БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.9

**ШАГОВА**
**Татьяна Григорьевна**

# РАЦИОНАЛЬНЫЕ МНЕМОФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Минск, 2019

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель — **Антоневич Анатолий Борисович,**
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры функционального анализа
и аналитической экономики
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Миротин Адольф Рувимович,**
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического анализа
и дифференциальных уравнений
УО "Гомельский государственный университет
имени Ф. Скорины";

**Мардвилко Татьяна Сергеевна,**
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры теории функций
Белорусского государственного университета.

Оппонирующая организация — УО "Белорусский государственный
технологический университет".

Защита состоится 20 декабря 2019 г. в 12:00 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407. Тел. ученого секретаря (017) 209-57-09.

Почтовый адрес: пр-т Независимости, 4, Минск, 220030.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан "       " ноября 2019 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
кандидат физ.-мат. наук доцент                                        Е.М. Радыно

# ВВЕДЕНИЕ

Проблема умножения обобщенных функций (распределений) до сих пор привлекает внимание исследователей в связи с задачами теории нелинейных уравнений, дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами, а также квантовой теории поля, в которых возникают произведения, не определенные в классических пространствах обобщенных функций. Общий подход к решению данной проблемы состоит в построении по заданному пространству обобщенных функций $E$ дифференциальной алгебры $G$ и вложения $R : E \to G$, что позволяет определить произведение произвольных обобщенных функций как элемент алгебры $G$.

Элементы построенной дифференциальной алгебры $G$ представляют собой новые объекты, которые сохраняют ряд свойств обобщенных функций, но в то же время допускают корректно определенную операцию умножения. Такие объекты называют новыми обобщенными функциями, или мнемофункциями. Связь мнемофункций с классическими обобщенными функциями устанавливается с помощью понятия ассоциированности: на части алгебры $G$ определено отображение, которое ставит в соответствие мнемофункции некоторую обобщенную функцию из пространства $E$.

Различные алгебры мнемофункций были построены в работах В.К. Иванова, Ю.В. Егорова, Б. Дамянова и Х. Христова, С.Т. Завалищина и А.Н. Сесекина, Э. Розингера и др. Наибольший резонанс в этом направлении вызвали работы Ж.-Ф. Коломбо, поэтому построенные дифференциальные алгебры мнемофункций часто называют алгебрами типа Коломбо. А.Б. Антоневичем и Я.В. Радыно был описан общий подход к построению расширений алгебр, в том числе и построению алгебр мнемофункций.

Одна из основных тенденций в теории мнемофункций заключается в систематизации, обобщениях и приложениях имеющихся конструкций алгебр мнемофункций, а другая связана с анализом конкретных примеров произведений в алгебрах мнемофункций. Особый интерес представляют случаи, когда произведение элементов алгебры мнемофункций ассоциировано с классической обобщенной функцией и его можно считать распределением. Во многих работах приведены конкретные примеры таких случаев, однако общие закономерности существования произведения в указанном выше смысле для произвольных обобщенных функций не были обнаружены. Поэтому естественно возникает задача выделения класса обобщенных функций, для которых можно получить необходимые и достаточные условия существования произведений в указанном смысле.

Один из таких классов образован так называемыми рациональными распределениями, которые допускают аналитическое представление через рациональные функции. Такие распределения часто встречаются в физических приложениях и в дифференциальных уравнениях с обобщенными коэффициентами, в связи с чем их детальный анализ представляет собой актуальную задачу.

Целью работы является исследование алгебр, порожденных рациональными распределениями, и получение явных условий, когда произведение ассоциировано с классическим распределением.

В качестве приложения рассмотрены вопросы о разрешимости в пространстве обобщенных функций дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются рациональные распределения. Для решения таких уравнений должно быть определено умножение на указанный обобщенный коэффициент, таким образом этот вопрос непосредственно связан с задачей умножения обобщенных функций.

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

## Связь работы с научными программами, темами

Диссертационная работа выполнена в рамках НИР 2016-2020 гг. по теме 1.4.04 "Неавтономные динамические системы с переходными режимами: спектральный и фрактальный анализ с приложениями к физическим, экономическим и экологическим моделям", входящей в государственную программу "Конвергенция-2020", № ГР 20161427.

## Цель и задачи исследования

*Целью диссертационной работы* является изучение алгебр рациональных мнемофункций и приложение их свойств к исследованию смежных задач. Для достижения поставленной цели решались следующие *задачи*:

1. Исследовать алгебры, порожденные специальными классами рациональных мнемофункций, выделить образующие этих алгебр, в явном виде описать правило умножения в них.

2. Получить явные условия, когда произведение рациональных распределений ассоциировано с некоторым распределением.

3. Выяснить условия разрешимости в пространстве распределений дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются рациональные распределения.

*Объектом исследования* являются алгебры рациональных мнемофункций. *Предметом исследования* являются: пространства распределений, ассоциированных с рациональными мнемофункциями; способы вложения распределений в алгебры мнемофункций; проблема умножения распределений.

Выбор объекта исследования обусловлен как его богатым математическим содержанием, так и разнообразными приложениями.

## Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Новизна и основное содержание этих результатов заключаются в следующем.

1. Алгебры рациональных мнемофункций на прямой и на окружности описаны явно, что позволило провести систематическое исследование таких алгебр и их приложений к другим задачам.

2. Выделен класс распределений, для которых получено необходимое и достаточное условие существования произведения.

3. Получено условие разрешимости семейства модельных дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются рациональные распределения.

## Положения, выносимые на защиту

1. Анализ структуры алгебр, порожденных рациональными мнемофункциями на прямой и на окружности: описание элементов алгебр, выделение образующих и задание правила умножения в явном виде.

2. Необходимые и достаточные условия, при которых произведение рациональных распределений ассоциировано с распределением.

3. Необходимое и достаточное условие разрешимости в пространстве распределений семейства модельных дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются рациональные распределения.

## Личный вклад соискателя ученой степени

Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Роль научного руководителя А.Б. Антоневича состояла в постановке рассмотренных в диссертации задач и анализе полученных результатов. Результаты, опубликованные в соавторстве, принадлежат авторам на паритетных началах.

Из статьи [1], написанной в соавторстве с А.Б. Антоневичем и Е.В. Шкадинской, в диссертацию включено описание алгебры мнемофункций на окружности, полученное лично автором.

## Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертационной работы докладывались на ряде международных конференций:

- XVII международная научная конференция по дифференциальным уравнениям "ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2017" (Минск, 16–20 мая 2017 г.);
- XVIII международная научная конференция по дифференциальным уравнениям "ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2018" (Гродно, 15–18 мая 2018 г.);
- международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – IX" (Ростов-на-Дону, 22–25 апреля 2019 г.);
- XIX международная научная конференция по дифференциальным уравнениям "ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2019" (Могилев, 14–17 мая 2019 г.);
- международная научная конференция "XXX Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2019)" (Батилиман, 17–29 сентября 2019 г.).

Результаты диссертационной работы докладывались на 81-ой и 82-ой научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием) БГТУ (Минск, 1–12 февраля 2017 г., 1–14 февраля 2018 г.).

Результаты работы неоднократно докладывались на научных семинарах кафедры функционального анализа БГУ (Минск, 2017, 2018, 2019 г.), а также на научном семинаре кафедры теории функций БГУ (Минск, 2018 г.).

## Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах, из них 5 статей в научных изданиях в соответствии с п. 18 Положения о присуждении учёных степеней и присвоении учёных званий в Республике Беларусь (общим объёмом 3,2 авторского листа), 2 статьи в других научных изданиях, 3 статьи в сборниках материалов научных конференций и 4 тезисов.

### Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и библиографического списка. Первая глава содержит обзор литературы и основных методов исследования по теме диссертации. Основные результаты диссертации приводятся во второй, третьей и четвертой главах. Полный объём диссертации составляет 105 страниц, в том числе 2 рисунка занимают 1 страницу. Библиографический список содержит 71 наименование, включая собственные публикации соискателя ученой степени.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В **первой главе** приводятся необходимые определения и обозначения, обосновывается целесообразность исследования алгебр рациональных мнемофункций, а также выделения подпространств в пространстве распределений, для элементов которых можно получить необходимые и достаточные условия, когда их произведение ассоциировано с некоторым распределением; приведен краткий обзор литературы по теме.

Пространство основных функций $D(\mathbb{R})$ состоит из бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций с компактным носителем. Пространство, сопряженное к $D(\mathbb{R})$, т.е. множество $D'(\mathbb{R})$, состоящее из линейных непрерывных функционалов на $D(\mathbb{R})$, называется *пространством обобщенных функций, или распределений,* на $\mathbb{R}$. Значение функционала $f$ на основной функции $\varphi$ обозначается $\langle f, \varphi \rangle$.

В этом пространстве заданно дифференцирование и определено умножение на бесконечно дифференцируемую функцию. Пространство локально интегрируемых функций $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ вкладывается в $D'(\mathbb{R})$ следующим образом. Если $u$ – локально интегрируемая функция, то формула

$$\langle f_u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)dx$$

задает распределение, которое называется *регулярным.*

Примерами нерегулярных распределений (*сингулярных*) служат дельта-функция Дирака – функционал, который на основных функциях действует по правилу $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$, и распределение $P\left(\frac{1}{x}\right)$, заданное формулой

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)dx}{x},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

На всем пространстве распределений невозможно задать ассоциативную и коммутативную операцию умножения, даже введенное умножение на гладкую функцию неассоциативно. Это иллюстрирует пример Л. Шварца[1], описывающий произведение распределений $P\left(\frac{1}{x}\right)$, $x$ и $\delta$. С одной стороны имеем

$$\left(P\left(\frac{1}{x}\right)x\right)\delta = 1 \times \delta = \delta,$$

с другой стороны

$$P\left(\frac{1}{x}\right)\left(x\delta\right) = P\left(\frac{1}{x}\right) \times 0 = 0.$$

Общий подход к решению проблемы умножения распределений состоит во введении новых объектов, которые сохраняют ряд свойств распределений, но допускают корректно определенную операцию умножения, т.е. образуют алгебру. Такие объекты называют *новыми обобщенными функциями* или *мнемофункциями.* По своей конструкции мнемофункции представляют собой классы эквивалентных семейств гладких функций $[f_\varepsilon]$, зависящих от малого параметра $\varepsilon$. Связь мнемофункций с распределениями устанавливается с помощью понятия ассоциированности. Говорят, что мнемофункция $[f_\varepsilon]$ *ассоциирована с распределением* $f$, если семейство $f_\varepsilon$ сходится в пространстве распределений $D'(\mathbb{R})$ к $f$. В общем случае информацию о мнемофункции дает анализ асимптотического поведения величин $\langle f_\varepsilon, \varphi\rangle$, для которых часто в пространстве распределений $D'(\mathbb{R})$ существует асимптотическое разложение вида

$$\langle f_\varepsilon, \varphi\rangle \sim \sum_{k=k_0}^{\infty} \langle u_k, \varphi\rangle \varepsilon^k, \quad u_k \in D'(\mathbb{R}). \tag{1}$$

В разделе 1.3 приведено известное описание алгебры мнемофункций на прямой $G(\mathbb{R})$. В ней содержится подалгебра мнемочисел $\mathbb{C}^*$, порожденная постоянными, т.е. семействами $w_\varepsilon$, не зависящими от $x$. В частности, эта алгебра содержит элементы вида $C\varepsilon^k$, $C \in \mathbb{C}$, причем при $k > 0$ имеем бесконечно малые величины, а при $k < 0$ – бесконечно большие.

Линейный оператор $R : D'(\mathbb{R}) \to G(\mathbb{R})$, при котором для каждого распределения $f$ его образ $R(f) = [f_\varepsilon]$ ассоциирован с $f$, называется *способом аппроксимации распределений из* $D'(\mathbb{R})$. Способ аппроксимации порождает вложение пространства распределений в алгебру мнемофункций $G(\mathbb{R})$, что

[1]Schwartz, L. Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions / L. Schwartz // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1954. – Vol. 239. – P. 847–848.

позволяет задать произведение произвольных распределений как элемент алгебры $G(\mathbb{R})$ по формуле

$$f \otimes_R g := R(f)R(g) \in G(\mathbb{R}).$$

Введенное умножение требует специального исследования, так как, согласно примеру Шварца, оно не может быть согласованным с классическим, т.е. ни при каком вложении не может быть выполнено равенство

$$R(fg) = R(f)R(g) \text{ для всех } f \in D'(\mathbb{R}), g \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

В разделе 1.4 построена алгебра мнемофункций на окружности, в которой также содержится подалгебра мнемочисел $\mathbb{C}^*$; выделен ряд свойств вложений распределений в данную алгебру [1, 2].

В разделе 1.5 описаны основные идеи подхода к определению понятия решения уравнения с обобщенными коэффициентами, используемого в теории мнемофункций.

Во **второй главе** рассматривается пространство периодических распределений на прямой и изоморфное ему пространство $D'(\mathbb{S}^1)$ распределений на окружности. Построено вложение пространства $D'(\mathbb{S}^1)$ в алгебру мнемофункций с помощью аналитического представления распределений. Получено описание подалгебры, порожденной рациональными мнемофункциями.

В разделе 2.1 строится аналитическое представление распределений на окружности. Так как каждое распределение из $D'(\mathbb{S}^1)$ разлагается в ряд Фурье, причем последовательность коэффициентов $C_k$ возрастает не быстрее некоторой степени $|k|$, определена пара аналитических функций $(f^+, f^-)$, где

$$f^+(z) = \sum_0^\infty C_k z^k, \ |z| < 1,$$

$$f^-(z) = \sum_{-\infty}^{-1} C_k z^k, \ |z| > 1,$$

которую будем называть *аналитическим представлением распределения $f \in D'(\mathbb{S}^1)$ на окружности.* Ниже мы отождествляем исходное распределение с соответствующей кусочно аналитической функцией: записываем $f = (f^+, f^-)$. С помощью аналитического представления определяется естественная аппроксимация $R_a$ распределения $f$ гладкими функциями через значения аналитического представления на окружностях радиуса $1 - \varepsilon$ и радиуса $\frac{1}{1-\varepsilon}$:

$$R_a(f) = [f_\varepsilon],\ f_\varepsilon(z) = f^+((1-\varepsilon)z) + f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k(1-\varepsilon)^{|k|}z^k. \qquad (2)$$

**Теорема 2.2.** [2] *Формула (2) задает вложение пространства $D'(\mathbb{S}^1)$ в алгебру мнемофункций $G(\mathbb{S}^1)$, причем равенство*

$$R_a(fg) = R_a(f)R_a(g)$$

*не выполнено для произвольных $f, g \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ , но выполнено для пар функций, имеющих представление $f = (f^+, 0)$, $g = (g^+, 0)$, где функции $f^+$ и $g^+$ непрерывны в замкнутом круге $|z| \leq 1$, а также для пар функций вида $f = (0, f^-)$, $g = (0, g^-)$, где $f^-$ и $g^-$ непрерывны в области $|z| \geq 1$.*

В разделе 2.2 вводится пространство рациональных распределений и исследуется порожденная ими подалгебра в алгебре мнемофункций.

Распределение $f$ называется *рациональным*, если при его аналитическом представлении $f^\pm$ являются рациональными функциями комплексной переменной $z$. Умножение рациональных распределений с аналитическими представлениями $(f^+, 0)$ и $(g^+, 0)$, а также с представлениями $(0, f^-)$ и $(0, g^-)$ совпадает с поточечным умножением кусочно аналитических функций. Однако произведение распределений с аналитическими представлениями $(f^+, 0)$ и $(0, g^-)$ определяется по другому правилу, которое для простейших рациональных распределений описывается следующим образом.

**Лемма 2.1.** [5] *Если $|\xi| \geq 1$, $|\eta| \leq 1$, то произведение распределений $f = \left(\frac{1}{z-\xi}, 0\right)$ и $g = \left(0, \frac{1}{z-\eta}\right)$ находится по формуле*

$$R_a(f)R_a(g) = c_1(r;\xi;\eta)R_a(f) + c_2(r;\xi;\eta)R_a(g), \qquad (3)$$

*где $c_1(r;\xi;\eta) = \frac{r^2}{\xi-\eta r^2}$ , $c_2(r;\xi;\eta) = \frac{1}{\eta r^2-\xi}$, $r = 1-\varepsilon$.*

В случае, когда $\xi = \eta$, коэффициенты в произведении (3) являются бесконечно большими и такое произведение не ассоциировано с распределением.

Примером произведения рациональных распределений, не согласованного с классическим умножением, является произведение многочлена при вложении $R_a$ и рационального распределения с аналитическим представлением $(0, g^-)$, описанное следующей леммой.

**Лемма 2.2.** [5] *Если $|\eta| \leq 1$, то*

$$(z, 0) \times \Big(0, \frac{1}{z-\eta}\Big) = \Big(1, \frac{\eta}{z-\eta}\Big);$$

$$(z^n, 0) \times \Big(0, \frac{1}{z-\eta}\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} z^k\eta^{n-1-k}, \eta^n\frac{1}{z-\eta}\Big).$$

В силу того, что при умножении рациональных распределений могут появляться мнемофункции с бесконечно большими коэффициентами, наименьшее векторное подпространство, содержащее образы рациональных распределений при вложении $R_a$, не образует алгебру. Леммы 2.1 и 2.2 позволяют получить описание алгебры $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1)$, порожденной рациональными мнемофункциями на окружности.

**Теорема 2.6.** [5] *Алгебра рациональных мнемофункций на окружности $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1)$ состоит из элементов вида*

$$\sum_{k=0}^{m} A_k^+(\varepsilon)(1-\varepsilon)^k z^k + \sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+} \frac{B_{kj}^+(\varepsilon)}{((1-\varepsilon)z-\xi_k)^j} + \sum_{k=1}^{n^-}\sum_{k=1}^{p_k^-} \frac{B_{kj}^-(\varepsilon)}{(\frac{z}{1-\varepsilon}-\eta_k)^j},$$

*где* $|\xi_k| \geq 1,\ \ |\eta_k| \leq 1,\ \ A_k^+(\varepsilon),\ \ B_{kj}^+(\varepsilon),\ \ B_{kj}^-(\varepsilon) \in \mathbb{C}^*$. *В этой алгебре элементы вида* $R_a\big(\frac{1}{z-\xi}, 0\big)$, $R_a\big(0, \frac{1}{z-\eta}\big)$ *и* $R_a(z,0)$ *являются образующими. Закон умножения задается однозначно соотношениями из лемм 2.1 и 2.2.*

В разделе 2.3 для рациональных распределений исследуется вопрос об определении условий ассоциированности произведения с распределением. Нетривиальность данного вопроса состоит в том, что некоторые коэффициенты в произведении соответствующих мнемофункций могут быть бесконечно большими и тогда для произведения может не существовать ассоциированное с ним распределение. Бесконечно большие коэффициенты могут появиться только при нахождении произведений вида

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^m}, 0\right) R_a\left(0, \frac{1}{(z-\xi)^m}\right) = \frac{1}{((1-\varepsilon)z-\xi)^n} \times \frac{1}{(\frac{z}{1-\varepsilon}-\xi)^m},$$

когда рассматриваемые распределения имеют особенности в одной точке. Поэтому вопрос об определении условий, когда произведение рациональных распределений ассоциировано с некоторым распределением, сводится к исследованию случая, когда сингулярные носители сомножителей совпадают. Необходимое и достаточное условие ассоциированности произведения таких рациональных распределений с некоторым распределением описано в следующей теореме.

**Теорема 2.8.** [5] *Пусть рациональные распределения $f$ и $g$ имеют вид*

$$f = \left(\sum_{k=1}^{m} f_{k,S}^+(z), \sum_{k=1}^{m} f_{k,S}^-(z)\right), \quad g = \left(\sum_{k=1}^{m} g_{k,S}^+(z), \sum_{k=1}^{m} g_{k,S}^-(z)\right),$$

*где*

$$f_{k,S}^{\pm}(z) = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}^{\pm}}{(z-z_k)^j}, \quad g_{k,S}^{\pm}(z) = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^{\pm}}{(z-z_k)^j},$$

*а* $S = \{z_k : |z_k| = 1,\ 1 \le k \le m\}$ *– сингулярный носитель распределений* $f$ *и* $g$. *Произведение рациональных мнемофункций* $R_a(f)R_a(g)$ *ассоциировано с некоторым распределением тогда и только тогда, когда для каждого* $k$, $1 \le k \le m$, *при котором* $f^{\pm}_{k,S} \ne 0$, *существует число* $t_k$, *что для коэффициентов справедливы соотношения*

$$B^+_{kj} = t_k A^+_{kj}, \quad B^-_{kj} = -t_k A^-_{kj}.$$

Далее в этом разделе приведен ряд примеров, когда произведения рациональных распределений ассоциированы с распределениями и рассмотрен аналог примера Л. Шварца на окружности.

В **третьей главе** изучаются три подалгебры в алгебре мнемофункций на прямой, порожденные рациональными функциями.

В разделе 3.1 рассматриваются мнемофункции, порожденные аналитическим представлением распределения на прямой. *Аналитическим представлением* распределения $f \in D'(\mathbb{R})$ называется пара $(f^+, f^-)$, где $f^{\pm}$ – функции, аналитические в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, такая, что распределение $f$ ассоциировано с мнемофункцией

$$R_a(f) = [f_\varepsilon], \text{ где } f_\varepsilon(x) = f^+(x + i\varepsilon) - f^-(x - i\varepsilon). \tag{4}$$

Если в аналитическом представлении $f^{\pm}$ являются правильными рациональными функциями, то распределение $f$ называется *рациональным*. Случай рациональных распределений на прямой отличается от рассмотренного во второй главе случая рациональных распределений на окружности, так как рациональным функциям от переменной $z$ на окружности соответствуют на прямой рациональные функции от $e^{ix}$. Это приводит к ряду качественных отличий, хотя формулировки утверждений в этих двух случаях аналогичны.

Способ аппроксимации $R_a$ порождает вложение пространства рациональных распределений $D'_R(\mathbb{R})$ в алгебру мнемофункций, а также задает изоморфизм пространства $D'_R(\mathbb{R})$ и пространства кусочно аналитических рациональных функций, т.е. пар $(f^+, f^-)$, где $f^{\pm}$ – правильные рациональные функции, аналитические в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Умножение, заданное с помощью вложения $R_a$, совпадает с поточечным умножением таких пар функций только для распределений с аналитическими представлениями $(f^+, 0)$ и $(g^+, 0)$. Произведение распределений с аналитическими представлениями $(0, f^-)$ и $(0, g^-)$ ассоциировано с распределением, аналитическое представление которого есть пара $(0, -f^-g^-)$. Следующая теорема показывает, что для произвольных пар $f = (f^+, 0)$ и $g = (0, g^-)$ произведение не определяется через поточечное умножение пар кусочно аналитических функций, но задается по другому правилу. Для простейших рациональных распределений такого вида правило умножения описано в следующей лемме.

**Лемма 3.1.** [3] *Пусть* $\mathrm{Im}\xi \le 0$ *и* $\mathrm{Im}\eta \ge 0$. *Тогда произведение распределений* $f = \left(\frac{1}{z-\xi}, 0\right)$ *и* $g = \left(0, -\frac{1}{z-\eta}\right)$ *находится по формуле*

$$R_a(f)R_a(g) = c(\xi;\eta;\varepsilon)\big(R_a(f) - R_a(g)\big), \tag{5}$$

*где* $c(\xi;\eta;\varepsilon) = \frac{1}{\xi-\eta-2i\varepsilon}$.

На основании данной леммы доказано следующее основное утверждение, описывающее алгебру $\mathcal{A}_R(\mathbb{R})$, порожденную рациональными мнемофункциями.

**Теорема 3.2.** [3] *Алгебра рациональных мнемофункций* $\mathcal{A}_R(\mathbb{R})$ *состоит из элементов вида*

$$\sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+}\frac{A_{kj}^+(\varepsilon)}{(x+i\varepsilon-\xi_k)^j} - \sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-}\frac{B_{kj}^-(\varepsilon)}{(x-i\varepsilon-\eta_k)^j}, \tag{6}$$

*где* $\mathrm{Im}\xi_k \le 0$, $\mathrm{Im}\eta_k \ge 0$, $A_{kj}^+(\varepsilon)$, $B_{kj}^-(\varepsilon) \in \mathbb{C}^*$. *В этой алгебре элементы* $R_a\left(\frac{1}{z-\xi}, 0\right)$ *и* $R_a\left(0, -\frac{1}{z-\eta}\right)$ *являются образующими и правило умножения однозначно определяется правилом умножения образующих, описанным в лемме 3.1.*

В разделе 3.3 получено необходимое и достаточное условие, при котором произведение рациональных распределений ассоциировано с распределением. Это условие аналогично условиям из теоремы 2.8.

**Теорема 3.3.** [3] *Пусть рациональные распределения* $f$ *и* $g$ *имеют вид:*

$$f = \left(\sum_{k=1}^{m} f_k^+(z), \sum_{k=1}^{m} f_k^-(z)\right), \quad g = \left(\sum_{k=1}^{m} g_k^+(z), \sum_{k=1}^{m} g_k^-(z)\right),$$

*и*

$$f_k^\pm(z) = \sum_{j=1}^{n_k}\frac{A_{kj}^\pm}{(z-z_k)^j}, \quad g_k^\pm(z) = \sum_{j=1}^{n_k}\frac{B_{kj}^\pm}{(z-z_k)^j},$$

*где* $S = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ *– заданный набор вещественных чисел. Произведение* $fg$ *ассоциировано с распределением тогда и только тогда, когда для каждого* $k$, $1 \le k \le m$, *найдется такое число* $t_k$, *что*

$$B_{kj}^+ = t_k A_{kj}^+, \quad B_{kj}^- = -t_k A_{kj}^-.$$

Показано, что известные примеры, когда произведение распределений с особенностью в одной точке ассоциировано с распределением, приведенные в монографии[2], являются частными случаями данного утверждения.

[2]Антосик, П. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. – М.: Мир, 1976. – 312 с.

В разделе 3.4 рассматриваются правильные самоподобные рациональные мнемофункции, т.е. мнемофункции вида $f_\varepsilon(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, где $f$ есть правильная рациональная функция, не имеющая особенностей на вещественной прямой. В работе показано, что для самоподобных рациональных мнемофункций в пространстве распределений существуют асимптотические разложения вида (1), которые строятся с помощью следующего утверждения.

**Предложение 3.1.** *Пусть правильная рациональная функция $f$, не имеющая особенностей на вещественной прямой, при $x \to \infty$ обладает асимптотическим разложением $f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^{-k}$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеет место асимптотическое разложение в $D'(\mathbb{R})$*

$$f_\varepsilon(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \left( a_{k+1} P\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right) + \frac{(-1)^k A_k}{k!} \delta^{(k)} \right), \text{ где} \tag{7}$$

$$A_k = \widetilde{M}_k(f) := \int_{|x|>1} x^k \left[ f(x) - \sum_{j=1}^{k+1} a_j x^{-j} \right] dx + \int_{-1}^{1} x^k \left[ f(x) - \sum_{j=1}^{k} a_j x^{-j} \right] dx$$

*есть регуляризованные моменты функции $f$.*

Приведен ряд конкретных примеров асимптотических разложений самоподобных рациональных мнемофункций и показано, что такие мнемофункции однозначно определяются по своему разложению.

В разделе 3.5 исследуется вопрос о построении асимптотического разложения для произведения самоподобных рациональных мнемофункций. Отмечено, что сами асимптотические ряды умножать нельзя, так как при их формальном перемножении возникают произведения распределений, не определенные в классическом смысле. Поэтому в действительности умножаются не асимптотические ряды, но сами мнемофункции, а асимптотические ряды служат только для получения более наглядной информации о поведении произведения мнемофункций. Показано, что в случае самоподобных рациональных мнемофункций асимптотическое разложение произведения однозначно определяется по разложениям сомножителей, что не выполнено для произвольных мнемофункций.

Далее рассматриваются мнемофункции вида $\frac{1}{\varepsilon^m} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, так как только они могут быть ассоциированы с нетривиальными распределениями. Описание алгебры $\mathcal{A}_{as}(\mathbb{R})$, порожденной такими мнемофункциями, содержится в следующей теореме.

**Теорема 3.4.** [4] *Векторное пространство $\mathcal{A}_{as}(\mathbb{R})$, порожденное элементами вида*

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_k} \frac{B_{kj}(\varepsilon)}{(x - \xi_k \varepsilon)^j}, \text{ где } \mathrm{Im}\xi_k \neq 0,\ B_{kj}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^*, \tag{8}$$

*образует подалгебру в алгебре мнемофункций на прямой. В ней асимптотическое разложение произведения мнемофункций однозначно определяется по асимптотическим разложениям сомножителей с помощью явно заданных формул.*

Согласно (7), мнемофункция (8) может быть ассоциирована только с распределением вида

$$\sum_{k=0}^{m}\left[C_k\delta^{(k)}+C_k'P\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)\right]. \tag{9}$$

В разделе 3.6 вводится понятие скошенного аналитического представления рационального распределения, которое представляет собой некоторую модификацию классического. Семейство гладких функций вида (8) похоже на семейство (4), построенное с помощью аналитического представления, однако отличается тем, что в (4) движение полюсов слагаемых к точке $x$ при $\varepsilon\to 0$ осуществляется по вертикальным прямым, в то время, как здесь для каждого слагаемого по своей наклонной прямой. Поэтому, если мнемофункция (8) ассоциирована с распределением $f$, то эту мнемофункцию будем называть *скошенным аналитическим представлением* для $f$. Принципиальным отличием от рассмотренных выше алгебр рациональных мнемофункций здесь является то, что для каждого распределения вида (9) существует много скошенных аналитических представлений. Поэтому такое представление не задает вложения пространства распределений вида (9) в алгебру $\mathcal{A}_{as}(\mathbb{R})$ и взаимосвязь между этим пространством и алгеброй $\mathcal{A}_{as}(\mathbb{R})$ такая же, как между пространством всех распределений и алгеброй всех мнемофункций.

Мнемофункция (8) может быть представлена в виде

$$f_\varepsilon(x)=\sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+}\frac{B_{kj}^+}{(x-\xi_k\varepsilon)^j}-\sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-}\frac{B_{kj}^-}{(x-\eta_k\varepsilon)^j},$$

где $\mathrm{Im}\xi_k<0,\ \mathrm{Im}\eta_k>0$. Это представление устанавливает изоморфизм $R_{sl}$ между множеством пар рациональных функций

$$\Big\{\Big(\sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+}\frac{B_{kj}^+}{(z-\xi_k)^j},\sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-}\frac{B_{kj}^-}{(z-\eta_k)^j}\Big)\Big\},$$

где $\mathrm{Im}\xi_k<0,\ \mathrm{Im}\eta_k>0$, и алгеброй $\mathcal{A}_{as}(\mathbb{R})$. Для простейших элементов алгебры правило умножения задается следующим образом.

**Лемма 3.4.** [4] *Пусть* $\mathrm{Im}\xi<0$ *и* $\mathrm{Im}\eta>0$. *Тогда произведение мнемофункций* $R_{sl}\big(\frac{1}{z-\xi},0\big)$ *и* $R_{sl}\big(0,-\frac{1}{z-\eta}\big)$, *находится по формуле*

$$R_{sl}\left(\frac{1}{z-\xi},0\right)R_{sl}\left(0,-\frac{1}{z-\eta}\right)=c(\xi;\eta;\varepsilon)\left(R_{sl}\left(\frac{1}{z-\xi},0\right)-R_{sl}\left(0,-\frac{1}{z-\eta}\right)\right),$$

*где* $c(\xi;\eta;\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon(\xi-\eta)}$.

В отличие от леммы 3.1, коэффициент $c(\xi;\eta;\varepsilon)$ всегда является бесконечно большим, и произведение может быть ассоциировано с распределением, только если особенности функций в скошенном аналитическом представлении лежат в одной полуплоскости, что показывает

**Лемма 3.5.** [4] *Пусть* $\mathrm{Im}\xi_1$, $\mathrm{Im}\xi_2 < 0$. *Тогда* $R_{sl}\Big(\frac{1}{z-\xi_1}, 0\Big)R_{sl}\Big(\frac{1}{z-\xi_2}, 0\Big)$ *ассоциировано с распределением* $P\big(\frac{1}{x^2}\big) + i\pi\delta'$. *Аналогично произведение* $R_{sl}\Big(0, -\frac{1}{z-\eta_1}\Big)R_{sl}\Big(0, -\frac{1}{z-\eta_2}\Big)$, *где* $\mathrm{Im}\eta_1$, $\mathrm{Im}\eta_2 > 0$, *ассоциировано с распределением* $P\big(\frac{1}{x^2}\big) - i\pi\delta'$.

Следующая теорема описывает алгебру мнемофункций, порожденную скошенным аналитическим представлением рациональных распределений.

**Теорема 3.5.** [4] *Элементы вида* $R_{sl}\big(\frac{1}{z-\xi}, 0\big)$ *и* $R_{sl}\big(0, -\frac{1}{z-\eta}\big)$ *являются образующими в алгебре* $\mathcal{A}_{as}(\mathbb{R})$, *и произведение элементов алгебры однозначно определяется через соотношения, полученные в леммах 3.4 и 3.5.*

**Глава 4** содержит одно из приложений теории мнемофункций к решению дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$u' + qu = 0 \tag{10}$$

с обобщенным коэффициентом $q \in D'(\mathbb{R})$, имеющим особенность только в нуле. Распределение $u \in D'(\mathbb{R})$ нельзя подставить в левую часть уравнения, т.к. в теории обобщенных функций не определено произведение $qu$, входящее в уравнение. Поэтому в классической теории обобщенных функций не определено понятие решения такого уравнения.

Используемый в теории мнемофункций подход к определению понятия решения для уравнений с обобщенными коэффициентами заключается в следующем. Обобщенный коэффициент $q$ заменяется на ассоциированную с ним мнемофункцию, т.е. на его аппроксимацию семейством гладких функций $q_\varepsilon$, зависящим от малого параметра $\varepsilon$, в результате чего возникает семейство дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами

$$u'_\varepsilon(x) + q_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = 0. \tag{11}$$

Говорят, что задача Коши $u(x_0) = C$ для уравнения (10) *разрешима в пространстве распределений*, если у семейства $u_\varepsilon(x)$ решений уравнения (11), удовлетворяющих условию Коши $u_\varepsilon(x_0) = C$, существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon := U$$

в смысле сходимости в $D'(\mathbb{R})$, а указанный предел $U$ называется *обобщенным решением задачи Коши в пространстве распределений при заданном способе аппроксимации.*

В случае существования обобщенного решения после перехода к пределу в (11) получается равенство $U' = -qU$, означающее, в частности, что распределение $-U'$ можно считать произведением распределений $q$ и $U$.

В разделе 4.3 проводится анализ дифференциального уравнения

$$u' + \frac{1}{x}u = 0, \tag{12}$$

у которого коэффициент имеет особенность. Показано, что даже для этого простейшего уравнения вопрос о существовании обобщенного решения представляет собой содержательную задачу.

При переходе к анализу обобщенных решений прежде всего существенно, что функции $\frac{1}{x}$ соответствует целое семейство распределений вида $q = P(\frac{1}{x}) + M\delta$, где $M$ – произвольная комплексная постоянная. В результате классическому уравнению (12) соответствует семейство уравнений с обобщенными коэффициентами вида

$$u' + \Big[P\Big(\frac{1}{x}\Big) + M\delta\Big]u = 0. \tag{13}$$

Так как при любом $M$ распределение $q$ является рациональным, то его аппроксимирующее семейство может быть записано в виде

$$q_\varepsilon(x) = \lambda\frac{1}{x+i\varepsilon} + (1-\lambda)\frac{1}{x-i\varepsilon}, \text{ где } \lambda = \frac{\pi + iM}{2\pi}. \tag{14}$$

Следующая теорема показывает, что обобщенное решение задачи Коши для уравнения (12) существует только при некоторых значениях $M$ и, следовательно, существование решения зависит от достаточно тонких свойств обобщенного коэффициента.

**Теорема 4.1.** [10] *При аппроксимации* (14) *коэффициента* $q = P(\frac{1}{x}) + M\delta$ *задача Коши для уравнения* (13) *разрешима тогда и только тогда, когда обобщенный коэффициент имеет вид* $q = P(\frac{1}{x}) + i\pi(2m+1)\delta$, *где* $m$ *целое число. При* $m < 0$ *обобщенным решением является рациональное распределение* $P(\frac{1}{x}) - i\pi\delta$, *а при* $m \geq 0$ *– распределение* $P(\frac{1}{x}) + i\pi\delta$.

Для $m = 0$ и $m = 1$ решение уравнения (13) ищется в виде

$$u_\varepsilon(x) = t\lambda\frac{1}{x+i\varepsilon} - t(1-\lambda)\frac{1}{x-i\varepsilon}$$

и находится с помощью теоремы 3.3 о существовании произведения рациональных мнемофункций [3].

При других целых значения $m$ решения $u_\varepsilon(x)$ аппроксимирующих уравнений представляются в виде произведения рациональной мнемофункции и некоторой аппроксимации многочлена, благодаря чему поведение произведения $u_\varepsilon(x)q_\varepsilon(x)$ описывается леммой 3.1 [3].

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

## Основные научные результаты диссертации

1. Получено описание алгебр рациональных мнемофункций на прямой и на окружности: выделены их образующие, сформулировано в явном виде правило умножения образующих. Показано, что в исследуемых алгебрах произведение образующих переходит в их линейную комбинацию. Дано приложение к задаче придания смысла произведению распределений. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14].

2. Получены необходимые и достаточные условия для существования произведения рациональных распределений. Дано приложение к задаче об определении решения дифференциального уравнения с обобщенным коэффициентом. [3, 5, 9].

3. Получено необходимое и достаточное условие разрешимости семейства модельных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами в пространстве распределений. [3, 5, 9, 10].

## Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты непосредственно связаны с решением проблемы умножения распределений; они могут быть применены в теории дифференциальных уравнений, в квантовой теории поля. Результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе на спецкурсах по функциональному анализу и смежным дисциплинам.

# СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

## Статьи в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении учёных степеней и присвоении учёных званий в Республике Беларусь

1. Антоневич, А.Б. Алгебра мнемофункций на окружности / А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова, Е.В. Шкадинская // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – №3(36). – С. 55–62.

2. Антоневич, А.Б. Вложения распределений в алгебру мнемофункций на окружности / А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4(37). – С. 52–61.

3. Шагова, Т.Г. Рациональные мнемофункции на $\mathbb{R}$ / Т.Г. Шагова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2019. – № 2. – С. 6–17.

4. Шагова, Т.Г. Самоподобные рациональные мнемофункции и их связь с аналитическим представлением распределений / Т.Г. Шагова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 288–298.

5. Антоневич, А.Б. Рациональные мнемофункции на окружности / А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 3(40). – С. 53–62.

## Статьи в других научных изданиях

6. Шагова, Т.Г. К вопросу об асимптотических разложениях рациональных мнемофункций / Т.Г. Шагова // Труды БГТУ. – 2016. – №6. – С. 28–30.

7. Шагова, Т.Г. Об асимптотических разложениях рациональных мнемофункций / Т.Г. Шагова // Труды БГТУ. Серия 3: Физико-математические науки и информатика. – 2018. – №1. – С. 9–11.

## Статьи в в сборниках материалов научных конференций

8. Антоневич, А.Б. Об одном дифференциальном уравнении в алгебре рациональных мнемофункций / А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова // XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2019) : материалы конференции, Могилев, 14–17 мая 2019 г. / Ред.: А.К. Деменчук, С.Г. Красовский, Е.К. Макаров. – Минск, 2019. – Ч. 2. – С. 49–51.

9. Шагова, Т.Г. Умножение рациональных распределений [Электронный

ресурс] / Т.Г. Шагова // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – IX : материалы докладов, Ростов-на-Дону, 22–25 апреля 2019г. / Южный федеральный университет ; ред.: А.В. Гиль. – Ростов-на-Дону, 2019. – С. 43. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

10. Антоневич, А.Б. Решения дифференциального уравнения $u' + \frac{1}{x}u = 0$ в пространстве распределений [Электронный ресурс] / А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2019) : сборник материалов международной конференции, Крым, Батилиман, 17–29 сентября 2019 г. / Крымский федеральный ун-т им. В.И. Вернадского ; редкол.: В.И. Войтицкий (отв. ред.) [и др.]. – Симферополь, 2019. – С. 10–13. – Режим доступа: http://kromsh.info. – Дата доступа: 1.10.2019.

**Тезисы**

11. Шагова, Т.Г. Асимптотические разложения рациональных мнемофункций [Электронный ресурс] / Т.Г. Шагова // Физико-математические науки : тезисы 81-й науч.-техн. конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 1–12 февраля 2017 г. / Белорус. гос. технол. ун-т; ред.: И.В. Войтов. – Минск, 2017. – С. 34. – Режим доступа: https://www.belstu.by/Portals/0/userfiles/37/06-fiz-mat-tezisi-2017_1.pdf. – Дата доступа: 15.05.2017.

12. Антоневич, А.Б. Алгебра рациональных мнемофункций / А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова // XVII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2017) : тез. докладов конференции, Минск, 16–20 мая 2017 г. / Ред.: А.К. Деменчук, С.Г. Красовский, Е.К. Макаров. – Минск, 2017. – Ч. 2. – С. 31–32.

13. Шагова, Т.Г. Обобщенные функции, ассоциированные с рациональными мнемофункциями [Электронный ресурс]/ Т.Г. Шагова // Физико-математические науки : тезисы 82-й науч.-техн. конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 1–14 февраля 2018 г. / Белорус. гос. технол. ун-т ; ред.: И.В. Войтов. – Минск, 2018. – С. 54–55. – Режим доступа: https://www.belstu.by/Portals/0/userfiles/37/0006-Tezisi-fIZ-MAT-2018.pdf. – Дата доступа: 12.05.2018.

14. Антоневич, А.Б. Распределения и мнемофункции на окружности / А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова // XVIII Международная научная конферен-

ция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2018) : тез. докладов конференции, Гродно, 15 – 18 мая 2018 г.: в 2 ч. / Ред.: А.К. Деменчук, С.Г. Красовский, Е.К. Макаров. – Минск, 2018. – Ч. 2. – С. 49–51.

## РЕЗЮМЕ

Шагова Татьяна Григорьевна

**Рациональные мнемофункции и их приложения**

*Ключевые слова*: обобщенная функция, распределение, способ аппроксимации, мнемофункция, пространство рациональных распределений, алгебра рациональных мнемофункций, дифференциальное уравнение с обобщенным коэффициентом.

Целью диссертационной работы является изучение алгебр рациональных мнемофункций и приложение их свойств к исследованию смежных задач. Для достижения поставленной цели использовались методы современного анализа, связанные с асимптотическими разложениями интегралов, зависящих от малого параметра, теорией аналитических функций, теорией мнемофункций.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Проведен детальный анализ структуры алгебр, порожденных рациональными мнемофункциями на прямой и на окружности. Описаны элементы алгебр, выделены образующие, в явном виде задано правило умножения образующих.

2. Получены необходимые и достаточные условия, при которых произведение рациональных распределений ассоциировано с распределением. Дано приложение к дифференциальным уравнениям с обобщенными коэффициентами.

3. Получено условие разрешимости семейства модельных дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются рациональные распределения, соответствующие функции $\frac{1}{x}$.

Настоящие результаты являются новыми и согласуются с полученными ранее.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты непосредственно связаны с решением проблемы умножения обобщенных функций. Они могут иметь приложения в теории дифференциальных уравнений, квантовой теории поля. Результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе при чтении специальных курсов.

# РЭЗЮМЭ

Шагава Таццяна Рыгораўна

**Рацыянальныя мнемафункцыі і іх застасаванні**



*Ключавыя словы*: абагульненая функцыя, размеркаванне, спосаб апраксімацыі, прастора рацыянальных размеркаванняў, алгебра рацыянальных мнемафункцый, дыферэнцыяльнае раўнанне з абагульненым каэфіцыентам.

Мэта дысертацыйнай працы — вывучэнне алгебр рацыянальных мнемафункцый і застасаванне іх уласцівасцей да даследавання сумежных задач. Для дасягнення пастаўленнай мэты выкарыстоўваліся метады сучаснага аналіза, звязаныя з асімптатычным раскладам інтэгралаў, якія залежаць ад малога параметра, тэорыяй аналітычных функцый, тэорыяй мнемафункцый.

У дысертацыйнай працы атрыманы наступныя новыя вынікі:

1. Праведзены дэталёвы аналіз структур алгебр, спароджаных рацыянальнымі мнемафункцыямі на прамой і на акружнасці. Апісаны элементны алгебр, вылучаны ўтваральныя, зададзена правіла множання ўтваральных у яўным выглядзе.

2. Атрыманы неабходныя і дастатковыя ўмовы, пры якіх здабытак рацыянальных размеркаванняў асацыяваны з размеркаваннем. Дадзена застасаванне да тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў з абагульненымі каэфіцыентамі.

3. Атрымана неабходная і дастатковая ўмова вырашальнасці сямейства мадэльных дыферэнцыяльных раўнанняў, каэфіцыентамі якіх з'яўляюцца рацыянальныя размеркаванні, якія адпавядаюць функцыі $\frac{1}{x}$.

Вынікі з'яўляюцца новымі і адпавядаюць атрыманым раней.

Дысертацыя мае тэарэтычны характар. Атрыманыя вынікі непасрэдна звязаны з праблемай множання абагульненых функцый. Яны могуць мець застасаванні ў тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, квантавай тэорыі поля. Вынікі дысертацыі могуць быць выкарыстаны ў навучальным працэсе пры чытанні спецыяльных курсаў.

## SUMMARY

Shahava Tatsiana Rygoraŭna

**Rational mnemofunctions and their applications**

*Keywords*: generalized function, distribution, approximation method, space of rational distributions, algebra of rational mnemofunctions, differential equation with generalized coefficient.

The goal of the thesis is to study algebras of rational mnemofunctions and to apply their properties to related problems. Such modern methods of analysis as asymptotic expansions of integrals depending on small parameter, the theory of analytical functions, the theory of mnemofunctions have been used in the thesis.

The following new results have been obtained in the thesis:

1. The structure of algebras generated by rational mnemofunctions has been analysed in detail. The algebras elements have been described, the generators have been singled out, the multiplication rule for generators has been formulated in explicit form.

2. Necessary and sufficient conditions under which the product of rational distributions is associated with a distribution has been obtained. The application to the differential equations with generalized coefficients has been given.

3. The necessary and sufficient condition of solvability for the family of model differential equations with generalized coefficients, corresponding rational function $\frac{1}{x}$, has been obtained.

The present results are new and agreed with the obtained earlier.

The results of the thesis are theoretical. They are directly related to the generalized functions multiplication problem and have applications to the theory of differential equations and the quantum field theory. The results of the thesis can be applied into the educational process when special courses are delivered.