Во- вторых, с позиции управления запасами в глобальных логистических целях наличие полной и достоверной информации позволяет сократить потребность в запасах, оборотном капитале и трудовых ресурсах за счет уменьшения неопределенности в спросе.

В-третьих, информация увеличивает гибкость управления движением грузопотоков с точки зрения того, как, где и когда можно использовать необходимые материальные, финансовые ресурсы для достижения конкурентных преимуществ.

При создании логистического центра можно решить следующие задачи:

1. увеличить объем предоставляемых перевозчиком услуг;
2. сократить сроки доставки грузов до соответствия современным требованиями;
3. привлечь дополнительный объем грузоперевозок и снизить стоимость перевозок;
4. повысить уровень качества предоставляемых услуг пассажирам до международного уровня;
5. развить систему подготовки, отправки, сопровождения в пути и выдачи получателю грузов и багажа;
6. развить систему предварительного уведомления представителей таможни о предстоящем поступлении грузов, пересекающих границу;
7. сократить временные затраты на транспортировку грузов, багажа, простоя транспортных средств;
8. сократить время передачи транспортных и грузовых единиц с одного вида транспорта на другой;
9. автоматизировать проверку возможностей и сроков отправки/ доставки грузов;
10. создать систему непрерывного обучения кадров.

Задачи, которые стоят перед структурами аэропорта будущего – это снижение рисков и разработка систем, способных синхронизировать информацию на каждом этапе различных процессов для возможности централизованного управления на основании логистической системы.

Список использованных источников

1. Методические подходы к развитию процесса поставок и логистики // Новая экономика. – 2018. – №2. С. 127–134.

О ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ С ЗАДАННОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ НОРМОЙ ТЕХНИЧЕСКОГО ЗАМЕЩЕНИЯ

Г. А. Хацкевич,
докт. экон. наук, профессор, зав. кафедрой бизнес-администрирования
Институт бизнеса Белорусского государственного университета, г. Минск

А. Ф. Проневич,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического
и информационного обеспечения экономических систем
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, г. Гродно

Рассмотрим двухфакторную производственную функцию (ПФ)

$$Y = F(K, L) \quad \forall (K, L) \in G, \tag{1}$$

описывающую некоторый производственный процесс P, где K – капитал, L – труд, Y – объем выпущенной продукции, а неотрицательная функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на области G из $\mathbf{R}^2_+ = \{(K, L) : K \geq 0, L \geq 0\}$.

Важными характеристиками ПФ (1) являются показатели эффективности процесса замещения факторов производства. Количественные меры замещения были введены

[1] английским экономистом Д.Р.Хиксом для ПФ (1) как *предельная норма технического замещения MRTS* (marginal rate of technical substitution) труда капиталом

$$MRTS_{LK}(K,L) = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} : \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} \quad \forall (K,L) \in G' \subset G \tag{2}$$

и эластичность замещения труда капиталом

$$\sigma(K,L) = \frac{d\ln(K/L)}{d\ln MRTS_{LK}(K,L)} \text{ при условии } F(K,L) = const.$$

Показатель *MRTS* (2) является для ПФ (1) характеристикой первого порядка (в смысле [2]) и на языке процентов приближенно показывает, на сколько процентов нужно увеличить или уменьшить использование капитала K при уменьшении или увеличении труда L на 1 %. Графически же характеристика *MRTS* представляется тангенсом угла наклона касательной к изокванте ПФ в точке, указывающей необходимые объемы труда и капитала для производства заданного объема продукции. Например, предельные нормы замещения труда капиталом основных ПФ представлены в таблице 1.

Таблица 1 **– Предельные нормы технического замещения основных ПФ**

№	**ПФ** $F(K,L)$	**Предельная норма технического замещения труда капиталом** $MRTS_{LK}(K,L)$
1.	*Линейная* ПФ $F(K,L)=\alpha K+\beta L+\gamma$	$MRTS_{LK}(K,L) = \dfrac{\beta}{\alpha}$
2.	ПФ *Кобба–Дугласа* (*Викселля*) $F(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta},\ A>0,\ \alpha,\beta\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$	$MRTS_{LK}(K,L) = \dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{K}{L}$
3.	ПФ *CES* $F(K,L)= A\left(\nu K^{-\rho}+(1-\nu)L^{-\rho}\right)^{-\mu/\rho}$, $A>0,\ \mu\in\mathbf{R}\backslash\{0\},\ \nu\in(0;1],\ \rho\in[-1;0)\cup(0;+\infty)$	$MRTS_{LK}(K,L) = \dfrac{1-\nu}{\nu}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\rho+1}$
4.	ПФ *Солоу* $F(K,L)= A\left(\nu K^{\alpha}+(1-\nu)L^{\beta}\right)^{\gamma}$, $A>0,\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}\backslash\{0\},\ \nu\in(0;1]$	$MRTS_{LK}(K,L) = \dfrac{\beta(1-\nu)}{\alpha\nu}\dfrac{K^{1-\alpha}}{L^{1-\beta}}$
5.	ПФ Джири $F(K,L)=A(K-K^{*})^{\alpha}(L-L^{*})^{\beta}$, $G=\{(K,L)\in\mathbf{R}^2_{+}: K>K^{*}, L>L^{*}\},\ A>0,\ \alpha,\beta\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$	$MRTS_{LK}(K,L) = \dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{K-K^{*}}{L-L^{*}}$
6.	*Логарифмическая* ПФ $F(K,L)=A\left(\alpha\ln(1+\delta K)+\beta\ln(1+\gamma L)\right)$	$MRTS_{LK}(K,L) = \dfrac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\dfrac{1+\delta K}{1+\gamma L}$
7.	ПФ *Реванкара* (*с линейной эластичностью замещения, LES*) $F(K,L)=AK^{\alpha}(\nu K+L)^{\beta},\ A>0,$ $\alpha,\beta\in\mathbf{R}\backslash\{0\},\ \nu\in\mathbf{R}_{+}$	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{\beta K}{\nu(\alpha+\beta)K+\alpha L}$
8.	ПФ *Сато* (произведение ПФ Кобба–Дугласа и CES) $F(K,L)= A\left(\nu K^{-\rho}+(1-\nu)L^{-\rho}\right)^{-\mu/\rho}K^{\alpha}L^{\beta}$	$MRTS_{LK}(K,L) = \dfrac{K}{L}\cdot\left(\beta\nu K^{-\rho}+(\beta+\mu)(1-\nu)L^{-\rho}\right)\cdot$ $\cdot\left((\alpha+\beta)\nu K^{-\rho}+\alpha(1-\nu)L^{-\rho}\right)^{-1}$
9.	ПФ *Лу–Флетчера* $F(K,L)=A\left(aK^{\rho}+(1-a)b\left(\dfrac{K}{L}\right)^{-\nu(1-\rho)}L^{\rho}\right)^{\mu/\rho}$	$MRTS_{LK}(K,L) = \dfrac{(1-a)b(\nu+\rho-\nu\rho)\dfrac{K}{L}}{a\rho\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\nu+\rho-\nu\rho}-\nu(1-a)(1-\rho)}$
10.	ПФ *Лиу–Хильдебранда* $F(K,L)=A((1-b)K^{\rho}+bK^{\nu\rho}L^{(1-\nu)\rho})^{\mu/\rho}$	$MRTS_{LK}(K,L) = \dfrac{b(1-\nu)\dfrac{K}{L}}{(1-b)\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\rho(1-\nu)}+b\nu}$

Окончание таблицы 1

№	**ПФ** $F(K,L)$	**Предельная норма технического замещения труда капиталом** $MRTS_{LK}(K,L)$
11.	ПФ *Кадияла* $F(K,L)=A(a_1K^{\alpha+\beta}+2b_1K^{\alpha}L^{\beta}+c_1L^{\alpha+\beta})^{\mu/(\alpha+\beta)}$, $A>0,\ a_1+2b_1+c_1=1,\ a_1,b_1,c_1\ge 0$, $\alpha(\alpha+\beta)>0,\ \beta(\alpha+\beta)>0$	$MRTS_{LK}(K,L)=\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha-\beta}\dfrac{2b_1\beta\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}+(\alpha+\beta)c_1}{2b_1\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{-\beta}+(\alpha+\beta)a_1}$
12.	ПФ *Бруно* $F(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta}-\gamma L$	$MRTS_{LK}(K,L)=\frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}-\frac{\gamma}{\alpha A}K^{1-\alpha}L^{-\beta}$
13.	ПФ Сато – Гофмана (*линейно-однородные* ПФ *с переменной* $\sigma\left(\frac{K}{L}\right)$ *эластичностью замещения*) $F(K,L)=A\exp\int\dfrac{dk}{k+B\exp\int\frac{d\ln k}{\sigma(k)}}\Big\vert_{k=\frac{K}{L}}$, $A,B>0$	$MRTS_{LK}(K,L)=B\exp\int\dfrac{d\ln k}{\sigma(k)}\Big\vert_{k=\frac{K}{L}}$

Примечание – Источник: разработана авторами.

Данная работа продолжает исследования авторов [3–5] по изучению ПФ (1), обладающих заданными экономико-математическими характеристиками. В статье получены новые аналитические виды ПФ (таблица 2) с постоянной, линейной, степенной и др. предельными нормами технического замещения факторов производства.

Основной результат. Используя метод характеристик и спектральный метод [6] решения линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка, а также справочник [7] по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка для некоторых заданных предельных норм технического замещения труда капиталом, вычислим соответствующие им аналитические классы ПФ (таблица 2).

Таблица 2 **– Вид ПФ, соответствующий заданной предельной норме замещения**

№	**Предельная норма технического замещения труда капиталом** $MRTS_{LK}(K,L)$ $\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{R},\ f,g\in C(G)\right)$	**Аналитический вид ПФ** $F_{\varphi}(K,L)$ $(\varphi\in C^1(\mathbf{R}_+))$
1.	$MRTS_{LK}(K,L)=\frac{\beta}{\alpha}\ (\alpha\in\mathbf{R}\backslash\{0\})$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi(\alpha K+\beta L)$
2.	$MRTS_{LK}(K,L)=\alpha K+\beta L+\gamma$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left((\alpha^2K+\alpha\beta L+\alpha\gamma-\beta)e^{\alpha L}\right)$
3.	$MRTS_{LK}(K,L)=\frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}\ (\alpha,\beta\ne 0)$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi(K^{\alpha}L^{\beta})$
4.	$MRTS_{LK}(K,L)=\frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}+\gamma\ (\alpha,\beta\ne 0)$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left(((\alpha+\beta)K+\alpha\gamma L)^{\alpha}L^{\beta}\right)$
5.	$MRTS_{LK}(K,L)=\frac{\beta}{\alpha}\frac{K-\gamma}{L-\delta}\ (\alpha,\beta\ne 0)$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi((K-\gamma)^{\alpha}(L-\delta)^{\beta})$
6.	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{\alpha K+\beta}{\gamma L+\delta}\ (\lvert\gamma\rvert+\lvert\delta\rvert\ne 0)$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi((\alpha K+\beta)^{\gamma}(\gamma L+\delta)^{\alpha})$
7.	$MRTS_{LK}(K,L)=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{\gamma}\ (\alpha\ne 0,\gamma\ne 1)$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi(\alpha K^{1-\gamma}+\beta L^{1-\gamma})$
8.	$MRTS_{LK}(K,L)=\frac{\beta}{\alpha}\frac{K^{\gamma}}{L^{\delta}}\ (\alpha,\beta\ne 0,(\gamma,\delta)\ne(1,1))$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi(\alpha(1-\delta)K^{1-\gamma}+\beta(1-\gamma)L^{1-\delta})$
9.	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{f(K)}{g(L)}$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left(\int\frac{dK}{f(K)}+\int\frac{dL}{g(L)}\right)$

Окончание таблицы 2

№	Предельная норма технического замещения труда капиталом $MRTS_{LK}(K,L)$ $\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{R},\ f,g\in C(G)\right)$	Аналитический вид ПФ $F_{\varphi}(K,L)$ $(\varphi\in C^1(\mathbf{R}_+))$
10.	$MRTS_{LK}(K,L)=f(\alpha K+\beta L+\gamma)$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left(\int\frac{d\xi}{\beta-\alpha f(\xi)}_{\mid\xi=\alpha K+\beta L+\gamma}-L\right)$
11.	$MRTS_{LK}(K,L)=f\left(\frac{K}{L}\right)$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left(\int\frac{d\xi}{f(\xi)+\xi}_{\mid\xi=K/L}+\ln L\right)$
12.	$MRTS_{LK}(K,L)=\frac{K}{L}f(K^{\alpha}L^{\beta})$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left(\int\frac{d\xi}{\xi(\beta-\alpha f(\xi))}_{\mid\xi=K^{\alpha}L^{\beta}}-\ln L\right)$

Примечание – Источник: разработана авторами.

Из таблицы 2 следует, например, что класс № 3 содержит ПФ Кобба–Дугласа, класс № 5 – ПФ Джири, класс № 6 – ПФ Реванкара и логарифмическую, класс № 7 – CES-функцию, класс № 8 – ПФ Солоу, а класс № 11 – ПФ Бруно.

Выводы. В работе решены обратные задачи восстановления двухфакторных ПФ исходя из заданной предельной нормы технического замещения труда капиталом. Построено все множество двухфакторных ПФ, соответствующие заданной (постоянной, линейной, степенной и др.) предельной норме замещения труда капиталом (таблица 2).

Полученные теоретические результаты (таблица 2) могут быть использованы при моделировании реальных производственных процессов, которые имеют известные предельной нормы технического замещения труда капиталом.

Список использованных источников

1. Hicks, J.R. The theory of wages / J.R. Hicks. – London: Macmillan, 1932. – 247 p.

2. Клейнер, Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.

3. Khatskevich, G.A. On quasi-homogeneous production functions with constant elasticity of factors substitution / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich // Journal of Belarussian State University. Economics. – 2017. – No. 1. – P. 46 – 50.

4. Khatskevich, G.A. Production functions with given elasticities of output and production / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich // Journal of Belarussian State University. Economics. – 2018. – No. 2. – P. 13 – 21.

5. Khatskevich, G.A. Analytical forms of productions functions with given total elasticity of production / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich, Yu.Yu. Karaleu // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2019. – Vol. 1052. – P. 276 – 285.

6. Горбузов, В.Н. Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных / В.Н. Горбузов, А.Ф. Проневич // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2001. – № 3. – С. 17 – 45.

7. Зайцев, В.Ф. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 416 с.