АППАРАТ ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

А. П. Карпова

Белорусский государственный университет, г. Минск;
karpova.a.p@yandex.by;
науч. рук. – Н. В. Бровка, д-р пед. наук, канд. физ.-мат. наук, проф.

В данной работе рассмотрена актуальность включения в подготовку студентов-математиков специального курса по изучению аппарата дробного интегрирования и дифференцирования, обусловленная широким классом применения этого аппарата.

Ключевые слова: обучение студентов; целое интегро-дифференцирование; дробное интегро-дифференцирование; задача о таутохроне.

Одним из вариантов расширения и углубления содержания математической подготовки студентов-математиков в магистратуре является *изучение материалов по дробному интегро-дифференцированию*.

Дробным исчислением называется область математического анализа, которая рассматривает интегралы и производные дробных, вещественных и комплексных порядков от функций одной или нескольких переменных. Вообще говоря, термин «дробный» для таких случаев не вполне корректен, но является общепринятым.

Дробный математический анализ имеет давнюю историю, но несмотря на это, является стремительно развивающейся областью современного анализа и имеет чрезвычайно богатое содержание. В настоящее время фактически нет ни одной области классического анализа, которой не коснулся бы дробный анализ, который тесно связан с разнообразными вопросами теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений, механики, уравнений математической физики и др. Математический язык операторов дробного интегро-дифференцирования незаменим для описания и исследования физических фрактальных систем, процессов стохастического переноса, изучения механики, биологии, теории вероятностей и др. прикладных наук.

Дифференциальные уравнения дробных порядков дают эффективные модели многих процессов в природе и теории сложных наук.Разработка методики введения дробных интегралов и производных определяется тем, что этот аппарат опирается на целый ряд математических понятий и осуществляется различными авторами по-разному.

Наиболее широким и часто используемым является определение Римана-Лиувилля [2],

$$(D_x^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \;\; x > a, \;\; 0 \le n-1 < \alpha \le n$$
,

в котором используются стандартные обозначения оператора дифференцирования и Г-функции.

Упрощением данного определения является определение Капуто, которое применимо для достаточно гладких функций, то есть, таких, для которых операция дифференцирования может быть внесена под знак интеграла [1]:

$$(D_x^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt, \;\; x > a, \;\; 0 \le n-1 < \alpha \le n$$
.

Согласно Грюнвальду-Летникову, понятие дробной производной вводится как предел разностных отношений [2]:

$$(D_a^q f)(x) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{x-a}{N}\right)^{-q} \frac{1}{\Gamma(-q)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} f\left(x - k\frac{x-a}{N}\right)$$
.

На сегодняшний день, вышеприведенные определения не являются единственными, так как еще известно множество производных дробного порядка: Капуто, Маршо, Вейля и другие (см. [2], [5]). Все эти операторы дробного интегро-дифференцирования имеют довольно громоздкую конструкцию, и могут принимать различные формы, действия над которыми не всегда совпадают.

С другой стороны, так как, все-таки, однозначного определения производных нецелого порядка не существует, нельзя твердо утверждать, какой из подходов целесообразно изучать, а какой нет. Но, изучение литературы по данной теме, позволило прийти к выводу о том, что наиболее удобным и доступным для освоения является способ введения, опирающийся на конструкцию Римана-Лиувилля. Это связано с тем, что в ее основе лежит обобщение интегрального уравнения Абеля, которое вводится через определение обычной производной и различных модификаций гамма-функции, которые изучаются в курсе математического анализа на первой ступени высшего образования. Также, при наложении ряда условий на конструкцию Римана-Лиувилля, она совпадает с конструкциями Маршо, Капуто, Грюнвальда-Летникова (об этом свидетельствует ряд источников – [2], [3], [5] и др.), что делает определение производной нецелого порядка Римана-Лиувилля более общим и универсальным.

Что касается дробной производной Грюнвальда-Летникова, то она является абсолютно альтернативным подходом введения таких конструкций, так как заключается в том, что ее можно представить, как отношение приращения (разности значений) функции порядка n к приращению аргумента порядка n, снимая ограничение, что n – положительное число. Такой подход был предложен относительно давно –

А.К. Грюнвальдом в 1867 году, а А.В. Летниковым в 1868 году, но в последнее время смог привлечь к себе внимание удобством в приближенных вычислениях. Эти формулы положены в основу большинства современных вычислительных алгоритмов решения дробно-дифференциальных уравнений.Также необходимо подчеркнуть, что для конструкций дробного интегро-дифференцирования можно выявить аналогии с обычным дифференцированием на примере свойств, что значительно упрощает понимание и усвоение материала по данной теме (см. книги [3], [5]).

Стоит отметить, что широкий класс применений в вычислениях аппарат дробного интегро-дифференцирования получил для численных методов и уравнений математической физики (описывающих аномальные процессы диффузии и др.), так как для ряда таких задач обычные методы вычислений не дают конкретного ответа (являются недостаточными) и приходится использовать более «тонкие» аппараты, в основе которых лежат различные операторы дробного интегро-дифференцирования. При этом, для одних задач эти конструкции могут давать результаты различной степени точности, а для других – приблизительно одинаковые. Таким исследованиям в настоящее время посвящено большое количество работ (см. книги [2], [3], [4], [5] и статью[1]). С целью пояснения прикладных возможностей и для мотивации введения аппарата дробного интегро-дифференцирования, приведем пример *первой прикладной задачи* теории дробного исчисления: **задачи о таутохронной кривой**, рассмотренной Абелем в 1823 году*: найти такую кривую (таутохронную), что независимо от высоты падения шарика, не имеющего начальной скорости, он будет достигать самой низкой точки этой кривой за одинаковый промежуток времени*.

Возникает вопрос: где же связь с аппаратом дробного интегро-дифференцирования? В ходе решения этой задачи, оказывается, что такая кривая существует и ее уравнение записывается в виде дробной производной от функции, зависящей от высоты падения шарика.

Рассмотрим решение этой задачи, опираясь на [5]: пусть $h(s)$ – высота точки таутохроны (см.рис.1), соответствующая длине $s(h)$ ее участка от начала координат до этой точки. Из закона сохранения энергии

$$\dot{s}(h(t))^2/2 + gh = E$$

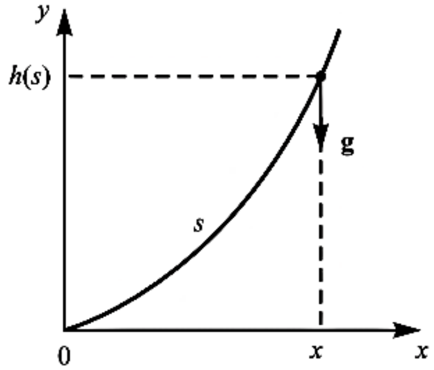

Рис. 1

с учетом начального условия $\dot{s}(y) = 0$ имеем

$$\dot{s}^2/2 = g(y-h).$$

Интегрирование путем разделения переменных дает

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{s(y)} \frac{ds}{\sqrt{y-h(s)}}.$$

Вводя обратную к $h(s)$ функцию $\eta(h)$, произведем под интегралом замену переменной

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y} \frac{d\eta/dh}{\sqrt{y-h}} dh = \sqrt{\frac{\pi}{2g}}\, {}_0^{1/2}D_y \eta(y),$$

сразу приводящую к полупроизводной Капуто. Чтобы завершить решение задачи, нужно найти из этого уравнения функцию $s=\eta(y)$, обратить ее, $y=h(s)$, и выразить s через переменные x и y, но продолжать не будем, так как целью было показать, как в процессе решения известнейшей механической задачи возникают дробные производные.

Собственно, то, что называется *таутохронной кривой* в рассмотренной задаче – это та часть циклоиды, где между переменными x и y установлено взаимно однозначное соответствие.

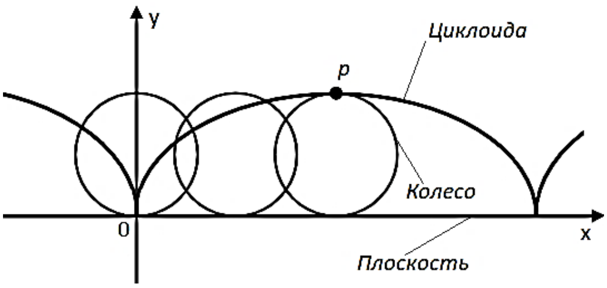

Рис. 2. Классическая циклоида

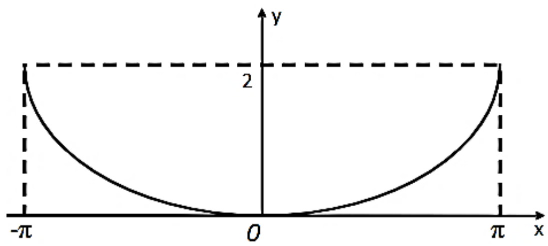

Рис. 3. Таутохрона или арка циклоиды

Библиографические ссылки

1. *Корчагина А. Н., Мержиевский Л. А.* Численное моделирование диффузионных процессов в фрактальных средах // Ученые записи ЗГУ. Сер. «Физика, математика, техника, технология». 2013. № 3 (50). С. 53–59.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.
3. *Васильев В. В., Симак Л. А.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. К., 2008.
4. *Ляхов Л. Н., Шишкина Э. Л.* Дробные производные и интегралы и их приложения. Воронеж, 2011.
5. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. Ульяновск, 2008.