Т. А. Петриковец,
студент I курса Института бизнеса БГУ
Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
Д. А. Малинин

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Статистическая игра является специфическим видом матричных игр. В них один из игроков является нейтральным, т. е. не ведет активного противодействия другому участнику игры, но хранит втайне свою стратегию. Обычно такого игрока называют «природой», окружающей средой или обстановкой. «Природа» коварна, но не злонамеренна, она не стремится использовать в своих интересах ошибки противника или информацию о его стратегии. Игрока с природой часто называют статистиком.

Статистические игры-игры, в которых один участник – «природа», а другой – лицо, принимающее решение, или, в которых один из игроков действует неосознанно, а в соответствии с определенными законами.

На примере следующей задачи подробно рассмотрим то, как это работает и как может помочь в реальном мире.

Условие задачи. Допустим, что Вы являетесь владельцем кафе, и надо принять решение: продавать холодные (А1) или горячие напитки (А2). Погода достаточно влияет на количество продаж каждого напитка. Погода может быть жаркой, нормальной или холодной, влияние других факторов не учитываем. Известна цена C_i одного напитка (A_i), а также условное количество продаж каждого продукта A_i, $i = 1, 2$ h_{i1} – продажи, когда жарко, h_{i2} – продажи при нормальной погоде, h_{i3} – продажи при холодной погоде. Вероятности жаркой, нормальной и холодной погоды составляют q_1, q_2, q_3.

Требуется:

1. Придать описанной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу.

2. Использовать критерии Бейеса, Вальда, Сэвиджа и Гурвица (величина параметра «λ» для критерия Гурвица задается). Таким образом, выясним, какую продукцию следует продавать, чтобы обеспечить максимизацию дохода.

$$c_1 = 4;\ c_2 = 5;\ h_{11} = 2;\ h_{12} = 4;\ h_{13} = 5;\ h_{21} = 4;\ h_{22} = 3;\ h_{23} = 1.$$
$$q_1 = 0{,}3;\ q_2 = 0{,}4;\ q_3 = 0{,}3;\ a = 0{,}8.$$

Решение:

1. **Игровая схема.** Данная игра является парной и статистической, в ней участников двое: первый – владелец магазина. Разберем его возможные стратегии:

Стратегия А1 – продавать холодные напитки, стратегия А2 – продавать горячие напитки

Второй игрок, в данном случае, – природа, под которой мы подразумеваем совокупность всех внешних условий, которые влияют на продажу. Стратегии второго игрока следующие:

– первая стратегия (П1) – жаркая погода;

– вторая стратегия (П2) – нормальная погода;

– третья стратегия (П3) – холодная погода.

Платежная матрица. Составляем платежную матрицу. Элементы этой матрицы – цена реализации продукции. Результаты расчета показывает табл. 1.

Таблица 1

Платежная матрица

	П1	П2	П3
А1	$4 \cdot 2 = 8$	$4 \cdot 4 = 16$	$4 \cdot 5 = 20$
А2	$5 \cdot 4 = 20$	$5 \cdot 3 = 15$	$5 \cdot 1 = 5$

2. **Критерий Байеса.** При известных вероятностях воспользуемся критерием Байеса. Надо найти средние выигрыши:

$$A1 = 8 \cdot 0{,}3 + 16 \cdot 0{,}4 + 20 \cdot 0{,}3 = 2{,}4 + 6{,}4 + 6 = 14{,}8.$$
$$A2 = 20 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}3 = 6 + 6 + 1{,}5 = 13{,}5.$$

Сравниваем значения, выбираем максимальное 14,8 > 13,5. Оптимальной является категория $A1$.

Критерий Вальда:

1. Найдем минимальные исходы для каждой заданной альтернативы. Это и будут значения критерия Вальда: $W_1 = \min (a_{1j}), j = 1\ldots 3$ значит, $W_1 = \min (8, 16, 24) = 8$. $W_2 = \min (a_{2j}), j = 1\ldots 3$ значит, $W_2 = \min (20, 15, 5) = 5$.

2. Сравниваем получившиеся значения критерия Вальда и найдем наибольшую величину. Альтернатива с максимальным значением критерия будет считаться оптимальной: $8 > 5 \Rightarrow W_1 > W_2$.

Из этого следует $A^* = A_1$.

Выбрав оптимальную альтернативу по критерию Вальда, ЛПР гарантирует себе, что при самом плохом стечении обстоятельств он не получит меньше, чем значение критерия. Поэтому данный показатель еще называют критерием гарантированного результата.

Критерий Сэвиджа:

1. Требуется найти наибольшее значение прибыли, которое возможно, для каждого представленного варианта для продажи:

$$y_1 = \max(x_{11}, x_{21}) = \max(8, 20) = 20.$$
$$y_2 = \max(x_{12}, x_{22}) = \max(16, 15) = 16.$$
$$y_3 = \max(x_{13}, x_{23}) = \max(20, 5) = 20.$$

2. Далее рассчитываем «сожаления», т. е. недополученную прибыль, которую сравниваем с максимально возможной при нашем варианте развития событий. Также составляем «матрицу сожалений» из полученных значений. Для варианта X_1:

$$r_{11} = y_1 - x_{11} = 20 - 8 = 12.$$
$$r_{12} = y_2 - x_{12} = 16 - 16 = 0.$$
$$r_{13} = y_3 - x_{13} = 20 - 20 = 0.$$

Для варианта X_2:

$$r_{21} = y_1 - x_{21} = 20 - 20 = 0.$$
$$r_{22} = y_2 - x_{22} = 16 - 15 = 1.$$
$$r_{23} = y_3 - x_{23} = 20 - 5 = 15.$$

Составляем матрицу рисков, которая соответствует табл. 2.

Таблица 2

Матрица рисков

Альтернативы (X_i)	Состояния природы (j)			Макс. «сожаление» S_i
	1	2	3	
X_1	12	0	0	12
X_2	0	1	15	15
y_j	20	16	20	

3. Далее мы должны найти наибольшее значение «сожалений» в матрице, которая получилась. Сделать это требуется для каждого варианта. Полученное число будет соответствовать оценке данного случая по критерию Сэвиджа.

Максимальное сожаление S_1 будет равно: $S_1 = \max(12, 0, 0) = 12$.

Максимальное сожаление S_2 будет равно: $S_2 = \max(0, 1, 15) = 15$.

4. Как итог, надо сравнить то, что получили в пункте 4 и найти вариант с минимальным значением, которое и будет являться оптимальным: $15 > 12$, значит максимальное «сожаление» $S_2 > S_1$, поэтому $A^* = A_1$.

Это значит, что если пользоваться критериями Сэвиджа, то выбор падет на выбор A_1 – первый вариант, а точнее горячие напитки.

Критерий Гурвица:

1. Рассматриваем принятие решения методом Гурвица. Для этого следует учесть два варианта событий: лицо, принимающее решение, настроено оптимистически, тогда коэффициент оптимизма $\lambda = 0{,}8$; лицо, принимающее решение, настроено пессимистически, тогда коэффициент оптимизма $\lambda = 0{,}3$.

2. Для каждого из вариантов оптимизма или пессимизма необходимо найти максимальный исход $A_{i\max}$ и минимальный исход $A_{i\min}$:

$$A_{1\max} = \max(8, 16, 20) = 20;\ A_{1\min} = \min(8, 16, 20) = 8.$$
$$A_{2\max} = \max(20, 15, 5) = 20;\ A_{2\min} = \min(20, 15, 5) = 5.$$

3. Задаем значение коэффициента оптимизма, с помощью которого будем считать величину критерия Гурвица.

3.1. Оптимистический вариант $\lambda = 0{,}8$.

$$H_1(0{,}8) = \lambda A_{1\max} + (1-\lambda)A_{1\min} = 0{,}8 \cdot 20 + (1-0{,}8) \cdot 8 = 17{,}6.$$
$$H_2(0{,}8) = \lambda A_{2\max} + (1-\lambda)A_{2\min} = 0{,}8 \cdot 20 + (1-0{,}8) \cdot 5 = 17.$$

3.2 Пессимистический вариант $\lambda = 0{,}3$.

$$H_1(0{,}3) = \lambda A_{1\max} + (1-\lambda)A_{1\min} = 0{,}3 \cdot 20 + (1-0{,}3) \cdot 8 = 11{,}6.$$
$$H_2(0{,}3) = \lambda A_{2\max} + (1-\lambda)A_{2\min} = 0{,}3 \cdot 20 + (1-0{,}3) \cdot 5 = 9{,}5.$$

4. Теперь осталось сравнить значения в двух вариациях:

В пункте 3.1. $H_1 = 17{,}6$, а $H_2 = 17$, сравним $H_1 = 17{,}6$ и $H_2 = 17$.

$17{,}6 > 17$, значит $A^* = A_1$

В пункте 3.2 $H_1 = 11{,}6$, а $H_2 = 9{,}5$, сравним H_1, которое $= 11{,}6$ и H_2, которое равно 9,5.

$11{,}6 > 9{,}5$, значит $A^* = cA_1$

Это значит, что при любом варианте лицо, принимающее решение, выберет A_1.

Таким образом, знания в области математики и применение математических методов могут значительно облегчить решение задачи выбора в бизнесе.

Список используемых источников

1. *Иродов, И. Е.* Математическая теория игр и приложения : учеб. пособие / И. Е. Иродов. – СПб., 2016. – 448 с.

2. *Климова, Н. В.* Экономический анализ (теория, задачи, тесты, деловые игры) : учеб. пособие / Н. В. Климова. – М., 2013. – 287 с.

3. *Краснов, М. Л.* Теория вероятностей, математическая статистика, теория игр / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко. – М., 2014. – 296 с.

4. *Нечай, М. Н.* Теория игр в экономике / М. Н. Нечай. – М., 2013. – 264 с.

5. *Захаров, А. В.* Теория игр в общественных науках : учебник / А. В. Захаров. – М., 2015. – 304 с.

6. *Иванов, М. Г.* Антигравитационные двигатели «летающих тарелок»: Теория гравитации / М. Г. Иванов. – М., 2013. – 440 с.

7. *Петросян, Л. А.* Теория игр : учебник / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. В. Шевкопляс. – СПб., 2012. – 432 с.