоимости нужно определить, есть ли остовное дерево, для которого стоимость не превышает заданное число M).

Пусть G — граф задачи Остов Ограниченного Диаметра, M, B — параметры задачи: верхняя граница суммарной стоимости остовного дерева и верхняя граница диаметра остовного дерева соответственно. По нему построим следующий граф: заведём $|V|$ новых вершин и проведём из них по одному ребру в одну из вершин графа G, т.е. в каждую вершину графа G дополнительно проведено ровно одно ребро, каждое ребро будет иметь нулевую стоимость. Обозначим полученный граф через $G^{'}$. Заметим, что сложность построения графа $G^{'}$ полиномиальна от числа вершин графа G. Также очевидно, что задача Остов Ограниченного Диаметра с Максимальным Числом Висячих Вершин $\in$ NP, т.к. определить диаметр, посчитать суммарную стоимость и количество листьев можно за полиномиальное время.

Теорема 4.2. *В графе G существует остовное дерево суммарной стоимости рёбер $\leqslant M$ и диаметра $\leqslant B \Leftrightarrow$ в графе $G^{'}$ существует остовное дерево суммарной стоимости рёбер $\leqslant M$, диаметра $\leqslant B+2$ и числом листьев $\geqslant K = |V|$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Из остовного дерева графа G очевидным образом получается остовное дерево графа $G^{'}$, удовлетворяющее всем условиям: к тому остовному дереву графа G добавляются рёбра нулевой стоимости, проведённые в «новые» вершины графа $G^{'}$. В полученном дереве диаметр увеличится по сравнению с диаметром остовного дерева графа G на 2 (расстояние между «новыми» вершинами, соответствующими паре вершин графа G, находящихся на расстоянии, равном диаметру). Число листьев в том остовном дереве будет не меньше K, т.к. все «новые» вершины будут в этом остовном дереве листьями. Суммарная стоимость рёбер дерева не изменится, т.к. были добавлены рёбра нулевой стоимости.

$\Leftarrow$ Из остовного дерева графа $G^{'}$ очевидным образом получается остовное дерево графа G, удовлетворяющее всем условиям: из того остовного дерева графа $G^{'}$ удаляются рёбра нулевой стоимости, проведённые в «новые» вершины графа $G^{'}$, самих «новых» вершин тоже нет. В полученном дереве диаметр уменьшится по сравнению с диаметром остовного дерева графа $G^{'}$ на 2 (расстояние между «старыми» вершинами, соответствующими паре «новых» вершин графа $G^{'}$, находящихся на расстоянии, равном диаметру). Суммарная стоимость рёбер дерева не изменится, т.к. были удалены рёбра нулевой стоимости. □

Замечание 4.1. С учётом того, что задача Остов Ограниченного Диаметра при $4 \leqslant D \leqslant n-2$ и неодинаковых стоимостях рёбер является NP-полной в сильном смысле, задача Остов Ограниченного Диаметра с Максимальным Числом Висячих Вершин для $D \geqslant 6$, $K \geqslant \frac{n}{2}$, является NP-полной в сильном смысле и в случае $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ не имеет псевдополиномиального алгоритма решения.

Покажем, что эта задача также является NP-трудной в классе k-регулярных графов, где $k \geqslant 5$, стоимости рёбер неодинаковы и $10 \leqslant D$. Для этого воспользуемся тем, что задача Остов Ограниченного Диаметра в случае, если $4 \leqslant D \leqslant n-2$ и стоимости всех рёбер не равны, является NP-трудной задачей для k-регулярных графов, $k \geqslant 4$. Будем работать с распознавательными версиями задач и NP-полнотой.

Рассмотрим k-регулярные графы $G = (V, E)$ с чётной степенью вершин и задачу Остов Ограниченного Диаметра. M, B — параметры задачи: верхняя граница суммарной стоимости остовного дерева и верхняя граница диаметра остовного дерева соответственно. По графу G строим 2 графа: один будет $(k+1)$-регулярный, обозначим его G_1, второй будет $(k+2)$-регулярный, обозначим G_2.

(k+1)-регулярный граф:

1. Для каждой вершины графа G заведём по одной дополнительной вершине a_i и соединим эти пары ребром.

2. Заведём $|V|$ множеств по $k+4$ вершин, одно множество будет соответствовать одной некоторой вершине a_i, при этом каждой вершине соответствует ровно одно множество.

3. Из вершины a_i проведём по ребру в произвольные k вершин соответствующего ей множества.

4. Из любой ровно одной вершины степени 1 каждого множества проводим 4 ребра в вершины степени 0.

5. Дополняем это множество рёбрами только между его вершинами так, чтобы все степени вершин были равны $k+1$. Это возможно в силу того, что хроматический индекс полного графа на чётном числе вершин равен $|V|-1$.

6. Все новые рёбра имеют нулевую стоимость.

(k+2)-регулярный граф:

1. Для каждой вершины графа G заведём по паре дополнительных вершин a_i, b_i и соединим вершину графа G рёбрами с этой парой.

2. Заведём $|V|$ множеств по $k+6$ вершин, одно множество будет соответствовать одной некоторой вершине a_i, при этом каждой вершине соответсвует ровно одно множество.

3. Заведём $|V|$ множеств по $k+6$ вершин, одно множество будет соответствовать одной некоторой вершине b_i, при этом каждой вершине соответствует ровно одно множество.

4. Из вершины a_i проведём по ребру в произвольные $k+1$ вершин соответствующего ей множества.

5. Из вершины b_i проведём по ребру в произвольные $k+1$ вершин соответствующего ей множества.

6. Из любой ровно одной вершины степени 1 каждого множества проводим 5 рёбер в вершины степени 0.

7. Дополняем каждое множество рёбрами только между его вершинами так, чтобы все степени вершин были равны $k+2$, а одна вершина была степени $k+1$. Также эта вершина должна быть несмежна с вершиной a_i или b_i, в зависимости от того, какой вершине соответствует множество. Это возможно в силу того, что хроматический индекс полного графа на чётном числе вершин равен $|V|-1$.

8. Из вершины множества, соответствующего a_i, степени $k+1$ проводим ребро в вершину множества, соответствующего b_i, степени $k+1$, $i = \overline{1, |V|}$.

9. Все новые рёбра имеют нулевую стоимость.

Аналогично предыдущей теореме можно сформулировать и доказать следующие теоремы, где искомыми остовными деревьями в графах G_1 и G_2 будут графы, полученные при их построении после четвёртого и шестого шагов соответственно.

Теорема 4.3. *В графе G существует остовное дерево суммарной стоимости рёбер $\leqslant M$ и диаметра $\leqslant B \Leftrightarrow$ в графе G_1 существует остовное дерево суммарной стоимости рёбер $\leqslant M$, диаметра $\leqslant B + 6$ и числом листьев $\geqslant K = (k + 3)|G|$.*

Теорема 4.4. *В графе G существует остовное дерево суммарной стоимости рёбер $\leqslant M$ и диаметра $\leqslant B \Leftrightarrow$ в графе G' существует остовное дерево суммарной стоимости рёбер $\leqslant M$, диаметра $\leqslant B + 6$ и числом листьев $\geqslant K = 2(k + 5)|G|$.*

Замечание 4.2. С учётом того, что задача Остов Ограниченного Диаметра при $4 \leqslant D \leqslant n - 2$ и неодинаковых стоимостях рёбер является NP-полной в сильном смысле в классе k-регулярных графов, $k \geqslant 4$, задача Остов Ограниченного Диаметра с Максимальным Числом Висячих Вершин в классе k-регулярных графов, где $k \geqslant 5$, стоимости рёбер неодинаковы и $10 \leqslant D$, является NP-полной в сильном смысле и в случае $P \neq NP$ не имеет псевдополиномиального алгоритма решения.

4.3 Поиск остова ограниченной степени

Известно, что задача поиска гамильтонова пути является NP-трудной для планарного графа, максимальная степень которого не превышает 3 (см. [12]). Воспользуемся этим фактом и покажем, что задача Остов Ограниченной Степени является NP-трудной для любого фиксированного $K \geqslant 2$ в классе планарных графов, максимальная степень которого не превышает $K + 1$.

Пусть $G = (V, E)$ — планарный граф, максимальная степень которого не превышает 3. Построим следующий граф: для каждой вершины заведём по $K - 2$ вершин и проведём из этих вершин рёбра в вершину графа G, которая им соответствует. Очевидно, что даный граф планарен. Обоначим полученный граф G'.

Теорема 4.5. *В графе G существует гамильтонов путь (остовное дерево, максимальная степень вершин которого не превышает 2) $\Leftrightarrow$ графе G' существует остовное дерево, максимальная степень вершин которого не превышает K.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что искомые остовные деревья в графах G и G' будут отличаться лишь теми рёбрами, которые проведены в вершины степени 1 графа G'. □

Учитывая, что для $K = 2$ задача эквивалентна поиску гамильтонова пути в графе, а задача поиска гамильтонова цикла полиномиально сводится по

Тьюрингу к задаче поиска гамильтонова пути, то в классах графов, в которых задача поиска гамильтонова цикла является NP-трудной, и задача поиска гамильтонова пути является NP-трудной. Воспользуемся этим фактом для исследования задачи в специальных классах графов.

Известно, что задача поиска гамильтонова цикла является NP-трудной в классе кубических графов (3-регулярных графов). Эту задачу можно полиномиально свести к задаче поиска гамильтонова цикла в 4-регулярном графе (см. [10]). Зная это, а также сводимость задачи поиска гамильтонова цикла к задаче гамильтонова пути по Тьюрингу, получаем, что задача поиска остовного дерева, максимальная степень вершин которого не превышает 2, является NP-трудной.

Пусть $G = (V, E)$ — 4-регулярный граф. Построим по нему для любого $k \geqslant 4$ k-регулярный граф (обозначим $G^{'}$) следующим образом.

k — нечётное:

1. Для каждой вершины графа G заведём по $k-4$ дополнительной вершине a_{ij}, $i = \overline{1, |V|}$, $j = \overline{1, k-4}$ и соединим вершину графа G рёбрами со всеми соответствующими ей вершинами.

2. Для каждой вершины a_{ij} введём свои $k+3$ вершины и построим на них граф (этот граф гамильтонов при $k \geqslant 5$ по теореме Оре), в котором все степени новых вершин были равны k, а степень вершины a_{ij} равна $k-1$, что вкупе с ребром из вершины графа G даст степень, равную k.

k — чётное:

1. Для каждой вершины графа G заведём по $k-4$ дополнительной вершине a_{ij}, $i = \overline{1, |V|}$, $j = \overline{1, k-4}$ и соединим вершину графа G рёбрами со всеми соответствующими ей вершинами.

2. Для каждой вершины a_{ij} введём свои $k+2$ вершины и построим на них граф (этот граф гамильтонов при $k \geqslant 5$ по теореме Оре), в котором все степени новых вершин, кроме одной, были равны k, а степень вершины a_{ij} равна $k-1$, что вкупе с ребром из вершины графа G даст для неё степень, равную k.

3. Оставшиеся $k-4$ вершины, пока имеющие степень, равную $k-1$, произвольным образом разбиваем на пары и соединяем ребром. Получаем $\frac{k-4}{2}$ конструкции на новых вершинах, индуцирующие связный граф.

Теорема 4.6. *В графе G существует гамильтонов путь $\Leftrightarrow$ графе $G^{'}$ существует остовное дерево, максимальная степень вершин которого не превышает $k-2$, если k нечётно.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Если в графе G есть гамильтонов путь, то в G' есть дерево, множество вершин которого — объединение V и всех вершин a_{ij}, степени которых не превышают $k-2$. Это дерево получится, если к этому существующему гамильтонову пути добавить все рёбра, проводимые на первом шаге построения G', описанного выше. Далее, пользуясь тем, что подграфы, индуцированные вершиной a_{ij} вместе с соответствующими ей вершинами, добавленными на втором шаге построения G', являются гамильтоновыми, к этому дереву «прикрепим» к каждой вершине a_{ij} эти гамильтоновы пути, в результате получим искомое дерево.

$\Leftarrow$ Рассмотрим в этом остовном дереве T' граф, индуцированный множеством вершин графа G. Учитывая, что в T' содержатся все рёбра, проводимые на первом шаге построения G', в этом индуцированном подграфе вершины будут иметь степень $\leqslant k-2-(k-4)=2$, и этот индуцированный подграф будет связен. $\square$

Теорема 4.7. *В графе G существует гамильтонов путь $\Leftrightarrow$ графе G' существует остовное дерево, максимальная степень вершин которого не превышает $\frac{k}{2}$, если k чётно.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы, отличается лишь тем, что в остовном дереве графа G' обязательно присутствует по ровно одному рёбру, которое связывает вершину графа G с одной из связных конструкций, которые описаны в пункте 2 построения G'. $\square$

В результате доказано, что задача Остов Ограниченной Степени является NP-трудной в классе k-регулярных графов.

4.4 Поиск остова ограниченной степени с максимальным числом висячих вершин

Остов Ограниченной Степени с Максимальным Числом Висячих Вершин

УСЛОВИЕ. Дан граф $G=(V,E)$, $f: E \to \mathbb{Z}_+$ — функция стоимости — и положительные числа $K, L \leqslant |V|$.

ВОПРОС. Существует ли остовное дерево в графе G минимальной стоимости, к которой для любой фиксированной вершины её степень в том остовном дереве не превышает K и число листьев в этом остовном дереве не меньше L?

Рассмотрим постановку задачи, где для всех рёбер стоимость одинакова. Покажем её NP-трудность при $K \geqslant 3$ и $L \geqslant \frac{|V|}{2}$, показав NP-полноту её распознавательной версии. Сведём к данной задаче распознавательную постановку задачи Остов Ограниченной Степени.

Пусть G — граф задачи Остов Ограниченной Степени, K — верхняя граница максимальной степени вершин остовного дерева. По этому графу построим следующий граф: заведём $|G|$ новых вершин и проведём из них по одному ребру в одну из вершин графа G, т.е. в каждую вершину графа G дополнительно проведено ровно одно ребро, каждое ребро будет иметь ту же стоимость, что и рёбра графа G. Обозначим полученный граф через $G^{'}$.

Заметим, что сложность построения графа $G^{'}$ полиномиальна от числа вершин графа G. Также очевидно, что задача Остов Ограниченной Степени с Максимальным Числом Висячих Вершин $\in$ NP, т.к. определить максимальную степень вершин и количество листьев можно за полиномиальное время.

Теорема 4.8. *В графе G существует остовное дерево максимальной степени $\leqslant K \Leftrightarrow$ в графе $G^{'}$ существует остовное дерево максимальной степени $\leqslant K+1$ и числом листьев $L \geqslant \frac{|G^{'}|}{2}$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Из остовного дерева графа G очевидным образом получается остовное дерево графа $G^{'}$, удовлетворяющее всем условиям: к тому остовному дереву графа G добавляются рёбра, проведённые в «новые» вершины графа $G^{'}$. В полученном дереве максимальная степень вершин увеличится по сравнению с максимальной степенью остовного дерева графа G на 1. Число листьев в том остовном дереве будет не меньше L, т.к. все «новые» вершины будут в этом остовном дереве листьями.

$\Leftarrow$ Из остовного дерева графа $G^{'}$ очевидным образом получается остовное дерево графа G, удовлетворяющее всем условиям: из того остовного дерева графа $G^{'}$ удаляются рёбра, проведённые в «новые» вершины графа $G^{'}$, самих «новых» вершин тоже нет. В полученном дереве максимальная степень вершин графа уменьшится по сравнению с максимальной степенью вершин графа G на 1. □

Замечание 4.3. С учётом того, что задача Остов Ограниченной Степени является NP-полной в сильном смысле, задача Остов Ограниченной Степени с Максимальным Числом Висячих Вершин является NP-полной в сильном смысле и в случае $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ не имеет псевдополиномиального алгоритма решения.

4.5 Выбор целевого множества

Введём обозначение $b(G, f)$ — число вершин в множестве S, которое является решением задачи Целевое Множество.

Теорема 4.9. *Задача* Целевое Множество — *NP-трудная задача в классе рёберных графов с функцией активации, принимающей значения из множества* $\{1, 2\}$.

Для доказательства нам понадобится следующая задача:

Целевое Множество для Рёбер
УСЛОВИЕ. Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф, на множестве рёбер которого задана функция активации $f : E \to N$, которая определяет порог активации каждого ребра графа. Пусть S — подмножество рёбер графа G. Процесс активации рёбер начинается с того, что все рёбра графа G, принадлежащие S, и только они активируются. Таким образом, изначально $S_0 = S$. Далее совершается итерационный процесс, на каждой итерации которого активируются новые рёбра в соответствии со следующим првилом: множество активированных рёбер на i-й итерации $S_i = S_{i-1} \cup \{e \in E : |N(e) \cap S| \geqslant \geqslant f(e),\ i = 1, 2, \ldots, t\}$. Процесс завершается в тот момент, когда на некоторой k-й итерации либо все рёбра графа G активированы, либо ни одно из неактивированных рёбер не переходит в состояние активированного.
ВОПРОС. Необходимо найти наименьшее (по числу рёбер) начальное множество S активированных рёбер такое, что по завершению процесса активации все рёбра графа G имеют статус активированных.

Введём обозначение $e(G, f)$ — число рёбер в множестве S, которое является решением задачи Целевое Множество для Рёбер.

Докажем, что данная задача является NP-трудной.

Лемма 4.1. *Задача* Целевое Множество для Рёбер *является NP-трудной.*

Доказательство. Полиномиальное сведение построим от задачи Целевое Множество, которая является NP-трудной в классе двудольных графов с минимальной степенью вершин не меньше 2 и функцией активации, которая тождественно равна 2.

Пусть $G = (V, E)$ — двудольный граф, $\delta(G) \geqslant 2$ и $f(v) = 2$ для любой вершины v графа G. Подразобьём каждое ребро в графе G. Затем каждую вершину u получившегося графа заменим на граф H_u: простой цикл порядка $\deg(u)$, если $\deg(u) > 2$, или простую цепь порядка 2, если $\deg(u) = 2$ (рисунок 4.5.1)

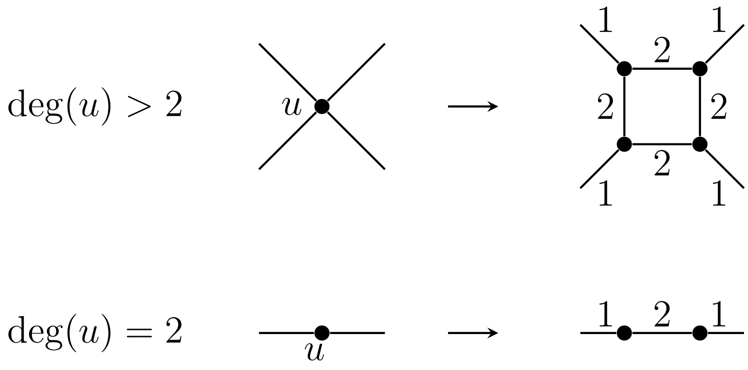

Рисунок 4.5.1.—H_u в зависимости от значения $\deg(u)$

Порог активации рёбер для каждого ребра указан на рисунке 4.5.1. Получившийся в результате граф с функцией активации обозначим через H и g соответственно. Покажем, что

$$b(G, f) = e(H, g)$$

Пусть S — начальное множество активированных вершин в графе G и $|S| = b(G, f)$. Сформируем начальное множество активированных рёбер D графа H следующим образом. Изначально положим D равным пустому множеству. Затем для каждой вершины u из множества S включим в D любое ребро H_u с порогом активации 1. Нетрудно видеть, что из того, что активационный процесс, запущенный в графе G с начальным множеством S завершается по активации всех вершин графа G, следует, что активационный процесс, запущенный на рёбрах графа H также завершится по активации всех рёбер. Кроме этого, $|D| = |S| = b(G, f)$. Следовательно, $b(G, f) \geqslant e(H, g)$.

Для того, чтобы доказать неравенство в другую сторону, рассмотрим в графе H начальное множество активированных рёбер D и $|D| = e(H, g)$. Нетрудно видеть, что мы всегда можем безопасно заменить в множестве D ребро с порогом активации 1 на ближайшее к нему ребро с порогом активации 2.

Итак, мы можем предполагать, что множество D состоит только из рёбер с порогом активации 2. Построим начальное множество активированных вершин S графа G следующим образом: изначально положим S равным пустому множеству. Затем для каждого ребра из D, принадлежащего некоторому H_u, добавим в S вершину u. Нетрудно видеть, что из того, что активационный процесс, запущенный в графе H с начальным множеством активированных рёбер D завершается по активации всех рёбер, следует, что активационный процесс, запущенный в графе G с начальным множеством активированных вершин S завершится по активации всех вершин графа G. Имеем $|S| = |D| = e(H, g)$ и $b(G, f) \leqslant e(H, g)$, что и требовалось доказать. $\square$

Докажем теорему 4.9.

Доказательство. NP-трудность задачи Целевое Множество следует из NP-трудности задачи Целевое Множество для Рёбер, поскольку при переходе от графа к рёберному графу рёбра исходного графа переходят в вершины другого с сохранением отношения смежности. □

Теорема 4.10. *Задача* Целевое Множество *— полиномиально разрешимая задача в классе пороговых графов G с функцией активации, для которой выполняются следующие условия: 1)* $\deg(v) \geqslant \deg(u) \Rightarrow f(v) \geqslant f(u)$ *для любой пары вершин v, и графа G; 2)* $f(v) < \deg(v)$ *для любой вершины v графа G.*

Рассмотрим следующий алогритм поиска решения задачи Целевое Множество в классе пороговых графов. Пусть G — пороговый граф.

1. Возьмём все доминирующие вершины графа G и отсортируем в порядке убывания степени. Обозначим эти вершины $d_1, d_2, \ldots d_k$, где $\deg(d_i) \geqslant \deg(d_j),\ i < j$.

2. Пусть начальное множество вершин $S = \varnothing$.

3. Добавляем в множество S вершину d_i, где $\deg(d_i) \geqslant \deg(d_j), \forall d_j \notin S$.

4. Проверяем, все ли вершины графа G будут иметь статус активированных, если множество вершин S взять в качестве начального множества активированных вершин. Если нет, переходим к шагу 3, в противном случае завершаем алгоритм.

Лемма 4.2. *Приведённый выше алгоритм является корректным алгоритмом поиска решения задачи* Целевое Множество *в классе пороговых графов G с функцией активации, для которой выполняются следующие условия: 1)* $\deg(v) \geqslant \deg(u) \Rightarrow f(v) \geqslant f(u)$ *для любой пары вершин v, и графа G; 2)* $f(v) < \deg(v)$ *для любой вершины v графа G.*

Доказательство. Для доказательства леммы покажем следующее: 1) если множество вершин S, которое активирует все вершины графа G после завершения активационного процесса, является минимальным по количеству вершин, то ему соответствует множество начальных вершин S', в котором содержатся лишь доминирующие вершины; 2) если множество вершин S, которое активирует все вершины графа G после завершения активационного процесса, является минимальным по количеству вершин и в нём не содержится доминирующая вершина v_i графа G, степень которой больше, чем у хотя бы одной доминирующей вершины v_j из множества S, то множество

$S' = (S \setminus v_j) \cup \{v_i\}$ также активирует все вершины графа G после завершения активационного процесса.

1) Если в множестве S нет недоминирующих вершин, то, очевидно, $S' = S$. Пусть $v \in S$ — недоминирующая вершина порогового графа G. Рассмотрим вершины из её окружения. По определению порогового графа, все эти вершины являются доминирующими. Если все они содержатся в множестве S, то, учитывая, что $f(v) < \deg(v)$, вершину v можно выбросить из множества S, и оно сохранит способность активировать все вершины по завершении процесса активации, следовательно, хотя бы одна вершина u из окружения вершины v не содержится в множестве S.

Из определения порогового графа следует, что $\deg(u) > \deg(v)$, следовательно, $f(u) \geqslant f(v)$, из этого и того, что $N(v) \subset N(u)$, следует, что $S' = (S \setminus v) \cup \{u\}$ также активирует все вершины графа G после завершения активационного процесса: нетрудно видеть, обе вершины u и v в процессе активации для множества S' будут активированы не позже, чем в процессе активации для множества S, и из того, что $N(v) \subset N(u)$, следует, что процесс активации остальных вершин графа G для начального множества вершин S' не теряет в качестве активаци по сравнению с процессом активации с множеством S в качестве начального.

2) Если в пороговом графе для доминирующих вершин u и v выполняется $\deg(v) < \deg(u)$, то $N(v) \subset N(u)$. Учиитывая, что $f(u) \geqslant f(v)$ и $f(v) < \deg(v)$ для любой вершины v графа G (что исключает обязательный выбор из пары недоминирующая вершина — смежная ей доминиррующая, т.к. в противном случае никакая из этих вершин не может активироваться, пока не будет активна другая вершина), процесс активации остальных вершин графа G для начального множества вершин S' не теряет в качестве активаци по сравнению с процессом активации с множеством S в качестве начального.

Пусть S — некоторое множество вершин, которое активирует все вершины графа G после завершения активационного процесса, являющееся минимальным по количеству вершин. Учитывая 1), получаем, что ему соответствует множество S', которое содержит только доминирующие вершины. Далее, используя 2), из S' можно получить множество, которое тоже является минимальным по количеству вершин среди множеств, которые активируют все вершины по завершении процесса активации. Полученное множество совпадает с множеством, получаемым в результате алгоритма, что и требовалось доказать. $\square$

Докажем теорему 4.10.

Доказательство. Воспользуемся доказанной леммой 4.2: доказанный в ней алгоритм решает задачу и имеет полиномиальную от порядка графа вычислительную сложность, т.к. процесс активации вершин для некоторого множества вершин графа осуществляется за полиномиальное от количества вершин время. □

В итоге показана NP-полнота всех распознавательных версий рассмотренных задач, что, в свою очередь, показывает NP-трудность рассмотренных задач. В том числе показана NP-трудность для всех рассмотренных специальных случаев задач. В силу выбранных эталонных задач для рассмотренных задач обоснована NP-трудность в сильном смысле, из чего следует отсутствие псевдополиномиального алгоритма решения, если $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рамках данной работы было выполнено следующее:

1. Доказано, что задача Ориентированная Доставка Сообщения с n источниками является NP-трудной.
2. Доказано, что задача Ориентированная Доставка Сообщения является NP-трудной.
3. Доказано, что задача Доставка Сообщения в Подмножество Вершин является NP-трудной.
4. Доказано, что задача Доставка Сообщения с n источниками является NP-трудной.
5. Доказано, что задача Доставка Сообщения является NP-трудной.
6. Доказано, что задача Доставка Сообщения с Выбором Источника является NP-трудной.
7. Доказано, что задачи Доставка Сообщения с Выбором Источника и Доставка Сообщения являются NP-трудными в классе графов, диаметр которых не превышает 2.
8. Доказано, что задача Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета в случае $k \geqslant 3$ является NP-трудной.
9. Доказано, что задача Полное k-арное Дерево Высоты Эксцентриситета с Произвольным Корнем в случае $k \geqslant 3$ является NP-трудной.
10. Доказано, что задача Полное k-арное Дерево Высоты Предела Эксцентриситета в случае $k \geqslant 3$ является NP-трудной.
11. Доказано, что задача Полное k-арное Дерево Высоты Предела Эксцентриситета с Произвольным Корнем в случае $k \geqslant 3$ является NP-трудной.
12. Доказано, что задача Остов Ограниченного Диаметра в случае, если $4 \leqslant D \leqslant n-2$ и стоимости всех рёбер не равны, является NP-трудной для k-регулярных графов, $k \geqslant 4$.
13. Доказано, что задача Остов Ограниченного Диаметра с Максимальным Числом Висячих Вершин в случае $D \geqslant 6$, $K \geqslant \frac{n}{2}$ и неодинаковых стоимостях всех рёбер является NP-трудной.

14. Доказано, что задача Остов Ограниченного Диаметра с Максимальным Числом Висячих Вершин является NP-трудной в классе k-регулярных графов, если $k \geqslant 5$, стоимости рёбер неодинаковы и $10 \leqslant D$.

15. Доказано, что задача Остов Ограниченной Степени является NP-трудной для любого фиксированного $K \geqslant 2$ в классе планарных графов, максимальная степень которого не превышает $K + 1$.

16. Доказано, что задача Остов Ограниченной Степени является NP-трудной в классе k-регулярных графов.

17. Доказано, что задача Остов Ограниченной Степени с Максимальным Числом Висячих Вершин, если для всех рёбер стоимость одинакова, $K \geqslant 3$ и $L \geqslant \frac{|V|}{2}$, является NP-трудной.

18. Доказано, что задача Целевое Множество в классе рёберных графов с функцией активации, принимающей значения из множества $\{1, 2\}$, является NP-трудной.

19. Доказано, что задача Целевое Множество для Рёбер является NP-трудной.

20. Построен полиномиальный алгоритм задачи Целевое Множество в классе пороговых графов G с функцией активации, для которой выполняются следующие условия: 1) $deg(v) \geqslant deg(u) \Rightarrow f(v) \geqslant f(u)$ для любой пары вершин v, u графа G; 2) $f(v) < deg(v)$ для любой вершины v графа G.

21. В силу выбранных эталонных задач для большинства рассмотренных задач обоснована NP-трудность в сильном смысле, из чего следует отсутствие псевдополиномиального алгоритма решения рассмотренных задач, если P $\neq$ NP.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. A routing problem on ad-hoc networks and graph theory / Sengoku M., Tamura H., Maze K., Shinodu S. // Communication Technology Proceedings. 2000. vol 2. p. 1710-1713.

2. Garey, M.G. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completness / M.G. Garey, D.S. Jonhson. — Freeman, San Francisco, 1979.

3. Bounded Diameter Minimum Spanning Tree / G. Naziradze // Budapest, Hungary, 2013.

4. An Ant-Based Algorithm for Finding Degree-Constrained Minimum Spanning Tree / T. Bui, C. Zrncic // GECCO'06, July 8-12, 2006, Seattle.

5. Approximation Minimum Bounded Degree Spanning Trees to within One to Optimal / M. Singh, L. Lau // STOC'07, June 11-13, 2007, San Diego.

6. On some tractable and hard instances for partial incentives and target set selection [Electronic resource] / Ehard S., Rautenbach D. — Mode of access: https://arxiv.org/pdf/1805.10086.pdf. — Date of access: 10.04.2020.

7. Target Set Selection in Dense Graph Classes / Dvorak P., Knop P., Youfad D.

8. Target set selection problem for honeycomb networks / Chiang C. // SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2012.

9. On Tractable Cases of Target Set Selection / Nichterlein A. [et al.]. // Social Network Analysis and Mining, 2010.

10. Hamiltonicity of k-regular graphs [Electronic resource] / — Mode of access: https://cstheory.stackexchange.com/questions/1651/hamiltonicity-of-k-regular-graphs. — Date of access: 14.02.2020.

11. The Rectilinear Steiner Tree Problem is NP Complete / M.G. Garey, D.S. Johnson // SIAM J. Appl. Math. 32 (1977) 826–834.

12. Some simplified NP-complete problems / Garey M. R., Johnson D. S., Stockmeyer L. // Proc. 6th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '74), pp. 47–63.

13. Лекции по теории графов / В. Емеличев [и др.]. — Минск: Наука, 1990.