

Белорусский государственный университет

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе и  
образовательным инновациям

 С.И. Чуприс  
«04» декабря 2019 г.

Регистрационный № УД- 4688 /уч.

Обобщенные функции

---

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 80 03 Математика и компьютерные науки

*Профилизация: Математика*

2019 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1- 31 80 03-2019 и учебных планов рег. №G31-017/уч. , рег. № G31з-018/уч. от 11.04.2019.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**Антоневич Анатолий Борисович**, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**Пыжкова Ольга Николаевна**, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент;

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики (протокол № 5 от 27.11.2019);

Научно-методическим Советом БГУ

(протокол № 2 от 03.12.2019)

Зав. кафедрой ФАиАЭ, профессор \_\_\_\_\_ А.В. Лебедев

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Теория обобщенных функций была создана в середине XX века из потребностей физики, теории уравнений с частными производными, теории импульсных процессов и других исследований. Теоретической базой этой теории являются локально выпуклые топологические векторные пространства.

### **Цели и задачи учебной дисциплины.**

#### **Цели учебной дисциплины:**

– ознакомление магистрантов с основными понятиями теории обобщенных функций, демонстрация новых возможностей, которые открываются при применении обобщенных функций подготовка специалистов, способных использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований.

#### **Задачи учебной дисциплины:**

– углубленное ознакомление магистрантов с основными принципами теории обобщенных функций и примерами их приложений;

– дальнейшее формирование у магистрантов навыков абстрактного математического мышления и умения применять его в конкретных задачах, повышение их математической культуры

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием (магистра).

Учебная дисциплина относится к модулю «Гармонический анализ и дифференциальные уравнения» компонент учреждения высшего образования.

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Пространства Соболева», «Теория операторов», «Уравнения с частными производными», «Вариационное исчисление», «Методы численного анализа», «Дифференциальные уравнения в приложениях».

#### **Требования к компетенциям.**

Освоение учебной дисциплины «Обобщенные функции» должно обеспечить формирование следующих **специализированных компетенций:**

СК-2. Быть способным использовать методы компьютерного моделирования на основе современных методик численного анализа прикладных дифференциальных задач;

СК-5. Быть способным применять современные методы гармонического анализа и дифференциальных уравнений в задачах естественных наук и экономики.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

#### **знать:**

— определение обобщенной функции;

- сходимость последовательностей обобщенных функций;
- определение производной обобщенной функции;
- произведение обобщенной функции на гладкую функцию;
- определение свертки обобщенной функции;
- основные примеры сингулярных обобщенных функций;

**уметь:**

- проверять сходимость последовательностей обобщенных функций;
- находить производные заданных обобщенных функций;
- строить фундаментальные решения для простейших дифференциальных уравнений;

**владеть:**

- основными понятиями теории обобщенных функций;
- действиями с обобщенными функциями.

**Структура учебной дисциплины.**

Дисциплина изучается во 2 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Обобщенные функции» отведено 108 часов, в том числе:

- для очной формы получения высшего образования – 36 аудиторных часа, из них: лекции – 18 часов, лабораторные занятия – 14 часов, управляемая самостоятельная работа 4 часа;

- для заочной формы получения высшего образования – 8 аудиторных часов, из них: лекции – 4 часа, лабораторные занятия – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – экзамен.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### **Тема 1. Пространство основных функций.**

Сходимость, операции дифференцирования и умножения на гладкую функцию. Топология пространства основных функций.

### **Тема 2. Пространство обобщенных функций.**

Определение обобщенной функции. Сходимость в пространстве обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций. Дифференцирование разрывных функций. Умножение на гладкие функции. Базовые обобщенные функции  $x^\alpha$ ,  $\delta(x)$ .

### **Тема 3. Свертка обобщенных функций.**

Фундаментальные решения для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

### **Тема 4. Топологические векторные пространства.**

Локально выпуклые топологические векторные пространства. Топология в пространствах основных и обобщенных функций.

### **Тема 5. Преобразование Фурье обобщенных функций.**

Пространство Шварца умеренно растущих распределений. Преобразование Фурье. Построение фундаментальных решений с помощью преобразования Фурье.

### **Тема 6. Периодические обобщенные функции.**

Пространства основных периодических функций. Периодические обобщенные функции. Ряды Фурье

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов						Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	Количество часов УСР	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Пространство основных функций.	2			2			Отчет по самостоятельной работе с устной защитой, собеседование
2	Пространство обобщенных функций.	2			2			Отчет по самостоятельной работе с устной защитой, собеседование
3	Свертка обобщенных функций.	2			2		1	Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование
4	Топологические векторные пространства.	4			2		1	Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование
5	Преобразование Фурье обобщенных функций.	4			2		1	Отчет по лабораторной работе с устной защитой, собеседование
6	Периодические обобщенные функции.	4			4		1	Отчет по лабораторным работам с устной защитой, собеседование
	<b>ВСЕГО</b>	<b>18</b>			<b>14</b>		<b>4</b>	

### Заочная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Пространство основных функций.	1			1		Отчет по самостоятельной работе с устной защитой, собеседование
2	Пространство обобщенных функций.	1			1		Отчет по самостоятельной работе с устной защитой, собеседование
3	Свертка обобщенных функций.						
4	Топологические векторные пространства.	1			1		Отчет по самостоятельной работе с устной защитой, собеседование
5	Преобразование Фурье обобщенных функций.						
6	Периодические обобщенные функции.	1			1		Отчет по самостоятельной работе с устной защитой, собеседование
	<b>Всего</b>	<b>4</b>			<b>4</b>		

## **ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**

### **Перечень основной литературы**

1. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике/ М. Наука. 1976.– 280с.
2. Шилов Ф. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М. Наука/ 1965.
3. Антоневи́ч А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения.; БГУ. - Минск: БГУ, 2013. - 511 с.

### **Перечень дополнительной литературы**

1. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики : учебник / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов – М., : Физ-мат. литература, 2000. – 400 с.
2. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. 4-е изд., перераб. – М., : Наука, 1976. – 544 с.
3. Антоневи́ч, А.Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учеб. пособие для мат. спец. вузов / А.Б. Антоневи́ч, П.Н. Князев, Я.В. Радыно; Под ред. С.Г. Крейна. – Минск : Выш. школа, 1978. – 208 с.
4. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике : учеб. пособие / В.С. Владимиров. 2-е изд., перераб. и доп. – М., : Физ-мат. литература, 1979. – 320 с.



## **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки**

Формой текущей аттестации по дисциплине «Обобщенные функции» учебным планом предусмотрен экзамен.

Контроль работы магистранта проходит в форме собеседования, выполнения самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории, а также самостоятельной работы вне аудитории с предоставлением отчета с его устной защитой. Задания к самостоятельным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Экзамен по дисциплине проходит в устной или письменной форме.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, предусматривающая использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- отчеты по самостоятельной работе с устной защитой– 50 %;
- отчеты по лабораторным работам с устной защитой– 50%.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов Вес оценка по текущей успеваемости составляет 30 %, экзаменационная оценка –70 %.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь №53 от 29.05.2012 г.).

2. ПОЛОЖЕНИЕ о рейтинговой системе оценки знаний студентов по дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ № 382-ОД от 18.08.2015 г. (с изменениями, согласно приказу 491-ОД от 29.08.2018г.)).

3. Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 г. № 21-04-1/105).

## Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

### Тема 3. Свертка обобщенных функций.

Доказать равенства:

**Задание 1.** Показать:  $\langle \delta^{(m)}(x - x_0), \varphi(x) \rangle = (-1)^m \varphi^{(m)}(x_0)$ ,  $m \geq 1$

**Задание 2.** Показать, что  $\Theta' = \delta$ .

*Форма контроля – собеседование.*

### Тема 4. Топологические векторные пространства.

Доказать утверждения:

**Задание 1.** Если  $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\cup_{k=1}^n (a_k, a_{k+1}))$ , где  $R = (-\infty; a_1) \cup \dots \cup$

$(a_k; a_{k+1}) \cup \dots \cup (a_{n+1}; +\infty)$ .  $a_k$  – точки непрерывности или точки разрыва 1 рода,

$f'$  – локально интегрируема, то  $Df = f' + \sum_{k=1}^n h_k \cdot \delta(x - a_k)$ , где

$h_k$  – скачок функции  $f$  в точке  $a_k$ .

**Задание 2.** Показать, что в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ :

$p(x)\delta'(x) = -p'(0)\delta(x) + p(0)\delta'(x)$ , где  $p(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

*Форма контроля – собеседование.*

### Тема 5. Преобразование Фурье обобщенных функций.

**Задание 1.** Построить фундаментальные решения для операторов  $\frac{d^n u}{dx^n}$

**Задание 2.** Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Выяснить, есть ли среди последовательностей, сходящиеся в  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ?

а)  $\frac{1}{k} \varphi(kx)$ ,  $k = 1, 2, \dots$

б)  $\frac{1}{k} \varphi(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$

в)  $\frac{1}{k} \varphi(\frac{x}{k})$ ,  $k = 1, 2, \dots$

*Форма контроля – собеседование.*

### Тема 6. Периодические обобщенные функции.

Доказать равенства:

**Задание 1.**

$\frac{d}{dx} \ln|x| = \mathcal{P} \frac{1}{x}$ , где  $\mathcal{P} \frac{1}{x}$  – функционал, действующий по формуле

$$\langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = Vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx),$$

**Задание 2.** Показать, что в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ :

$(\Theta(x)p(x))' = \delta(x)p(0) + \Theta(x)p'(0)$ , где  $p(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

*Форма контроля – собеседование.*

## Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса могут быть использованы следующие подходы и методы: *эвристический подход, практико-ориентированный подход, методы и приемы развития критического мышления, метод группового обучения* которые предполагают:

- осуществление студентами значимых открытий;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач;
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;
- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;
- приобретение студентом знаний и умений для решения практических задач;
- анализ ситуации, используя профессиональные знания, собственный опыт, дополнительную литературу и иные источники;
- способ организации учебной деятельности студентов, развивающий актуальные для учебной и профессиональной деятельности навыки планирования, самоорганизации, сотрудничества и предполагающий создание собственного продукта;
- приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.

Все результаты и достижения группируются на основе основных видов деятельности студентов: учебной, научно-исследовательской и иной. Методы обеспечивают появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения. Также они представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления и являются организацией учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

## Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся, кроме подготовки к экзамену, подготовка к зачету

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
- подготовка к практическим занятиям;
- научно-исследовательские работы;
- анализ фактических материалов по заданной теме;
- подготовка и написание рефератов, докладов, эссе и презентаций на заданные темы;
- подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

### Примерный перечень заданий для самостоятельной работы

#### Тема 1. Пространство основных функций.

**Задание 1.** В пространстве  $D'(\mathbb{R}^1)$  вычислить пределы обобщенных функций  $f_t$  при  $t \rightarrow \infty$

$$1) f_t = \frac{e^{ixt}}{x - i0}, 2) f_t = \frac{e^{-ixt}}{x + i0}, 3) f_t = t^m e^{ixt}, m \geq 0.$$

**Задание 2 .** Найти единственные в пространстве  $D'_+$  фундаментальные решения следующих дифференциальных операторов

$$1) \frac{d^2}{dx^2} + 4 \frac{d}{dx}, 2) \frac{d^3}{dx^3} - a^3, 3) \frac{d^4}{dx^4} - 2 \frac{d^2}{dx^2} + 1$$

#### Тема 2. Пространство обобщенных функций.

**Задание 1.** Найти производную функций:

$$а) y(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad б) y(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

**Задание 2** Вычислить:  $D\Theta(-x)$

**Примерный перечень вопросов к экзамену  
по дисциплине «Обобщенные функции»**

1. Пространство основных функций.
2. Сходимость, операции дифференцирования и умножения на гладкую функцию.
3. Топология пространства основных функций.
4. Пространство обобщенных функций.
5. Определение обобщенной функции. Сходимость в пространстве обобщенных функций.
6. Дифференцирование обобщенных функций. Дифференцирование разрывных функций.
7. Умножение на гладкие функции. Базовые обобщенные функции  $x^\alpha$ .
8. Свертка обобщенных функций.
9. Фундаментальные решения для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
10. Топологические векторные пространства.
11. Локально выпуклые топологические векторные пространства. Топология в пространствах основных и обобщенных функций.
12. Преобразование Фурье обобщенных функций.
13. Пространство Шварца умеренно растущих распределений.
14. Преобразование Фурье. Построение фундаментальных решений с помощью преобразования Фурье.
15. Периодические обобщенные функции.
16. Пространства основных периодических функций.
17. Периодические обобщенные функции. Ряды Фурье

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Уравнения с частными производными	Математической кибернетики	нет	Изменений не требуется, протокол № 5 от 27.11.2019
2. Вариационное исчисление	Функционального анализа и аналитической экономики	нет	Изменений не требуется, протокол № 5 от 27.11.2019
3. Теория принятия решений	Функционального анализа и аналитической экономики	нет	Изменений не требуется, протокол № 5 от 27.11.2019
4. Методы численного анализа	Веб-технологий и компьютерного моделирования	нет	Изменений не требуется, протокол № 5 от 27.11.2019
5. Пространства Соболева	Теории функций	нет	Изменений не требуется, протокол № 5 от 27.11.2019

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО  
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_