УДК 519.244

Е. Н. МЕЛЬНИКОВА,
Ю. С. ХАРИН, д-р физ.-мат. наук
(Белорусский государственный университет, Минск)

ОБНАРУЖЕНИЕ МНОГОКРАТНЫХ «РАЗЛАДОК» И КЛАССИФИКАЦИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ПОМОЩЬЮ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК МЕЖКЛАССОВЫХ РАССТОЯНИЙ

Рассматриваются задачи статистического анализа векторных временных рядов с многократными «разладками». Для оценивания моментов «разладки», проверки их значимости и классификации временного ряда предлагаются методы, основанные на параметрических и непараметрических оценках межклассовых расстояний. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

1. Введение

Прикладная теория обнаружения изменений свойств («разладок») стохастических сигналов и динамических систем интенсивно развивается [1–4] в связи с задачами обнаружения и оценивания изменений свойств временных рядов, возникающими в медицинской и технической диагностике, при контроле технологических процессов, автоматизированной обработке экспериментальных данных, в геофизике, радиотехнике [1, 3, 5]. Одна из этих задач – задача о многократных «разладках» при заданном числе $L\geqslant 2$ моделей (классов) случайной последовательности [6–8], актуальная при построении алгоритмов контроля за состоянием систем управления, при разработке адаптивных процедур идентификации сложных нестационарных динамических систем и явлений с L режимами функционирования, имеющих на случайных интервалах времени различную структуру или различные режимы функционирования [9, 10]. Каждый режим (класс) описывается собственной вероятностной моделью, а система обладает свойством «кусочной однородности»: если в момент времени $t+1$ начался i-й режим, то он сохраняется в моменты $t+1,\ldots$ $\ldots,\ t+\tau^0$, а затем в момент $t+\tau^0+1$ может измениться на j-й ($i,\ j\in S=\{1,\ 2,\ldots,\ L\}$) и т. д. Изменение режима происходит в случайные моменты времени; длина интервала однородности τ^0 достаточно велика и неизвестна. Многократное применение известных алгоритмов обнаружения единичных «разладок» для решения такого типа задач не учитывает повторяемость классов и не позволяет провести классификацию участков однородности. Применение методов максимального правдоподобия и байесовских методов, как показано в [7, 11], позволяет построить эффективные решающие правила для оценивания моментов «разладки» и классификации участков однородности, но приводит к алгоритмам недопустимо высокой сложности, трудно реализуемым на практике. Для преодоления этих недостатков здесь развивается общий подход, использующий параметрические и непараметрические оценки межклассовых расстояний.

2. Математическая модель. Постановка задач

Пусть в пространстве наблюдений R^N определено некоторое регулярное семейство $\mathscr{P}$ N-мерных плотностей распределения вероятностей $p(x)$, $x\in R^N$ и зафиксировано $L\geqslant 2$ различных неизвестных плотностей $p_1{}^0(\cdot),\ldots$ $\ldots,\ p_L{}^0(\cdot)\in\mathscr{P}$, являющихся математическими моделями случайных наблюдений из классов $\Omega_1,\ldots,\ \Omega_L$ соответственно. Наблюдается временной ряд X длительностью n, состоящий («склеенный») из K^0 серий (участков «однородности») случайной длины:

$$X=(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)=(X_1{}^0,\ldots,X^0_{K^0}),\quad X_k{}^0=(\mathbf{x}_{T^0_{k-1}+1},\ldots,\mathbf{x}_{T^0_k}), \tag{1}$$
$$T_k{}^0=T^0_{k-1}+\tau_k{}^0\,(k=\overline{1,K^0},\ T_0{}^0=0,T_{K^0}{}^0=n),$$

где $X_k{}^0$ – k-я серия $\tau_k{}^0$ независимых случайных наблюдений, принадлежащих одному и тому же классу $\Omega_{d^0_k}$ и имеющих плотность распределения $p_{d^0_k}(\cdot)\in\mathscr{P}$. Здесь $d_k{}^0\in S$ – неизвестный истинный номер класса, которому принадлежит $X_k{}^0$; $T_k{}^0$ – неизвестный случайный момент возможного перехода от класса $\Omega_{d^0_k}$ к классу $\Omega_{d^0_{k+1}}$ (k-й момент «разладки», если $d_k{}^0\neq$ $\neq d^0_{k+1}$). Будем предполагать, что длины серий $\tau_1{}^0,\ldots,\ \tau_{K^0}{}^0$ принимают значения из заданного множества: $\tau_k{}^0\in A_T=\{\tau_-,\ \tau_-+1,\ldots,\ \tau_+\}$ $(k=\overline{1,K^0})$ и образуют случайную последовательность с двумерным распределением вероятностей

$$q_2(\tau,\tau')=P\{\tau_k{}^0=\tau,\ \tau^0_{k+1}=\tau'\},\qquad \tau,\tau'\in A_T\,(k=\overline{1,K^0-1}), \tag{2}$$

здесь $\tau_\pm$ – наибольшее и наименьшее допустимые значения длин серий. Частным случаем (2) является случай независимых, одинаково распределенных длин серий:

$$q_2(\tau,\ \tau')=q_1(\tau)q_1(\tau'),\qquad q_1(\tau)=P\{\tau_K{}^0=\tau\},$$
$$\tau\in A_T\ (k=\overline{1,K^0}). \tag{3}$$

Число серий K^0 неизвестно: $K^0\in A_K=\{K\ ,\ K_-+1,\ldots,K_+\}$, где $K_\pm$ – наибольшее и наименьшее допустимое число серий, $L\leqslant K_+\leqslant[n/\tau_-]+1$, $K_-\geqslant[n/\tau_+]$ ($[y]$ – целая часть числа y).

По наблюдаемой реализации X необходимо построить решающие правила для оценивания числа серий $K^0\in A_K$, моментов «разладки» $\{T_k{}^0\}$, номеров классов $\{d_k{}^0\}$ при различных уровнях априорной информации о $\{p_k{}^0(\cdot)\}$.

3. Функционал межклассового расстояния. Случай параметрической априорной неопределенности

Пусть $X_k{}^0$, $X_l{}^0$ $(1\leqslant k\leqslant l\leqslant K^0)$ – две произвольные серии наблюдений временного ряда X, имеющие длины $\tau_k{}^0$, $\tau_l{}^0$ соответственно и принадлежащие Ω_k, Ω_l. Определим функционал межклассового расстояния для пары классов Ω_k, Ω_l:

$$\rho_{kl}{}^0=\rho(p_k{}^0,p_l{}^0)=f_2\Big(\int\limits_{R^N}f_1(p_k{}^0(\mathbf{x}),p_l{}^0(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\Big). \tag{4}$$

Здесь $f_1(z_1, z_2)\geqslant 0$ — дважды непрерывно дифференцируемая симметричная функция аргументов $z_1, z_2\geqslant 0$, такая, что $f_1(z_1, z_2)=0\Leftrightarrow z_1=z_2$; $f_2(y)\geqslant 0$ — монотонно возрастающая функция аргумента $y\geqslant 0$; $f_2(y)=0\Leftrightarrow y=0$. Частные случаи (4): расстояние в L_2-метрике при

(5) $$f_1(z_1, z_2)=(z_1-z_2)^2/2,\qquad f_2(y)=y;$$

расстояние Бхаттачарья [12] при

(6) $$f_1(z_1, z_2)=(\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2})^2/2,\qquad f_2(y)=-\ln(1-y);$$

дивергенция Кульбака [8] при

(7) $$f_1(z_1, z_2)=(z_2-z_1)\ln(z_2/z_1),\qquad f_2(y)=y.$$

Чем больше ρ_{kl}^0, тем «сильнее» различие вероятностных распределений k-й и l-й серий. На практике распределения $p_k^0(\cdot)$, $p_l^0(\cdot)$ обычно не известны, поэтому рассмотрим задачу оценивания функционала ρ_{kl}^0 по X. Вначале исследуем случай параметрической априорной неопределенности.

Пусть $\mathcal{P}=\{p(x;\ \theta),\ x\in R^N:\ \theta\in\Theta\subseteq R^m\}$ — m-параметрическое ($m<\tau_-$) семейство плотностей распределения вероятностей, удовлетворяющее условиям регулярности Чибисова [13]; $\{\theta_1^0, \dots, \theta_L^0\}\subset\Theta$ — подмножество L различных неизвестных значений параметра: $p_i^0(x)=p(x;\ \theta_i^0)$, $i=\overline{1, L}$. Обозначим с учетом (4): $\rho_1(\theta_k, \theta_l)=\rho(p(\cdot;\ \theta_k), p(\cdot;\ \theta_l))$, $\theta_k, \theta_l\in\Theta$; ∇_θ^j — оператор вычисления набора m^j частных производных порядка j по $\theta\in R^m$; δ_{ij} — символ Кронекера; T — знак транспонирования; $J(\theta)=-\int_{R^N}(\nabla_\theta^2\ln p(x;\ \theta))p(x;\ \theta)\,dx$ — положительно определенная информационная матрица Фишера порядка m; $\hat\theta\in\Theta$ — оценка максимального правдоподобия параметра θ_k^0, вычисленная по серии наблюдений X_k^0;

(8) $$\hat\rho_{kl}=\hat\rho_{kl}(T_{k-1}^0, T_k^0, T_{l-1}^0, T_l^0)=\rho_1(\hat\theta_k, \hat\theta_l)=\rho(p(\cdot;\ \hat\theta_k), p(\cdot;\ \hat\theta_l))$$

есть состоятельная оценка межклассового расстояния ρ_{kl}^0 по сериям наблюдений X_k^0, X_l^0. Определим H_{0kl}: $d_k^0=d_l^0$ — гипотезу однородности серий X_k^0, X_l^0.

Теорема 1[1]. Если $\mathcal{P}$ регулярно, верна гипотеза H_{0kl} и

(9) $$\nabla^2_{\theta_i, \theta_j}\rho_1(\theta_k, \theta_l)\big|_{\theta_k=\theta_l=\theta_k^0}=(-1)^{1+\delta_{ij}}B(\theta_k^0),\quad i, j\in\{k, l\},$$

где $B(\theta_k^0)$ — положительно определенная симметричная матрица, то в асимптотике растущих длин серий $\tau_-\to\infty$ справедливо стохастическое разложение статистики (8):

(10) $$\hat\rho_{kl}=(1/\tau_k^0+1/\tau_l^0)\xi^T J^{-1/2}(\theta_k^0)B(\theta_k^0)J^{-1/2}(\theta_k^0)\xi/2+O_P(\tau_-^{-3/2}),$$

где $\xi=(\xi_j)\in R^m$ — гауссовский вектор с независимыми компонентами, имеющими стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}_1(0, 1)$, а $O_P(\tau_-^{-3/2})\xrightarrow{P}0$ — остаточный член порядка $\tau_-^{-3/2}$, сходящийся к нулю по вероятности.

[1] Доказательства теорем и следствий приведены в приложении.

Следствие 1. Если

(11) $$B(\theta_k^0)=(2/c)J(\theta_k^0),$$

где c — константа ($c=8$ для случая (6), $c=1$ для (7)), то нормированная оценка межклассового расстояния

(12) $$r_{kl}=r_{kl}(T_{k-1}^0, T_k^0, T_{l-1}^0, T_l^0)=c\,\frac{\tau_k^0\tau_l^0}{\tau_k^0+\tau_l^0}\,\hat\rho_{kl}$$

асимптотически распределена по закону хи-квадрат с m степенями свободы.

Следствие 2. Пусть $\gamma_{1-\varepsilon}(m)$ — квантиль уровня $1-\varepsilon$ хи-квадрат распределения с m степенями свободы. В условиях следствия 1 асимптотический размер теста с критической областью $G=\{r_{kl}\geqslant\gamma_{1-\varepsilon}(m)\}$ отклонения гипотезы H_{0kl} совпадает с заданным уровнем значимости $\varepsilon\in(0, 1)$.

4. Непараметрическая оценка межклассового расстояния

Пусть $\mathcal{P}$ — семейство трижды непрерывно дифференцируемых плотностей $p(x)$, $x\in R^N$, ограниченных вместе со своими производными, причем

$$A_s(p)=\int_{R^N}p^s(x)\,dx<\infty,\qquad s=1, 2, 3.$$

Построим состоятельную непараметрическую оценку межклассового L_2-расстояния (4), (5):

(13) $$\hat\rho_{kl}=\hat\rho_{kl}(T_{k-1}^0, T_k^0, T_{l-1}^0, T_l^0)=\int_{R^N}(\hat p_k(x)-\hat p_l(x))^2\,dx/2\geqslant 0,$$

где

(14) $$\hat p_i(x)=(\tau_i^0)^{-1}\sum_{t=T_{i-1}^0+1}^{T_i^0}|H_i|^{-1}K(H_i^{-1}(x-x_t)),$$

$$x\in R^N,\qquad i\in\{k, l\}$$

есть непараметрическая оценка Розенблатта — Парзена [14] для плотности $p_i(x)$, вычисленная по серии X_i^0; $K(y)=(2\pi)^{-N/2}\exp(-y^Ty/2)$ — N-мерное гауссовское ядро; $H_i=\mathrm{diag}\{h_{ij}\}$ — диагональная матрица порядка N; $h_{ij}=b_j(T_i^0-T_{i-1}^0)^{-\alpha}$, ($\alpha>0$, $b_j>0$, $j=\overline{1, N}$) — коэффициент сглаживания. Подставив оценку (14) в (13), после преобразований получим явный вид статистики $\hat\rho_{kl}$:

$$\hat\rho_{kl}=(a_{kk}+a_{ll})/2-a_{kl},$$

(15) $$a_{kl}=(\tau_k^0\tau_l^0)^{-1}|H_k^2+H_l^2|^{-1/2}\sum_{t=T_{k-1}^0+1}^{T_k^0}\ \sum_{t'=T_{l-1}^0+1}^{T_l^0}\times$$

$$\times K((H_k^2+H_l^2)^{-1/2}(x_t-x_{t'})).$$

Теорема 2. Если $p_k^0(\cdot)$, $p_l^0(\cdot)\in\mathcal{P}$, верна гипотеза H_{0kl} и $(N+4)^{-1}<\alpha<N^{-1}$, то при $\tau_-\to\infty$ справедливы асимптотические разложения для мо-

ментов статистики (15):

$$(16)\qquad E\{\hat{\rho}_{kl}\}=(2\pi)^{-N/2}2^{-1-N/2}B^{-1}((\tau_k^0)^{-1+N\alpha}+(\tau_l^0)^{-1+N\alpha})+o(\tau_-^{-1+N\alpha}),$$

$$(17)\qquad D\{\hat{\rho}_{kl}\}=(2\pi)^{-N/2}2^{-N-1}B^{-1}A_2(p)\Big(\sum_{i\in\{k,l\}}(\tau_i^0)^{-2+N\alpha}+$$

$$+2(\tau_k^0\tau_l^0)^{-1}(((\tau_k^0)^{-2\alpha}+(\tau_l^0)^{-2\alpha})/2)^{-N/2}\Big)+o(\tau_-^{-2+N\alpha}),\quad B=\prod_{j=1}^{N}b_j.$$

Аналогично (12) построим нормированную оценку

$$(18)\qquad r_{kl}=r_{kl}(T_{k-1}^0,T_k^0,T_{l-1}^0,T_l^0)=$$

$$=\frac{\hat{\rho}_{kl}-(2\pi)^{-N/2}2^{-1-N/2}B^{-1}((\tau_k^0)^{-1+N\alpha}+(\tau_l^0)^{-1+N\alpha})}{\Big((2\pi)^{-N/2}2^{-N-1}B^{-1}A_2(\tilde{p})\Big(\sum\limits_{i\in\{k,l\}}(\tau_i^0)^{-2+N\alpha}+2(\tau_k^0\tau_l^0)^{-1}(((\tau_k^0)^{-2\alpha}+(\tau_l^0)^{-2\alpha})/2)^{-N/2}\Big)\Big)^{1/2}},$$

где $\tilde{p}(\mathbf{x})$ — оценка плотности, вычисленная аналогично (14) для всего временного ряда X в предположении его однородности.

5. Решающие правила

Для произвольных $K\in A_K$, $\tau_1,\dots,\tau_K\in A_T$ моментов «разладки» $T_k=T_{k-1}+\tau_k$ $(k=\overline{1,K},\ T_0=0,\ T_K=n)$ аналогично (1) «разобьем» наблюдаемый ряд X на K серий $X_1,\dots,X_K$. С помощью (2), (12), (18) построим статистики $\{r_{kl}\}$ и функционал

$$R=R(K,\{T_k\})=(K-1)^{-1}\sum_{k=1}^{K-1}q_2(T_k-T_{k-1},T_{k+1}-$$

$$-T_k)r_{k,k+1}(T_{k-1},T_k,T_k,T_{k+1}),$$

где R — усредненная (с весами) по всем $K-1$ «разладкам» величина межклассового расстояния. Оценку числа серий $\hat{K}$ и моментов «разладки» $\{\hat{T}_k\}$ определим при решении экстремальной задачи

$$(19)\qquad R(K,\{T_k\})\to\max_{\{T_k\}}\max_{K\in A_K}.$$

С учетом (1) целевую функцию в (19) преобразуем к виду

$$(20)\qquad R(K,\{T_k\})=(K-1)^{-1}\sum_{k=1}^{K-3}\Psi_k(T_k,T_{k+1},T_{k+2}),$$

$$\Psi_1(T_1,T_2,T_3)=q_2(T_1,T_2-T_1)r_{1,2}(0,T_1,T_1,T_2)+$$
$$+q_2(T_2-T_1,T_3-T_2)r_{2,3}(T_1,T_2,T_2,T_3),$$
$$\Psi_j(T_j,T_{j+1},T_{j+2})=q_2(T_{j+1}-T_j,T_{j+2}-T_{j+1})r_{j,j+1}\times$$
$$\times(T_j,T_{j+1},T_{j+1},T_{j+2}),\qquad j=\overline{2,K-4},$$
$$\Psi_{K-3}(T_{K-3},T_{K-2},T_{K-1})=q_2(T_{K-2}-T_{K-3},T_{K-1}-$$
$$-T_{K-2})r_{K-2,K-1}(T_{K-3},T_{K-2},T_{K-2},T_{K-1})+q_2(T_{K-1}-$$
$$-T_{K-2},n-T_{K-1})r_{K-1,K}(T_{K-2},T_{K-1},T_{K-1},n).$$

Представление (20) позволяет аналогично [6, 11] успешно применить в (19) для максимизации по $T_1,\dots,T_{K-1}$ при наличии ограничений $T_{k-1}+\tau_-\leqslant T_k\leqslant\min\{T_{k-1}+\tau_+,\ n-(K-k)\tau_-\}$ $(k=\overline{1,K-1})$ для каждого значения $K\in AK$ метод динамического программирования [15]. Максимизация по $K_-\leqslant K\leqslant K_+$ проводится перебором K_+-K_-+1 значений целевой функции (20). Вычислительная сложность этого алгоритма решения задачи (19), (20) имеет оценку $O((\tau_+-\tau_-)^2(\tau_+-\tau_-)(K_+^3-K_-^3))$.

При параметрической априорной неопределенности с помощью следствия 2 может быть проверена статистическая значимость каждого момента «разладки» $\hat{T}_k$. При этом $\hat{T}_k$ является ε-значимым моментом «разладки», если $r_{k,k+1}\geqslant\gamma_{1-\varepsilon}(m)$.

Для классификации $\hat{K}$ серий, соответствующих моментам «разладки» $\hat{T}_1,\dots,\hat{T}_{\hat{K}-1}$ (т. е. для нахождения оценок $\{\hat{d}_k\}$ номеров классов $\{d_k^0\}$), используется иерархическая кластер-процедура [16]. Она заключается в последовательном объединении кластеров и состоит из $\hat{K}-L$ шагов. На первом шаге число классов предполагаем равным $L'=\hat{K}$. Используя критерий

$$(21)\qquad r_{kl}(\hat{T}_{k-1},\hat{T}_k,\hat{T}_{l-1},\hat{T}_l)\to\min_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant L'},$$

находим номера (k^*,l^*) двух наиболее близких кластеров (серий), объединяемых в один с номером k^*; после этого число классов $L'=\hat{K}-1$. Далее процесс повторяется: находим два самых близких (по (21)) кластера и объединяем в один с меньшим номером и т. д., пока не получим заданное число $L'=L$ классов. После $\hat{K}-L$ таких шагов получаем классификацию X на L классов, определяющую искомые оценки $\{\hat{d}_k\}$.

6. Вычислительные эксперименты. Заключение

Решающие правила (19)—(21) реализованы на ПЭВМ ЕС-1841; использовалась параметрическая статистическая оценка межклассового расстояния Бхаттачарья (6), (8), (12), а длины серий имели распределение (3), определяемое табл. 1, $\tau_-=4$, $\tau_+=9$.

Наблюдаемый двумерный $(N=2)$ временной ряд X состоял из $K^0=6$ серий наблюдений (1), соответствующих двум $(L=2)$ равновероятным классам $(\pi_1=\pi_2=0{,}5)$. Семейство $\mathcal{P}$ являлось семейством N-мерных гауссовских плотностей $p(\mathbf{x};\theta)=n_N(\mathbf{x}|\theta,\Sigma)$ с параметром $\theta\in R^2$ — вектором математического ожидания. В вычислительных экспериментах использованы 8 серий (по $M=50$ независимых реализаций в каждой), различающихся величиной межклассового расстояния Махаланобиса $\Delta=((\theta_2^0-\theta_1^0)^T\Sigma^{-1}(\theta_2^0-\theta_1^0))^{1/2}\in\{1{,}048,\ 1{,}350,\ 1{,}681,\ 2{,}074,\ 2{,}562,\ 3{,}288,\ 4,\ 4{,}652\}$. Машинное время обработки одной реализации составляло 2 мин. На рис. 1 изображен график зависимости от Δ вероятности ошибочной классификации r_d: кружками — точечные оценки $\hat{r}_d$, штриховыми линиями — 95%-е доверительные границы, сплошными линиями — нижняя и верхняя границы, определяемые согласно [7, 17]:

$$r_-=\sum_{\tau=\tau_-}^{\tau_+}q_1(\tau)\Phi(-\sqrt{\tau}\Delta/2),$$

Таблица 1

τ	4	5	6	7	8	9
$q_1(\tau)$	0,10	0,22	0,35	0,18	0,10	0,05

Таблица 2

j	−2	−1	0	1
ν_j	20	50	329	1

$$r_+=\Phi(-\Delta/2)+n^{-1}\left(\frac{N+1+\Delta^2/4}{\sqrt{2\pi}\,\Delta}e^{-\Delta^2/8}+\frac{\Delta^2}{16}e^{-\Delta^2/4}\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ — стандартная нормальная функция распределения. В табл. 2 представлено частотное распределение ν_j уклонения $j=\hat{K}-K^0$ при оценивании K^0, вычисленное по результатам 400 экспериментов.

На рис. 2 изображен график зависимости от Δ выборочного среднего для показателя эффективности $r_T=E\left\{\sum_{i=1}^{K^0}\min_K|T_i^0-T_k|\right\}$, характеризующего точность оценивания моментов «разладки» $\{T_k^0\}$: кружки обозначают результаты вычислительных экспериментов; штриховые линии — 95%-е доверительные границы.

Таким образом, в работе получены следующие результаты: 1) предложен метод обнаружения многократных «разладок» и классификации временных рядов с помощью статистических оценок межклассовых расстояний; 2) в условиях регулярности найдены и исследованы состоятельные оценки межклассовых расстояний; 3) построены, реализованы на ПЭВМ и показали достаточную точность и быстродействие решающие правила для оценивания моментов «разладки», их числа, а также для классификации серий наблюдаемого временного ряда.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Обозначим случайное уклонение оценки $\Delta\theta_k=\hat{\theta}_k-\theta_k^0$ и в точке (θ_k^0,θ_l^0) применим к (8) формулу Тейлора второго порядка с учетом (4), (9) и H_{0kl}:

(П.1) $$\hat{\rho}_{kl}=(\Delta\theta_k-\Delta\theta_l)^T B(\theta_k^0)(\Delta\theta_k-\Delta\theta_l)/2+Q_3,$$

где $Q=O(|\Delta\theta_k|^3+|\Delta\theta_l|^3)$ — остаточный член. Из [13] следует, что при $\tau_-\to\infty$ $\Delta\theta_i$ имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $(\tau_i^0)^{-1}J^{-1}(\theta_i^0)$, $i\in\{k,l\}$;

(П.2) $$Q_3=O_P(\tau_-^{-1/2})\xrightarrow{P}0.$$

В силу независимости X_k^0, X_l^0 случайный вектор

(П.3) $$\xi=(1/\tau_k^0+1/\tau_l^0)^{-1/2}J^{1/2}(\theta_k^0)(\Delta\theta_k-\Delta\theta_l)\in R^m$$

имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым математическим ожи-

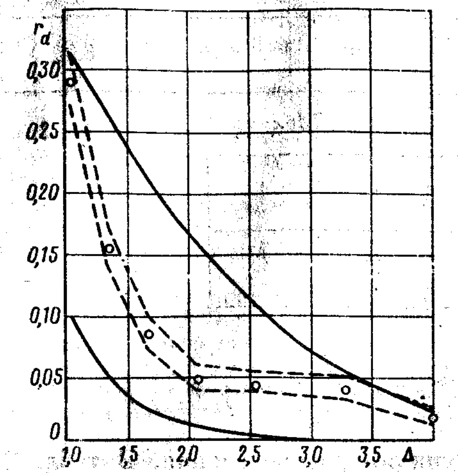

Рис. 1

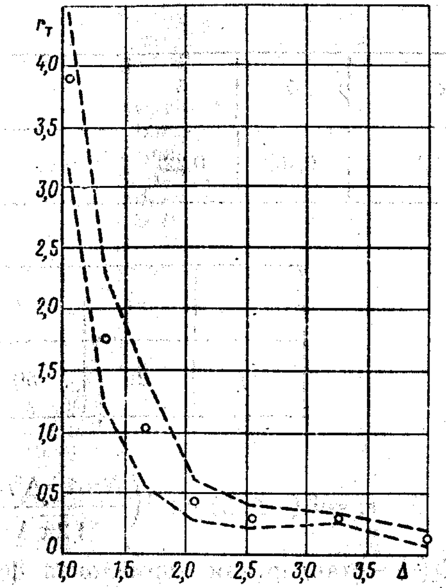

Рис. 2

данием и единичной ковариационной матрицей. Поэтому из (П.1)–(П.3) следует (10).

Доказательство следствий 1, 2. Утверждения следствий 1, 2 получаются подстановкой (10), (11) в (12).

Доказательство теоремы 2. Из (15) следует

(П.4) $$E\{\hat{\rho}_{kl}\}=(E\{a_{kk}\}+E\{a_{ll}\})/2-E\{a_{kl}\},$$

(П.5) $$D\{\hat{\rho}_{kl}\}=(D\{a_{kk}\}+D\{a_{ll}\})/4+D\{a_{kl}\}-\\-\operatorname{cov}\{a_{kk},a_{kl}\}-\operatorname{cov}\{a_{ll},a_{kl}\}.$$

Обозначив $K_{kl}(z)=|H_k^2+H_l^2|^{-1/2}K((H_k^2+H_l^2)^{-1/2}z)$, имеем из (15):

$$E\{a_{kk}\}=(2\pi)^{-N/2}2^{-N/2}|H_k|^{-1}(\tau_k^0)^{-1}+(1-1/\tau_k^0)E\{K_{kk}(x_1-x_2)\},$$

$$E\{a_{kl}\}=E\{K_{kl}(x_1-x_2)\},$$

$$D\{a_{kk}\}=2(\tau_k^0)^{-3}(\tau_k^0-1)(D\{K_{kk}(x_1-x_2)\}+\\+2(\tau_k^0-2)\operatorname{cov}\{K_{kk}(x_1-x_2)K_{kk}(x_1-x_3)\}),$$

$$D\{a_{kl}\}=(\tau_k^0\tau_l^0)^{-1}(D\{K_{kl}(x_1-x_2)\}+\\+(\tau_k^0+\tau_l^0-2)\operatorname{cov}\{K_{kl}(x_1-x_2),\ K_{kl}(x_1-x_3)\}),$$

$$E\{a_{kk}a_{kl}\}=(\tau_k^0)^{-2}(\tau_k^0-1)(2E\{K_{kk}(x_1-\\-x_2)K_{kl}(x_1-x_3)\}+(\tau_k^0-2)E\{K_{kk}(x_1-\\-x_2)\}E\{K_{kl}(x_1-x_2)\}).$$

Применяя для вычисления моментов статистик $K_{kl}(\cdot)$ методику из [14] и затем собирая в (П.4), (П.5) главные члены асимптотических разложений, получаем (16), (17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никифоров И. В.* Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. М.: Наука, 1983.
2. *Клигене Н. И., Телькснис Л. А.* Методы обнаружения моментов изменения свойств // АиТ. 1983. № 10. С. 5–56.

3. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / Под ред. М. И. Бассвиль, А. В. Банвениста. М.: Мир, 1989.
4. *Немура А. А., Клекис Э. А.* Оценивание параметров и состояния систем. Вильнюс: Мокслас, 1988.
5. *Жиглявский А. А., Красковский А. Е.* Обнаружение разладки случайных процессов в задачах радиотехники. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1988.
6. *Харин Ю. С.* Обнаружение разладок марковского типа // Стат. пробл. упр. Вильнюс, 1984. Вып. 65. С. 225–233.
7. *Харин Ю. С.* Классификация случайных серий неизвестной длины // Проблемы передачи информации. 1985. Т. XXI. Вып. 4. С. 64–75.
8. *Харин Ю. С.* Выявление многократных разладок и классификация временного ряда с помощью дивергенции Кульбака // Стат. пробл. упр. Вильнюс, 1983. Вып. 83. С. 152–157.
9. *Склярееич А. Н., Скляревич Ф. Н.* Вероятностные модели объектов с возможными изменениями. Рига: Зинатне, 1989.
10. *Артемьев В. М.* Теория динамических систем со случайными изменениями структуры. Минск: Вышэйшая школа, 1979.
11. *Мельникова Е. Н., Харин Ю. С.* О классификации серий многомерных наблюдений при случайной длине серий // Вестн. БГУ. 1988. Сер. 1. № 2. С. 43–48.
12. *Фукунага К.* Введение в статистическую теорию распознавания образов. М.: Наука, 1979.
13. *Чибисов Д. Н.* Асимптотическое разложение для одного класса оценок, включающего оценки максимального правдоподобия // Теория вероятностей и ее применения. 1973. Т. XVIII. Вып. 2. С. 303–311.
14. *Епанечников В. А.* Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. XIV. Вып. 1. С. 156–160.
15. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Основы динамического программирования. Минск: Изд-во БГУ, 1976.
16. *Миленький А. В.* Классификация сигналов в условиях неопределенности. М.: Сов. радио, 1975.
17. *Харин Ю. С.* Устойчивость самообучающихся решающих правил в задачах распознавания образов // Математическая статистика и ее приложения. Томск: ТГУ, 1986. Вып. 10. С. 216–226.

Поступила в редакцию 14.06.90

УДК 519.218.82

Е. А. СЕМЕНЧИН, канд. физ.-мат. наук

(Ставропольский политехнический институт)

ОБ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ ПОЧТИ ОПТИМАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ФИЛЬТРА

Дается выражение, ограничивающее сверху математическое ожидание квадрата отклонения почти оптимальной оценки от оптимальной в задаче линейной фильтрации многомерного частично наблюдаемого случайного процесса диффузионного типа. Из него следует известный результат о сходимости в среднеквадратическом решения почти оптимального фильтра к оптимальной оценке в случае вырождения матрицы ковариаций шумов наблюдаемых компонент указанного процесса.

1. Введение

Основные результаты теории оптимальной линейной фильтрации частично наблюдаемых случайных процессов достаточно подробно и полно изложены в [1, 2]. При выводе уравнений оптимальных фильтров одним из основных предположений является предположение о невырожденности