УДК 517.9

РАСШИРЕНИЯ НЕЗАМЫКАЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЗАДАЧА УМНОЖЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

А. Б. АНТОНЕВИЧ[1]**_, Ч. ДОЛИЧАНИН_**[2]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*
[2]*Нови-Пазарский университет, Вука Караджича, бб, 36300, г. Нови Пазар, Сербия*

Предложены конструкции расширений незамыкаемых операторов и приведены примеры приложений этих конструкций. Исходным объектом является отображение f, заданное на множестве $D(f) \subset X$, при этом априорный выбор множества X есть дополнительное искусственно внесенное ограничение. Основная идея построений связана с тем, что $D(f)$ можно рассматривать как подмножество в некотором множестве, более широком, чем X, и тогда область определения расширения также лежит в этом более широком множестве. Частным случаем изучаемых вопросов является задача умножения распределений (обобщенных функций), для решения которой вводятся так называемые новые обобщенные функции. Показано, что сложность этой задачи определяется незамыкаемостью исходной операции и что построение новых обобщенных функций базируется на тех же идеях, что и построение расширений незамыкаемых операторов.

Ключевые слова: расширение оператора; замкнутый оператор; умножение распределений.

Образец цитирования:
Антоневич АБ, Доличанин Ч. Расширения незамыкаемых операторов и задача умножения распределений. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;3:6–17.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-6-17

For citation:
Antonevich AB, Dolicanin C. Extensions of nonclosable operators and multiplication of distributions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;3: 6–17. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-6-17

Авторы:
Анатолий Борисович Антоневич – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета.
Чемал Доличанин – доктор математических наук; профессор отделения математических наук.

Authors:
Anatolij B. Antonevich, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of functional analysis and analytical economics, faculty of mechanics and mathematics.
antonevich@bsu.by
http://orcid.org/0000-0002-2960-9640
Cemal Dolicanin, doctor of science (mathematics); professor of mathematics.
cdolicanin@np.ac.rs
http://orcid.org/0000-0003-4830-1454

EXTENSIONS OF NONCLOSABLE OPERATORS AND MULTIPLICATION OF DISTRIBUTIONS

A. B. ANTONEVICH[a], *C. DOLICANIN*[b]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
[b]*State University of Novi Pazar, Vuka Karadzica, bb, Novi Pazar 36300, Serbia*

Corresponding author: A. B. Antonevich (antonevich@bsu.by)

In the paper some new constructions of extensions of nonclosable operators is proposed and several examples of applications are given. One of particular cases of the problem under consideration is the question on multiplication of distributions, a solution to which can be given by introduction of the so-called new generalized functions. It was demonstrated that the main obstacle for multiplication of distributions is nonclosablility of classical multiplication and the construction of new generalized functions is based on the ideas similar to that used under construction of the extension of nonclosable operators.

Keywords: extension of operator; closed operator; multiplication of distributions.

Введение

Для линейного оператора наиболее естественным расширением является так называемое замыкание, но оно существует не для всех операторов. В связи с этим в [1] был рассмотрен вопрос о том, *какой оператор может играть роль замыкания в случае незамыкаемого оператора*. В данной работе, которая есть дальнейшее развитие [1], предложена новая конструкция расширения произвольных отображений, в том числе и незамыкаемых операторов, и приведены примеры приложений этой конструкции.

Одним из частных случаев проблемы расширения отображений является задача умножения обобщенных функций (распределений). В классической теории определено умножение распределения только на гладкую функцию и доказано, что невозможно корректно задать произведение произвольных распределений [2]. Вместе с тем в приложениях возникают уравнения, в которые входят произведения распределений, и вопрос о том, какой смысл можно придать таким произведениям, продолжает привлекать внимание многих специалистов (см., например, [3–8]).

Решение задачи об умножении распределений заключается в следующем. По заданному пространству распределений E может быть построена коммутативная ассоциативная дифференциальная алгебра $G(E)$, элементы которой сохраняют часть свойств распределений и называются *новыми обобщенными функциями* или *мнемофункциями*. Такая алгебра есть расширение исходного пространства E, при построении которого происходит дробление элементов из E на более мелкие (каждому элементу u из E соответствует обширное семейство ассоциированных с ним элементов из $G(E)$) и добавление элементов, не ассоциированных с точками из E, т. е. качественно отличающихся от распределений.

В работе показано, что сложность задачи расширения операции умножения на все пространство распределений определяется незамыкаемостью исходной операции и что построение алгебр мнемофункций базируется на тех же идеях, что и построение расширений незамыкаемых операторов.

Еще одним частым случаем задачи о расширении операторов является вопрос о построении оператора в заданном функциональном пространстве, соответствующего формальному дифференциальному выражению с обобщенными коэффициентами. Особенность этой задачи заключается в том, что строится оператор, соответствующий дифференциальному выражению в целом, и при этом может быть, что отдельные слагаемые не определены. Для конкретных дифференциальных выражений с обобщенными коэффициентами такие расширения рассматривались, например, в [9; 10].

Замыкание линейного оператора

Умножение на заданное распределение u есть линейный оператор в пространстве распределений $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, определенный на всюду плотном подпространстве $C^{\infty}(\mathbb{R})$, состоящем из гладких функций [11]. Поэтому задача о задании произведения uv для распределений v, не являющихся гладкими функциями, есть частный случай классической задачи функционального анализа о построении расширений (продолжений) операторов. У неограниченного линейного оператора, определенного на всюду плотном подпространстве $X_0 \subset X$ в банаховом пространстве X и действующего в банахово пространство Y, существует много различных продолжений, и все они – неограниченные операторы. Выделяется случай, когда существует «хорошее» расширение, а именно являющееся замкнутым оператором.

Напомним, что линейный оператор A, определенный на всюду плотном подпространстве $D(A)$ в банаховом пространстве X, называется *замкнутым*, если для последовательности точек $x_n \in D(A)$ из того, что $x_n \to x \in X$ и $Ax_n \to y \in Y$, следует, что $x \in D(A)$ и $Ax = y$.

Для каждого $x \in X$ существует много последовательностей $x_n \in X_0$, для которых $x_n \to x$, но при этом последовательность Ax_n может не сходиться. Обозначим через X_A множество таких $x \in X$, что имеется хотя бы одна последовательность $x_n \in X_0$ такая, что $x_n \to x$, и при этом последовательность Ax_n также сходится. С помощью этой последовательности кажется естественным задать значение искомого расширения в точке $x \in X_A$ формулой

$$X_A \ni x \to \lim_{n\to\infty} Ax_n \in Y. \tag{1}$$

Однако в общем случае данное определение некорректно, так как правая часть (1) может зависеть от выбора последовательности x_n. Оператор, у которого предел не зависит от такого выбора, называется *замыкаемым*. Свойство замыкаемости оператора обычно формулируется как условие: из того, что $x_n \to 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$, следует, что $y = 0$. При выполнении этого условия формула (1) задает замкнутый оператор $\overline{A}$ с областью определения $D(\overline{A}) = X_A$, называемый *замыканием* оператора A.

Пример 1. Пусть $X = L_1[0, 1]$, $Y = L_1[0, 1] \oplus \mathbb{C}$. Рассмотрим оператор A с областью определения $D(A) = X_0 = C^1[0, 1] \subset L_1[0, 1]$, действующий в Y по формуле $Au = (u', u(0))$. Здесь задача о нахождении решения уравнения $Au = (f, C)$ есть вырожденный случай задачи Коши:

$$u'(t) = f(t),\ u(0) = C. \tag{2}$$

Необходимость расширения оператора связана с тем, что при заданной области определения задача (2) разрешима только для непрерывных f. Чтобы расширить множество тех $f \in L_1[0, 1]$, для которых существует решение, надо продолжить оператор на более широкую область определения.

Рассматриваемый оператор A замыкаем, область определения замыкания $\overline{A}$ есть подпространство $W_1^1[0, 1]$, состоящее из функций, представимых в виде

$$u(x) = u(0) + \int_0^x y(s)ds,\ \ y \in L_1[0, 1].$$

При таком представлении функция y называется *сильной производной* и замыкание действует по формуле $\overline{A}u = (u', u(0))$, где u' есть сильная производная.

Полезность указанной конструкции подтверждается следующим утверждением.

Предложение. *Задача Коши* $\overline{A}u = (f, C)$ *имеет, и притом единственное, решение для любой функции* $f \in L_1[0, 1]$ *и любого* C, *т. е. у оператора* $\overline{A}$ *существует ограниченный обратный, определенный на всем* $L_1[0, 1] \oplus \mathbb{C}$ *и действующий по формуле*

$$\overline{A}^{-1}(f, C) = C + \int_0^x f(s)ds. \tag{3}$$

Таким образом, особая роль замыкания в примере 1 проявляется в том, что при расширении оператора A на подпространство меньшее, чем $W_1^1[0, 1]$, не выполнено утверждение о существовании решения задачи Коши для любого $f \in L_1[0, 1]$, а при расширении оператора на подпространство более широкое, чем $W_1^1[0, 1]$, нарушается единственность решения задачи Коши.

Расширения отображений и расслоения

Сделаем несколько замечаний общего характера о расширениях отображений. Обычно говорят, что f есть отображение из множества X в множество Y, определенное на подмножестве $D(f) \subset X$, если каждому элементу $x \in D(f)$ поставлен в соответствие ровно один элемент $f(x) \in Y$. При этом *продолжением (расширением)* f называют отображение F, определенное на подмножестве $D(F) \subset X$, содержащем $D(f)$ такое, что $F(x) = f(x)$ для $x \in D(f)$.

Основная идея приведенных ниже построений связана с тем, что исходным объектом является отображение f, определенное только на $D(f) \subset X$, при этом априорный выбор множества X есть дополнительное искусственно внесенное ограничение. Заданную область определения можно рассматривать как подмножество не в X, а в более широком множестве, которому будет принадлежать и область определения расширения.Такое более широкое множество естественно возникает, если исходить из определения отображения, используемого, например, в [12].

Отношением между множествами X и Y называется любое подмножество G из декартова произведения $X \times Y$. Его область определения $D(G)$ есть проекция G на X. Отношение *функционально по x*, если из того, что $(x, y_1) \in G$, $(x, y_2) \in G$, следует, что $y_1 = y_2$.

Отображением из X в Y называется отношение $G \subset X \times Y$, функциональное по x. Иначе говоря, отображение отождествляется с его графиком при обычном понятии отображения, т. е.

$$G = G(f) = \{(x, f(x)) : x \in D(f)\} \subset X \times Y.$$

Такая точка зрения оправдана тем, что данное определение придает точный теоретико-множественный смысл выражению «поставлен в соответствие».

Условие функциональности по x означает, что проектирование $p : (x, y) \to x$ на X устанавливает биекцию между G и $D(G) = D(f)$, позволяющую отождествить эти множества. После такого отождествления областью определения можно считать само множество $G(f)$, и тогда на $G(f)$ действие отображения f задается как проектирование на вторую координату: $f : (x, y) \to y$. Представление отображения в таком виде будем называть его *нормальной формой*.

Если для заданного отображения f подмножество (т. е. отношение) $G_1 \subset X \times Y$ содержит $G(f)$ и f_1 действует как проектирование на вторую координату на G_1, то f_1 есть расширение исходного отображения f, заданного в нормальной форме.

Если X и Y – топологические пространства, то наиболее естественным и канонически определенным является продолжение на замыкание $\overline{G(f)}$.

Определение 1. *Замыканием отображения* f, действующего из топологического пространства X в топологическое пространство Y, будем называть отображение $\overline{f}$, определенное на подмножестве $\overline{G(f)} \subset X \times Y$ и действующее как проектирование на вторую координату.

Для описания возникающих соотношений удобно использовать терминологию из теории расслоенных пространств [13].

Тройка (E, B, p), где E и B есть заданные топологические пространства, $p : E \to B$ – сюръективное непрерывное отображение, называется *расслоением* с пространством расслоения E, базой B и проекцией p.

Подмножество $p^{-1}(b) \subset E$ называется *слоем над точкой* b и обозначается E_b. При этом пространство E представляется в виде объединения непересекающихся слоев. Будем говорить, что точки из слоя над b *ассоциированы с* b.

Сечением расслоения называется отображение $S : B \to E$, правое обратное к проекции, т. е. такое, что $p(S(x)) = x$ для всех $x \in B$.

Выделяется случай, когда для каждого слоя существует гомеоморфизм с некоторым пространством F, которое называют *типовым слоем*. Таких гомеоморфизмов много, причем обычно среди них нет канонически заданного.

Расслоение будем называть *векторным*, если типовой слой F является векторным пространством (стандартное определение векторного расслоения требует выполнения ряда дополнительных условий [13], но в рассматриваемых ниже вопросах существенно только указанное свойство).

Используем эту терминологию в случае, когда $G \subset X \times Y$ – произвольное отношение между топологическими пространствами. Тогда отображение p, действующее как проектирование на X, задает на G структуру расслоения над $D(G) = p(G)$, при котором слои могут быть разной структуры. С этой точки зрения график отображения $G(f)$ есть расслоение, в котором каждый слой состоит ровно из одной точки, а область определения $\overline{G(f)}$ нельзя отождествить с подмножеством исходного пространства X, так как, если замыкание графика $\overline{G(f)}$ рассматривать как расслоение, могут возникнуть слои, содержащие несколько различных точек. В этом заключается принципиальное отличие продолжения отображения в смысле определения 1 от классического.

Пример 2. Пусть комплекснозначная функция f определена на отрезке $[-1, 1]$, непрерывна при $x \neq 0$, а в точке 0 непрерывна слева и существует предел справа $f(+0)$. В этом примере замыканием f в смысле определения 1 является отображение $\tilde{f} : \overline{G(f)} \to \mathbb{C}$, действующее как проектирование на вторую координату в $[-1, 1] \times \mathbb{C}$. Если $f(+0) \neq f(0)$, то замыкание $\overline{G(f)}$ графика $G(f)$ получается присоединением к графику точки $(0, f(+0))$. Это множество, как отношение на $[-1, 1] \times \mathbb{C}$, не является функциональным по x. Если его рассматривать как расслоение над $[-1, 1]$, то слой над точкой 0 состоит из двух точек: $(0, f(0))$ и $(0, f(+0))$. Здесь проявляется эффект дробления: переход от $[-1, 1]$ к расширенной области определения $\overline{G(f)}$ заключается в том, что точка 0 распадается на две точки.

Рассматривая пример 2, можно отметить, что одно из решений вопроса о расширении области определения числовых функций содержится в теории Гельфанда коммутативных банаховых алгебр [14] и в ряде случаев переход к замыканию функций в смысле определения 1 совпадает с расширением области определения, построенным в теории Гельфанда.

Поскольку нас в первую очередь интересуют расширения линейных операторов, отметим специфику этого случая, когда рассматриваемые подмножества E в прямой сумме $X \oplus Y$ банаховых пространств являются векторными подпространствами. Тогда база расслоения $B = p(E) = D(E)$ также является векторным пространством. Кроме того, при проектировании на первую координату слой $p^{-1}(0) = \{(0, y) \in G\}$ над точкой $0 \in X$ есть векторное подпространство в $X \oplus Y$, которое естественно вкладывается в Y с помощью проектирования на вторую координату. Если $b \neq 0$, то слой $p^{-1}(b) = \{(b, y) \in E\}$ не является векторным пространством, но если выбрать точку $(b, y_0) \in p^{-1}(b)$, то отображение $p^{-1}(b) \ni (b, y) \to (0, y - y_0)$ есть биекция с векторным пространством $p^{-1}(0)$, позволяющая задать на $p^{-1}(b)$ структуру векторного пространства. Тем самым получаем, что проектирование на первую координату задает на подпространстве E структуру векторного расслоения с типовым слоем $F = p^{-1}(0)$. При этом биекция с типовым слоем не задается канонически, и поэтому именно понятие векторного расслоения адекватно описывает взаимоотношение между векторным подпространством E из $X \oplus Y$ и его проекцией B.

Замыкание незамыкаемого оператора

Перейдем к основному объекту исследования в данной работе – построению расширений незамыкаемых операторов. Одна из конструкций расширения, которое может играть роль замыкания в случае незамыкаемого оператора, была предложена в [1]. Она по существу уже содержится в конструкции классического замыкания, но несколько отличается от привычных результатов теории операторов.

На первом шаге построения замыкания рассматривается векторное пространство $\tilde{G}_A$, состоящее из последовательностей $x_n \in X_0$ таких, что x_n сходится в X и последовательность образов Ax_n сходится в Y. Две последовательности x_n и $\tilde{x}_n$ называются эквивалентными, если $x_n - \tilde{x}_n \to 0$ и $A(x_n - \tilde{x}_n) \to 0$.

Пусть G_A есть векторное пространство, состоящее из классов эквивалентных последовательностей из $\tilde{G}_A$. Иначе говоря, если ввести подпространство

$$N_0 = \{(x_n) \in \tilde{G}_A : x_n \to 0,\ Ax_n \to 0\}, \tag{4}$$

то G_A по определению есть фактор-пространство: $G_A = \tilde{G}_A / N_0$.

На пространстве G_A определен оператор $\tilde{A} : G_A \to Y$, который ставит в соответствие классу эквивалентности, содержащему последовательность x_n, предел последовательности Ax_n:

$$G_A \ni [(x_n)] \to \lim_{n \to \infty} Ax_n \in Y. \tag{5}$$

Эта часть конструкции не использует замыкаемость и применима к любому линейному оператору, что позволяет определить замыкание оператора следующим образом.

Определение 2. *Замыканием оператора A* с областью определения $X_0 \subset X$ будем называть оператор $\tilde{A}$, определенный на построенном фактор-пространстве $G_A = \tilde{G}_A / N_0$ и действующий по формуле (5).

При анализе введенного определения замыкания оператора будем исходить из геометрического смысла описанной конструкции. Покажем, что это частный случай общего определения 1.

Пусть

$$G(A) = \{(x,\ Ax) : x \in D(A)\} \subset X \oplus Y$$

есть график оператора. Тогда $\tilde{G}_A$ есть множество всех лежащих в $G(A)$ последовательностей Коши в смысле нормы из $X \oplus Y$, а пространство G_A есть пополнение графика $G(A)$ и в силу полноты $X \oplus Y$ есть его замыкание $\overline{G(A)}$. При этом оператор $\tilde{A}$ действует из $G_A = \overline{G(A)}$ в Y как проектирование на вторую координату.

Проекция подпространства $\overline{G(A)}$ на X есть введенное ранее подпространство X_A. Условие замыкаемости оператора эквивалентно тому, что подпространство $\overline{G(A)} \subset X \oplus Y$ есть линейное отношение, функциональное по x, т. е. является графиком некоторого оператора, и эквивалентно условию, что проектирование $\overline{G(A)}$ на X является инъективным отображением. Это позволяет, как и для произвольных отображений, отождествить точку из $\overline{G(A)}$ с его первой проекцией, после чего получаем классическое замыкание – оператор, определенный на подпространстве X_A в X.

В случае незамыкаемого оператора проектирование p подпространства $\overline{G(A)}$ на первую координату не является инъективным, так как подпространство $M_A = p^{-1}(0)$ отлично от нулевого. Будем называть его *мерой незамыкаемости* оператора A. Это подпространство состоит из классов эквивалентных последовательностей $x_n \in X_0$ таких, что $x_n \to 0$, $Ax_n \to y$.

Таким образом, пространство $\overline{G(A)}$ имеет структуру векторного расслоения над X_A с типовым слоем $F = M_A$ и распадается на слои $(G_A)_x = p^{-1}(x)$. Будем говорить, что элемент $g \in G$ *ассоциирован* с x, если g принадлежит слою G_x.

Если последовательность x_n из $\tilde{G}_A$ сходится к нулю в X, то ее (и соответствующий класс эквивалентности из G) естественно называть *бесконечно малым элементом*. В этой терминологии в случае замыкаемого оператора бесконечно малым является только нулевой элемент, а в случае незамыкаемого A существует ненулевое подпространство M_A, состоящее из бесконечно малых.

Как показано выше, разность двух элементов из слоя над заданной точкой $x \in X_A$ является бесконечно малым элементом, в частности если задать один элемент g из этого слоя, то слой состоит из элементов вида $g + h$, где h – бесконечно малый элемент. Если $x \in X_0$, то элемент из слоя можно задать канонически, поставив в соответствие точке x класс, содержащий стационарную последовательность $x_n = x \in X_0$. Тем самым X_0 вкладывается в G_A, а образом при этом вложении является график исходного оператора $G(A)$, и действие $\tilde{A}$ на нем совпадает с действием A.

Следовательно, $\tilde{A}$ есть частный случай расширения отображения в смысле определения 1: сначала A представляется в нормальной форме, как оператор с областью определения $G(A) \subset X \oplus Y$, действующий как проектирование на второй сомножитель, а расширение $\tilde{A}$ определено на $\overline{G(A)}$ и также действует как проектирование на второй сомножитель.

Поясним, в каком смысле построенный оператор является замкнутым, так как к нему неприменимо классическое определение.

Лемма 1. *Линейный оператор, определенный на всюду плотном подпространстве $D(B)$ в банаховом пространстве X и действующий в банахово пространство Y, замкнут тогда и только тогда, когда его область определения $D(B)$ является полным пространством относительно нормы графика*

$$\|x\|_A = \|x\|_X + \|Bx\|_Y.$$

Доказательство следует непосредственно из определений.

Согласно лемме оператор будем называть *замкнутым*, если его область определения является полным пространством относительно нормы графика.

У построенного оператора $\tilde{A}$ область определения есть полное пространство $\overline{G(A)}$, и этот оператор является замкнутым в смысле введенного определения.

Поясним, в каком смысле построенный оператор разрывен. Точке $g = (x, y) \in G$ поставим в соответствие число $q(g) = \|x\|_X$. В случае замыкаемого оператора это норма на G, которая переходит в норму на X_A при изоморфизме между G и X_A, задаваемом проекцией. Если оператор незамыкаем, то $q(g)$ есть полунорма, так как $q(g) = 0$ для элементов $g \in M_A$, т. е. ядро полунормы

$$\ker q = \{g \in G : q(g) = 0\}$$

состоит из бесконечно малых элементов.

Если $\tilde{A}$ рассматривать как оператор из (неотделимого) топологического векторного пространства (G, q) в Y, то он разрывен. Действительно, если линейный оператор B непрерывен, как отображение из некоторого пространства Z с полунормой q в Y, то при действии B ядро полунормы

$$\ker q = \{z \in Z : q(z) = 0\}$$

переходит в нуль. В исследуемом случае незамыкаемого оператора ядро полунормы есть ненулевое подпространство M_A, при действии оператора $\tilde{A}$ оно не переходит в нуль, так как биективно отображается на себя. Значит, построенный оператор разрывен.

В результате приведенных рассуждений получено следующее описание структуры пространства G_A и действия оператора $\tilde{A}$.

Теорема 1. *Пространство G_A, на котором определен оператор $\tilde{A}$, естественно реализуется как замкнутое векторное подпространство в $X \oplus Y$, являющееся замыканием графика $G(A)$; проектирование на первую координату задает на G_A структуру векторного расслоения над X_A, в котором элементы слоя отличаются на бесконечно малые. При такой реализации действие оператора $\tilde{A}$ совпадает с проектированием G_A на вторую координату в прямой сумме $X \oplus Y$, и этот оператор является замкнутым.*

Таким образом, область определения замыкания оператора получается дроблением точек из X_A: к каждой точке из X_A добавляются бесконечно малые элементы.

Пример 3. Пусть оператор A определен на $C^1[0, 1] \subset L_1[0, 1]$, действует в прямую сумму $Y = L_1[0, 1] \oplus \oplus\, \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ по формуле $Au = (u', u(0), u'(0))$. Этот оператор соответствует переопределенной задаче Коши: найти функцию $u \in C^1[0, 1]$, удовлетворяющую условиям

$$u'(x) = f(x),\ u(0) = C,\ u'(0) = C_1. \tag{6}$$

Задача (6) разрешима только для правых частей, удовлетворяющих условию $f \in C[0, 1]$ и $C_1 = f(0)$. Для таких правых частей ее решение задается формулой (3).

Как отмечалось, множество правых частей, для которых задача разрешима, увеличивается при расширении области определения оператора. Возникает естественный вопрос: можно ли расширить исходное пространство так, чтобы поставленная задача была разрешима для любой правой части из Y (подобно тому как это было сделано в примере 2)? Покажем, что положительный ответ дает замыкание оператора A в смысле определения 2.

Прежде всего обратим внимание на то, что рассматриваемый оператор незамыкаем. Действительно, последовательность

$$u_n(x) = \begin{cases} x(1 - nx)^2, & 0 \le x \le \dfrac{1}{n}, \\ 0, & x > \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

принадлежит области определения, сходится к нулю в $L_1[0, 1]$, и при этом последовательность образов Au_n имеет ненулевой предел: $u_n' \to 0$ в $L_1[0, 1]$, $u_n(0) = 0 \to 0$, но $u_n'(0) = 1 \to 1$. Мерой незамыкаемости этого оператора является одномерное подпространство $M = \{(0, 0, \xi)\} \in L_1[0, 1] \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Рассмотрим замыкание оператора A в смысле определения 2.

Пространство $\tilde{G}$ есть множество последовательностей $u_n \in C^1$ таких, что выполнены четыре условия:

i) $u_n \to u$ в $L_1[0, 1]$;

ii) $u_n' \to y$ в $L_1[0, 1]$;

iii) $u_n(0) \to \xi$;

iv) $u_n'(0) \to \eta$.

Из первых двух условий следует, что функция u абсолютно непрерывна и $u_n(0) \to u(0)$, т. е. $\xi = u(0)$. Но при этом у предельной функции u производная $u'(0)$ может не существовать и, даже если она существует, может быть, что последовательность $u_n'(0)$ не сходится к $u'(0)$.

Согласно предложенной конструкции две последовательности из $\tilde{G}$ называются *эквивалентными*, если для них все указанные выше пределы совпадают, пространство G_A по определению есть фактор-пространство по этому отношению эквивалентности.

Указанное отношение эквивалентности содержит дополнительное условие по сравнению с отношением эквивалентности из примера 2. В результате каждый класс эквивалентности, построенный в примере 2, содержит много разных новых классов эквивалентности. Именно поэтому возникает расслоение – каждой функции $u \in W_1^1[0, 1]$ соответствует семейство элементов пространства G_A, которое естественно параметризуется числом η и имеет структуру одномерного векторного пространства.

Действительно, каждый такой класс эквивалентности $\tilde{u} = [(u_n)]$ состоит из последовательностей непрерывно дифференцируемых функций u_n, сходящихся к абсолютно непрерывной функции u специальным образом. Он задается функцией u и числом $\eta = \lim u_n'(0)$, которое будем интерпретировать как значение производной $\tilde{u}$ в точке 0 и обозначать $\tilde{u}'(0)$. Построенное пространство обозначим $\widetilde{W_1^1[0, 1]}$, которое согласно сказанному является векторным расслоением над $W_1^1[0, 1]$.

Таким образом, элемент $[(u_n)]$ из $\widetilde{W_1^1[0, 1]}$ не определяется однозначно абсолютно непрерывной функцией u из условия i), а «помнит» о способе своего возникновения из непрерывно дифференцируемых функций, а именно сохраняет информацию о поведении значений $u_n'(0)$. Это поясняет смысл термина *мнемофункция* (от греч. $\mu\nu\acute{\eta}\mu\eta$ – память), используемого для аналогичных объектов, возникающих при построении расширений пространств распределений. Оператор $\tilde{A}$ действует по формуле, внешне такой же, как формула исходного оператора: $\tilde{A}\tilde{u} = (\tilde{u}', \tilde{u}(0), \tilde{u}'(0))$, где $\tilde{u}'$ есть сильная производная от u. Здесь принципиально новым является то, что на построенном пространстве заданы величины $\tilde{u}'(0)$, которые не определены на $W_1^1[0, 1]$.

Для пояснения естественности введения пространства $\widetilde{W_1^1[0, 1]}$ отметим, что оно возникает при рассмотрении так называемых сингулярно возмущенных задач. Примером может служить задача Коши

$$\frac{1}{n}u''(x) + u'(x) = f(x),\ u(0) = C,\ u'(0) = C_1 \tag{7}$$

для уравнения с малым параметром при второй производной, где дифференцирование есть сильная производная.

Пусть u_n – решения задачи (7). Эта последовательность состоит из функций, производные которых абсолютно непрерывны, и сходится к абсолютно непрерывной функции u, являющейся решением задачи Коши (2). При этом $u_n'(0) = C_1$ и, в частности, сходятся к C_1.

Таким образом, при любых $(f, C, C_1) \in Y$ последовательность u_n задает элемент $\tilde{u}$ построенного пространства $\widetilde{W_1^1[0, 1]}$, являющийся решением задачи (7). При другом значении C_1 последовательность решений также сходится к решению задачи (2), но эти последовательности не нужно отождествлять, так как они по-разному сходятся к u и задают разные элементы из $\widetilde{W_1^1[0, 1]}$. Из сказанного вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *В построенном расширенном пространстве* $\widetilde{W_1^1[0, 1]}$ *решение переопределенной задачи Коши (6) существует и единственно при любой правой части* $(f, C, C_1) \in Y$.

Расширенное замыкание линейного оператора

Конструкция замыкания задает расширение оператора, определенное на элементах некоторого векторного расслоения над частью пространства X. Естественно возникает задача о задании расширения оператора на расширение всего пространства X.

Опишем одно из решений этой задачи, в котором наряду с расширением начального пространства X происходит расширение и финального пространства Y. Оно основано на отказе от требования сходимости последовательностей Ax_n.

Пусть $\hat{X}$ есть векторное пространство, состоящее из всех последовательностей Коши $x_n \in X_0$. Построим фактор-пространство $\hat{G}^* = \hat{G}/\hat{G}_0$, где $\hat{G}_0$ есть подпространство (4). Аналогично предыдущему построенное пространство $\hat{G}^*$ является векторным расслоением с типовым слоем M_A, но уже над всем X.

Пусть $\hat{Y}$ есть пространство всех последовательностей (y_n) в Y и пусть

$$Y^* = \hat{Y}/\hat{Y}_0, \text{ где } \hat{Y}_0 = \{(y_n) \in Y : y_n \to 0\}.$$

Заметим, что Y^* является расширением исходного пространства Y, так как последнее естественно вкладывается в Y^*: точке $y \in Y$ ставится в соответствие класс эквивалентности, состоящий из последовательностей, сходящихся к y.

Определение 3. *Расширенным замыканием оператора A* будем называть оператор $\hat{A}$, действующий из векторного расслоения $\hat{G}^*$ над X в расширенное пространство Y^* по формуле

$$\hat{A}([x_n, Ax_n]) = [(Ax_n)] \in Y^*.$$

В конкретных приложениях естественны модификации предложенной конструкции, которые определяются постановкой исходной задачи. Например, бывает более подходящим рассмотрение фактор-пространства $\tilde{G}_A/N$ по подпространству, меньшему N_0.

Другая модификация нужна в случае, когда исходный оператор A определен на подпространстве $X_0 \subset X$ и действует в X. Тогда можно модифицировать конструкцию так, чтобы расширение оператора также действовало из некоторого расширенного пространства в себя.

Подводя итог сказанному, можно заключить, что расширенное замыкание действует в новых более широких пространствах, построение которых включает два типа преобразований:

• дробление начального пространства X, при котором точке $x \in X$ соответствует слой над x – обширное семейство элементов из нового пространства, ассоциированных с x и отличающихся друг от друга на бесконечно малые;

• добавление к финальному пространству Y новых идеальных элементов, не ассоциированных с элементами исходного пространства.

Отметим, что описанные конструкции есть частный случай широко распространенного метода построения новых пространств: сначала задается некоторое пространство последовательностей из исходного пространства, а искомое пространство получается из него с помощью специального отношения эквивалентности. В качестве примеров расширений, полученных только добавлением новых идеальных элементов, можно указать пополнение нормированного пространства и так называемый секвенциальный подход к построению обобщенных функций, описанный в [15].

Наиболее известным примером расширения пространств, при котором наряду с добавлением качественно новых идеальных элементов происходит дробление точек исходного пространства, является нестандартное расширение поля $\mathbb{R}$ [16].

Напомним описание одного из нестандартных расширений поля $\mathbb{R}$ и покажем, что его построение аналогично рассмотренным выше конструкциям, тем самым еще раз подтвердив их содержательность.

Пусть $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ есть алгебра, состоящая из всех числовых последовательностей (x_n), при этом $\mathbb{R}$ вкладывается в эту алгебру с помощью постоянных последовательностей. *Нестандартное расширение* $\mathbb{R}$ определяется как фактор-пространство $\mathbb{R}^* = \mathbb{Z}/J$ по некоторому максимальному идеалу. Замечательные свойства построенного множества заключаются в том, что $\mathbb{R}^*$ есть линейно упорядоченное поле. При этом появляются бесконечно малые и бесконечно большие элементы: $\gamma \in \mathbb{R}^*$ является *бесконечно малым*, если $-h \prec \gamma \prec h$ для любого положительного $h \in \mathbb{R}$, *бесконечно большие* элементы могут быть описаны как обратные к бесконечно малым.

Выделяется подмножество $\bar{\mathbb{R}}$, состоящее из конечных нестандартных чисел, т. е. представимых в виде суммы вещественного числа и бесконечно малого.

Таким образом, переход от $\mathbb{R}$ к $\mathbb{R}^*$ заключается в добавлении бесконечно больших величин и дроблении точек из $\mathbb{R}$ с помощью введения бесконечно малых. При этом подмножество $\bar{\mathbb{R}}$ имеет структуру векторного расслоения над $\mathbb{R}$, в котором типовым слоем является пространство бесконечно малых.

Оператор умножения на распределение

Оператор U, действующий как умножение на заданное распределение u, обычно незамыкаем, что и определяет сложности, связанные с заданием умножения в пространстве распределений.

К таким операторам U применимы описанные выше конструкции. Для примера рассмотрим замыкание оператора U, действующего как умножение на функцию Хевисайда:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ 1, \ x > 0. \end{cases}$$

Лемма 2. *Оператор U умножения на Θ незамыкаем в пространстве распределений. Мерой его незамыкаемости M_U является подпространство, состоящее из линейных комбинаций δ-функции и ее производных.*

Произведение $\Theta\delta$ встречается в ряде задач, но это формальное выражение, которое не определено в теории распределений и в силу незамыкаемости оператора умножения на Θ не может быть задано каноническим образом. Согласно описанной конструкции замыкание оператора U определено на векторном расслоении G_Θ, и в этом смысле умножение на Θ задано на точках ν из слоя над точкой δ в этом расслоении. Рассмотрим, как устроен данный слой и какие значения может принимать произведение $\Theta\nu$ для разных ν.

Возьмем функцию $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ такую, что $\operatorname{supp}\gamma \in (-1, 1)$ и выполняется

$$\int \gamma(x)dx = 1.$$

Рассмотрим две последовательности гладких функций: $\gamma_n(x) = n\gamma(nx)$ и $h_n(x) = n\gamma(n(x-1)) - n\gamma(n(x+1))$. Обозначим

$$a(\gamma) = \int_0^\infty \gamma(x)dx.$$

Теорема 3. *Пусть G_Θ есть векторное расслоение, построенное по оператору умножения на Θ. Слой G_δ над точкой δ состоит из классов эквивалентности ν, порожденных последовательностями гладких функций вида*

$$\nu_n = \gamma_n + \sum_{k=0}^{m} C_k h_n^{(k)}.$$

При этом каждая такая последовательность задает свой класс эквивалентности и действие замыкания оператора выражается формулой

$$\tilde{\Theta}\nu = \big(a(\gamma) + C_0\big)\delta + \sum_{k=1}^{m} C_k \delta^{(k)}.$$

Произведение $\Theta\delta'$ также не определено в теории распределений. Для δ' стандартные аппроксимирующие последовательности имеют вид

$$w_n(x) = n^2\gamma'(nx).$$

Для таких последовательностей предел произведения Θw_n, как правило, не существует, поэтому в общем случае последовательность w_n не порождает точку из области определения замыкания оператора, но порождает точку из области определения расширенного замыкания. При этом последовательность произведений Θw_n в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ведет себя как δ-функция с бесконечно большим коэффициентом и задает бесконечно большой элемент из расширенного пространства.

Дальнейшее развитие изложенных идей приводит к построению алгебр мнемофункций, в которых определено умножение на любой элемент. Опишем для примера предложенную Ю. В. Егоровым в [6] конструкцию наиболее простой из таких алгебр, укладывающуюся в описанную схему построения расширений.

Пусть $\widetilde{C^\infty(\mathbb{R})}$ есть алгебра, состоящая из всех последовательностей бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, и пусть

$$J = \Big\{ (f_n) \in \widetilde{C^\infty(\mathbb{R})} : \forall a > 0 \ \exists N \text{ такое, что } f_n(x) = 0 \text{ для всех } n \ge N \text{ и } x \in [-a, a] \Big\}.$$

Подмножество J является идеалом в $\widetilde{C^\infty(\mathbb{R})}$. *Алгебра новых обобщенных функций по Егорову* определяется как фактор-алгебра

$$G_E := \widetilde{C^\infty(\mathbb{R})}/J.$$

Положим G_a – подпространство в G_E, порожденное последовательностями, сходящимися в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, и F – подпространство в G_E, порожденное бесконечно малыми, т. е. последовательностями, сходящимися к нулю. Тогда отображение p: $G_a \ni \big[(f_n)\big] \to \lim f_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ задает на G_a структуру векторного расслоения над $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ с типовым слоем F, состоящим из бесконечно малых. При этом в G_E есть обширное множество идеальных элементов, не ассоциированных с распределениями.

Заключение

В статье рассмотрены конструкции новых пространств, возникающих при построении расширений отображений. Поясним естественность введения таких пространств с точки зрения приложений.

Пусть изучается эксперимент по воздействию на некоторую систему. Обычно говорят, что Z есть множество состояний системы, а W есть множество результатов воздействия, если каждому элементу из Z соответствует однозначно определенный результат воздействия, принадлежащий W. В первоначальной модели предполагается, что состояния системы описываются элементами пространства X, а результаты воздействия – элементами пространства Y, а именно для некоторых «простых» состояний (из всюду плотного подпространства $X_0 = D(A)$) задан оператор A, определяющий результат воздействия на систему: при состоянии $x \in X_0$ получаем на выходе $Ax \in Y$.

Задача заключается в описании результата воздействия для более сложных состояний системы, т. е. построении расширений оператора A.

Для каждой точки $x \in X$ существует последовательность $x_n \in X_0$, сходящаяся к x, т. е. x есть предел простых состояний. С такой последовательностью связана последовательность результатов эксперимента $Ax_n \in Y$ и ее предел y, если он существует. Если оператор A незамыкаемый, то по элементу $x \in X$ нельзя однозначно определить y. Это означает, что в действительности элемент x не задает состояние системы, а для получения однозначного ответа о результате нужна дополнительная информация о том, как именно этот x получен из простых состояний. Иначе говоря, для рассматриваемых систем происходит уточнение постановки задачи – в новой модели состояние системы описывается одним из ассоциированных с x элементов расширенного пространства.

С этой точки зрения переход к расширению $\hat{Y}$ пространства Y требуется в ситуации, когда для уточненного состояния, определяемого последовательностью $x_n \to x$, последовательность Ax_n не сходится в Y и результат эксперимента не задается точкой из Y, но он описывается классом эквивалентности, содержащим последовательность Ax_n. Иными словами, множеством результатов является пространство Y^*.

В частности, описанная ситуация имеет место в задачах, содержащих произведение обобщенных функций. В первоначальной модели явления считается, что состояния системы задаются распределениями, в уточненной модели состояния системы и результаты экспериментов описываются мнемофункциями, а результат воздействия – расширенным замыканием исходного оператора.

Библиографические ссылки

1. Burachewski A, Radyno Ya, Antonevich A. On closability of nonclosable operators. *Panamerican Mathematical Journal.* 1997; 7(4):37–51.

2. Schwartz L. Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* 1954;239:847–848.

3. Иванов ВК. Гиперраспределения и умножение распределений Шварца. *Доклады АН СССР.* 1972;204(5):1045–1048.

4. Colombeau JF, editor. *New generalized functions and multiplication of distributions.* Amsterdam: North-Holland; 1984. 375 p. (North-Holland Mathematics Studies; volume 84).

5. Rosinger EE. *Generalized solutions of nonlinear partial differential equations.* Amsterdam: Elsevier Science; 1987. 409 p. (North-Holland Mathematics Studies; volume 146).

6. Егоров ЮВ. К теории обобщенных функций. *Успехи математических наук.* 1990;45(5):3–40.

7. Oberguggenberger M. *Multiplication of distributions and application to partial differential equations (Pitman Research Notes in Mathematics).* Harlow: Longman Higher Education; 1992. 336 p.

8. Rosinger EE. *Singularities and differential algebras of generalized functions: a basic dichotomic shealf theoretic singularity test.* [S. l.]: Lambert Academic Publishing; 2013. 192 p.

9. Кот МГ. Асимптотика собственных значений операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с δ-образными коэффициентами. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2017;1:4–10.

10. Шкадинская ЕВ. Об уравнениях, содержащих производную дельта-функции. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2017;3:19–26.

11. Владимиров ВС. *Обобщенные функции в математической физике.* Москва: Наука; 1979.

12. Дьедонне Ж. *Основы современного анализа.* Москва: Мир; 1964.

13. Мищенко АС. *Векторные расслоения и их применения.* Москва: Наука; 1984.

14. Бурбаки Н. *Спектральная теория.* Москва: Мир; 1973.

15. Антосик П, Микусинский Я, Сикорский Р. *Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход.* Москва: Мир; 1976.

16. Девис М. *Прикладной нестандартный анализ.* Москва: Мир; 1980.

References

1. Burachewski A, Radyno Ya, Antonevich A. On closability of nonclosable operators. *Panamerican Mathematical Journal.* 1997; 7(4):37–51.

2. Schwartz L. Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* 1954;239:847–848.

3. Ivanov VK. [Hyperdistributions and the multiplication of Schwartz distributions]. *Doklady AN SSSR.* 1972;204(5):1045–1048. Russian.

4. Colombeau JF, editor. *New generalized functions and multiplication of distributions.* Amsterdam: North-Holland; 1984. 375 p. (North-Holland Mathematics Studies; volume 84).

5. Rosinger EE. *Generalized solutions of nonlinear partial differential equations.* Amsterdam: Elsevier Science; 1987. 409 p. (North-Holland Mathematics Studies; volume 146).

6. Egorov YuV. [A contribution to the theory of generalized functions]. *Uspekhi matematicheskikh nauk.* 1990;45(5):3–40. Russian.

7. Oberguggenberger M. *Multiplication of distributions and application to partial differential equations (Pitman Research Notes in Mathematics).* Harlow: Longman Higher Education; 1992. 336 p.

8. Rosinger EE. *Singularities and differential algebras of generalized functions: a basic dichotomic shealf theoretic singularity test.* [S. l.]: Lambert Academic Publishing; 2013. 192 p.

9. Kot MG. Asymptotics of the eigenvalues of approximating differential equations with δ-different coefficients. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2017;1:4–10. Russian.

10. Shkadzinskaya AV. On equations containing derivative of the delta-function. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2017;3:19–26. Russian.

11. Vladimirov VS. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow: Nauka; 1979. Russian.

12. Dieudonne J. *Foundations of modern analysis.* New York: Academic Press; 1960.

Russian edition: Dieudonne J. *Osnovy sovremennogo analiza*. Moscow: Mir; 1964.

13. Mishchenko AS. *Vektornye rassloeniya i ikh primeneniya* [Vector bundles and their applications]. Moscow: Nauka; 1984. Russian.

14. Bourbaki N. *Theories Spectrales. Chapitres 1 et 2*. Paris: Hermann; 1967.

Russian edition: Burbaki N. *Spektral'naya teoriya.* Moscow: Mir; 1973.

15. Antosik P, Mikusinski Ja, Sikorski R. *Theory of distributions. The sequential approach.* Amsterdam: Elsevier Scientific; 1973.

Russian edition: Antosik P, Mikusinskii Ya, Sikorskii R. *Teoriya obobshchennykh funktsii. Sekventsial'nyi podkhod.* Moscow: Mir; 1976.

16. Davis M. *Applied nonstandard analysis.* New York: Wiley; 1977.

Russian edition: Devis M. *Prikladnoi nestandartnyi analiz.* Moscow: Mir; 1980.

Статья поступила в редколлегию 22.09.2019.
Received by editorial board 22.09.2019.