Построение матриц-вычетов уравнения Фукса

В. В. Амелькин, М. Н. Василевич (Минск, Беларусь)

Рассмотрим уравнение Фукса

$$dY = \left(\frac{U_1}{z} + \frac{U_2}{z-1} + \frac{U_3}{z-a}\right)dz \tag{1}$$

с особыми точками $0, 1, a, \infty$ и квадратной (2×2)-матрицей Y.

Задача. По заданным особым точкам и заданным постоянным приводимым матрицам второго порядка W_j, $j = \overline{1,3}$, каждая из которых имеет различные собственные значения, построить матрицы-вычеты U_j, $j = \overline{1,3}$, уравнения (1).

Напомним, что матрицы W_j, $j = \overline{1,3}$, приводимы, если все эти матрицы имеют общий собственный вектор.

Заметим также, что, не умаляя общности рассуждений, приводимые матрицы W_j, $j = \overline{1,3}$, каждая с различными собственными значениями, можно рассматривать в виде

$$W_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \beta_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,3},$$

где считаем разности между собственными значениями ξ_j не равными целому числу.

Теорема. Если $1+\xi_1+\xi_2+\xi_3 = 0$, то матрицы-вычеты уравнения (1) имеют вид:

$$U_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \theta_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,3},$$

где

$$\theta_1 = \frac{b}{a}, \quad \theta_2 = \frac{1}{a-1} - \frac{b}{a-1}, \quad \theta_3 = -\frac{1}{a-1} + \frac{b}{a(a-1)},$$

а

$$b = \frac{\xi_1}{(a-1)\ln\left|\int a^{\xi_2}(a-1)^{\xi_1-1}da\right|}.$$