

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и  
образовательным инновациям

О.Н. Здрок

«08» сентября 2020г.

Регистрационный № УД-7918/уч.

**Моделирование и оптимизация**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальностей:**

**1-31 80 03      Математика и компьютерные науки**

**профилизация      Компьютерная математика и системный анализ**

2020 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-31 80 03-2019 и учебных планов: G31з-090/уч., №G31-049/уч. от 11.04.2019.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

Д.Н. Чергинец, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета (протокол № 5 от 30.12.2019);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета (протокол № 3 от 03.01.2020).

Зав. кафедрой дифференциальных уравнений  
и системного анализа, профессор



В. И. Громак

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### Цели и задачи учебной дисциплины

**Целью** дисциплины «Моделирование и оптимизация» является формирование у магистрантов теоретических основ линейного программирования и целочисленного линейного программирования, а также развитие навыков применения теоретических знаний при решении прикладных задач.

### Задачи учебной дисциплины:

- формирование у магистрантов способностей самостоятельно разрабатывать алгоритмы решения задач и их анализировать;
- развивать и использовать инструментальные средства, информационные среды, автоматизированные системы;
- использовать математические и компьютерные методы исследований при анализе современных естественнонаучных, экономических, социально-политических процессов;
- приобретение способностей самостоятельно расширять компьютерные навыки и математические знания с дальнейшим их использованием при анализе математических моделей широкого круга прикладных задач.

Дисциплина «Моделирование и оптимизация» является дисциплиной компонента учреждения высшего образования и входит в состав модуля «Моделирование». Её преподавание тесно связано с дисциплинами «Системная динамика и агентное моделирование» и «Практическая криптография».

Освоение учебной дисциплины «Моделирование и оптимизация» должно обеспечить формирование следующих **специализированных компетенций**:

СК-1. Быть способным использовать методы теории дифференциальных уравнений при построении и анализе математических моделей реально происходящих явлений и процессов.

СК-2. Быть способным применять методы математического и компьютерного моделирования к прикладным задачам.

В результате изучения учебной дисциплины студент магистратуры должен:

#### **знать:**

- свойства решеток;
- свойства положительно определенных матриц;
- алгоритм Ленстры решения задачи целочисленного линейного программирования;

#### **уметь:**

- корректно применять изученные алгоритмы при решении практических задач;
- определять вычислительную сложность рассматриваемых задач;
- строить математическую модель прикладных задач, сводящихся к задаче линейного программирования;

#### **владеть:**

- методом эллипсоидов;
- методом ветвей и границ.

### **Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается во 2 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Моделирование и оптимизация» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 214 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 24 часа (из них: 14 часов ДО), лабораторные занятия – 24 часа (из них: 14 часов ДО), семинарские занятия – 24 часа;

– для заочной формы получения высшего образования – 16 аудиторных часов, из них лекции – 6 часов, лабораторные занятия – 6 часов, семинарские занятия – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – зачет и экзамен.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### **Тема 1. Отсечение эллипсоида.**

Определение эллипсоида. Свойства положительно определенных матриц. Объем эллипсоида. Метод глубоких отсечений (точные вычисления). Вывод формул в методе глубоких отсечений.

### **Тема 2. Метод эллипсоидов.**

Метод глубоких отсечений (вычисления с округлением чисел). Вычисление радиуса. Вычисление точности округления. Нахождение точки полиэдра методом эллипсоидов.

### **Тема 3. Округление политопов.**

Округление политопов. Метод мелких отсечений. Алгоритм построения эллипсоида для телесного политопа  $P$  из  $R^n$  такого, что  $Ell(z, n^{-2}D) \subset P \subset Ell(z, D)$ .

### **Тема 4. Приведенный базис решетки.**

Решетки. Свойства решеток. Приведенный базис. LLL-алгоритм нахождения приведенного базиса. Приведенный базис с нормой, заданной положительно определенной матрицей.

### **Тема 5. Сложность линейного программирования.**

Полиномиальность линейного программирования. Метод центральных отсечений. NP-полнота общей задачи целочисленного линейного программирования. NP-полнота близких задач. Сложность фасет, вершин и задачи соседства на выпуклой оболочке целочисленных точек.

### **Тема 6. Алгоритм Ленстры решения задачи целочисленного линейного программирования.**

Унимодулярные матрицы. Полиномиальный алгоритм Ленстры решения задачи целочисленного линейного программирования с фиксированным числом переменных.

### **Тема 7. Задача о рюкзаке.**

Задача о рюкзаке. NP-полнота задачи о рюкзаке. Быстрорастущий вектор.

### **Тема 8. Рюкзачные криптосистемы.**

Рюкзачная криптосистема Меркля-Хеллмана. Атака Шамира.

### **Тема 9. Динамическое программирование.**

Определение динамического программирования. Примеры. Применение метода динамического программирования к задаче о рюкзаке.

### **Тема 10. Метод ветвей и границ.**

Метод ветвей и границ. Применение метода ветвей и границ к задаче о рюкзаке. Сравнительный анализ метода ветвей и границ и динамического программирования.

### **Тема 11. Выбор монет при формировании платежа криптовалюты Биткоин.**

Криптовалютная пыль. Математическая модель выбора монет при формировании платежа криптовалюты Биткоин. Алгоритм выбора монет при формировании платежа криптовалюты Биткоин.

### **Тема 12. Практические задачи.**

Типичные задачи комбинаторной оптимизации, типичные задачи целочисленной оптимизации, методы построения математических моделей приложений, задача выбора маршрута, задача коммивояжёра, минимальное остовное дерево, задача о 8 ферзях. Скорость алгоритма и скорость реализации, длина кода, возможность параллельной реализации оптимизационных алгоритмов.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

### Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	<b>Моделирование и оптимизация</b>	<b>24</b>		<b>24</b>	<b>24</b>			
1.	Отсечение эллипсоида	2(ДО)			2(ДО)			Отчет по лабораторной работе с устной защитой, устный опрос, видеолекция, видеоконференция, образовательный портал БГУ
2.	Метод эллипсоидов	2(ДО)		2	2 2(ДО)			Отчет по лабораторной работе с устной защитой, устный опрос, видеолекция, видеоконференция, образовательный портал БГУ
3.	Округление политопов	2(ДО)		2	2(ДО)			Отчет по лабораторной работе с устной защитой, устный опрос, видеолекция, видеоконференция, образовательный портал БГУ
4.	Приведенный базис решетки	2(ДО)		2	2(ДО)			Отчет по лабораторной работе с устной защитой, устный опрос, видеолекция, видеоконференция,

							образовательный портал БГУ
5.	Сложность линейного программирования	2		2			Собеседование, доклад
6.	Алгоритм Ленстры решения задачи целочисленного линейного программирования	2(ДО)			2(ДО)		Отчет по лабораторной работе с устной защитой, устный опрос, видеолекция, видеоконференция, образовательный портал БГУ
7.	Задача о рюкзаке	2(ДО)		2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой, устный опрос, видеолекция, видеоконференция, образовательный портал БГУ
8.	Рюкзачные криптосистемы	2 2(ДО)		2	2 2(ДО)		Отчет по лабораторной работе с устной защитой, устный опрос, видеолекция, видеоконференция, образовательный портал БГУ
9.	Динамическое программирование	2		2	2		Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование, доклад
10.	Метод ветвей и границ	2		2	2		Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование, доклад
11.	Выбор монет при формировании платежа криптовалюты Биткоин	2		2	2 2(ДО)		Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование, доклад, образовательный портал БГУ
12.	Практические задачи			6			доклад



## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Заочная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	<b>Моделирование и оптимизация</b>	<b>6</b>		<b>4</b>	<b>6</b>			
1.	Отсечение эллипсоида	0,5			0,5			Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование
2.	Метод эллипсоидов	0,5			0,5			Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование
3.	Округление политопов	0,5			0,5			Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование
4.	Приведенный базис решетки	0,5			0,5			Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование
5.	Сложность линейного программирования	0,5			0,5			Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование
6.	Алгоритм Ленстры решения задачи целочисленного линейного	0,5			0,5			Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование

	программирования						
7.	Задача о рюкзаке	0,5			0,5		Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование
8.	Рюкзачные криптосистемы	1			1		Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование
9.	Динамическое программирование	0,5			0,5		Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование
10.	Метод ветвей и границ	0,5			0,5		Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование
11.	Выбор монет при формировании платежа криптовалюты Биткоин	0,5			0,5		Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование
12.	Практические задачи			4			доклад

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Алгоритмы: построение и анализ : [пер. с англ.] / Томас Кормен [и др.]. - 3-е изд. - Москва; Санкт-Петербург : Вильямс, 2018.
2. Vanderbei, R. Linear Programming. Foundations and Extensions. Fourth Edition. Springer. 2014.
3. Bertsimas, D. Introduction to Linear Optimization. / D. Bertsimas, J. Tsitsiklis. – Massachusetts Institute of Technology, 1997.
4. Схрейвер, А. Теория линейного и целочисленного программирования: в 2 т.: пер. с англ. Т. 1. - Москва: Мир, 1991.
5. Схрейвер, А. Теория линейного и целочисленного программирования: в 2 т.: пер. с англ. Т. 2. - Москва: Мир, 1991.
6. Маховенко, Е.Б. Теоретико-числовые методы в криптографии / Е.Б. Маховенко. – М.: Гелиос АРВ, 2006. – 320с.
7. Ашманов, С. А. Линейное программирование: учеб. пособие для студ. вузов обуч. по спец. "Прикладная математика". - Москва: Наука, Главная редакция физико-математической лит., 1981.
8. Шевченко, В.Н. Линейное и целочисленное линейное программирование / В.Н. Шевченко, Н.Ю. Золотых. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, 2004.
9. Grötschel, M. Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization / M. Grötschel, L. Lovàsz, A. Schrijver. - Springer, 1988.

### Перечень дополнительной литературы

1. Клейнберг, Д. Алгоритмы. Разработка и применение / Джон Клейнберг, Ева Тардос; [пер. с англ. Е. Матвеева]. - Санкт-Петербург [и др.] : Питер, 2018.
2. Воронов, М. Прикладная математика: технологии применения : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по естественнонаучным напр. / М. В. Воронов, В. И. Пименов, Е. Г. Суздалов. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2017.
3. Васильев, Ф. П. Линейное программирование / Ф.П.Васильев, А.Ю.Иваницкий. - М.: Факториал, 1998.
4. Лунгу, К. Н. Линейное программирование: руководство к решению задач: учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по экон. и техническим спец. / К. Н. Лунгу. - Москва: Физматлит, 2005.
5. Chvatal, V. Linear Programming / V. Chvatal. Freeman, 1983.
6. Matousek, J. Using and Understanding Linear Programming / J. Matousek, V. Gärtner. - Springer, 2006.

7. Shamir, A. A Polynomial Time Algorithm for Breaking the Basic Merkle-Hellman Cryptosystem / A. Shamir // Information Theory, IEEE Transactions. - 1984. - Vol. 30, № 5. 699-704 P.
8. Lenstra, H. W. Integer Programming with a Fixed Number of Variables / H. W. Lenstra // Mathematics of Operations Research. – 1983. – Vol. 8, № 4. – P. 538-548.
9. Lenstra, A. K., Factoring polynomials with rational coefficients / A. K. Lenstra, H. W. Jr. Lenstra, L. Lovász // Mathematische Annalen. – 1982. Vol. 261 (4). – 515–534 P.

## **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки**

Контроль работы магистранта проходит в форме собеседования, и над выполнением лабораторных работ в лаборатории и самостоятельно вне аудитории с предоставлением отчета по лабораторным работам с его устной защитой. Задания к лабораторным работам составляются согласно содержанию учебного материала. На семинарских занятиях магистранты выступают с докладами.

Зачет по дисциплине выставляется в случае сдачи всех лабораторных работ и выступления с докладом на семинарском занятии.

Экзамен по дисциплине проходит в устной или письменной форме.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- ответы на лекциях – 20 %;
- отчеты по лабораторным работам – 50 %;
- доклад на семинарском занятии – 30 %.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Весовой коэффициент текущей успеваемости – 0.4, весовой коэффициент экзаменационной оценки – 0.6.

### **Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины (эвристический, проектный, практико-ориентированный)**

При организации образовательного процесса используется *эвристический подход*, который предполагает:

- осуществление студентами лично-значимых открытий окружающего мира;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;

– индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности.

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

– освоение содержания образования через решения практических задач;

– приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;

– ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;

– использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

При организации образовательного процесса **используется метод проектного обучения**, который предполагает:

– способ организации учебной деятельности студентов, развивающий актуальные для учебной и профессиональной деятельности навыки планирования, самоорганизации, сотрудничества и предполагающий создание собственного продукта;

– приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по индивидуально заданной проблеме курса;

– выполнение домашнего задания;

– работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений, выдаваемых на лабораторных занятиях;

– работа над докладом;

– подготовка отчета по лабораторной работе.

Дистанционные занятия проводятся при помощи образовательного портала БГУ, на котором разработан курс:

<https://edummf.bsui.by/course/view.php?id=19>

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы УВО по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) <sup>1</sup>
Системная динамика и агентное моделирование	Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 5 от 30.12.2019)
Практическая криптография	Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 5 от 30.12.2019)

<sup>1</sup> При наличии предложений об изменениях в содержании учебной программы УВО.

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 201\_ г.)  
(название кафедры)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_  
(ученая степень, ученое звание)\_\_\_\_\_  
(подпись)\_\_\_\_\_  
(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_  
(ученая степень, ученое звание)\_\_\_\_\_  
(подпись)\_\_\_\_\_  
(И.О.Фамилия)