*Следствие 2.* Пусть $\alpha \in (0,1)$ и $\Delta = G_{N|\tau|}^{-1}(1-\alpha)$ – квантиль уровня $1-\alpha$ стандартного $\chi^2$ –распределения с $N|\tau|$ степенями свободы. Тогда при $n \to \infty$ размер теста равен $\alpha$.

**Литература**


1. *Медведев Г.А.* Вероятностные методы исследования экстремальных систем / М., Наука, 1967. 380 с.
2. *Уотермен М.С.* Математические методы для анализа последовательностей ДНК / М., Мир, 1999. 350 с.
3. *Харин Ю.С. и др.* Математические и компьютерные основы криптологии / Мн.: Новое знание, 2003.
4. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова / М., Наука, 1970. 272 с.
5. *Buhlmann P.* Variable length Markov chains // The Annals of Statistics. 1999. V. 27. № 2. P. 480-513.


# ОЦЕНИВАНИЕ РИСКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЦЕПЕЙ МАРКОВА


**К. С. Матецкий**


## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Очень часто на практике встречается задача прогнозирования цепей Маркова с конечным пространством значений $A = \{0,...,N-1\}$, $N \geq 2$ по наблюдаемой реализации $X_1^T = \{x_1,...,x_T\} \in A^T$ длительности $T \geq 2$ [1 - 4].

При известной матрице вероятностей одношаговых переходов $P \in \mathrm{R}^{N \times N}$ и стационарном распределении $\pi^0 \in \mathrm{R}^N$ оптимальная по критерию минимума риска прогнозирования для (0-1)-функции потерь прогнозирующая статистика имеет вид [1, с. 242]

$$\hat{x}_{T+\tau} = \arg\max_{j \in A} (P^\tau)_{x_T, j}, \tag{1}$$

где $\tau \geq 1$ – «горизонт прогнозирования». Риск прогнозирования для статистики (1) равен

$$r(\tau) = 1 - \sum_{i \in A} \left(\pi^{0\prime} P^T\right)_i \max_{j \in \mathrm{A}} (P^\tau)_{i,j}.$$

В том случае, когда матрица вероятностей переходов не известна, строится ее оценка максимального правдоподобия [1, с. 244]:

$$\hat{p}_{ij} = \begin{cases} \sum_{t=1}^{T-1} \delta_{x_t,i} \delta_{x_{t+1},j} / \sum_{t=1}^{T-1} \delta_{x_t,i}, & \textit{если } \sum_{t=1}^{T-1} \delta_{x_t,i} > 0, \\ \dfrac{1}{N}, & \textit{если } \sum_{t=1}^{T-1} \delta_{x_t,i} = 0. \end{cases}$$

При этом «подстановочная» прогнозирующая статистика имеет вид

$$\tilde{x}_{T+\tau} = \arg\max_{j \in A} (\hat{P}^{\tau})_{x_T, j}. \qquad (2)$$

Задача состоит в исследовании зависимости риска $\tilde{r}(T,\tau)$ «подстановочной» прогнозирующей статистики (2) от длины наблюдаемой реализации $T$.

**ТОЧНАЯ ФОРМУЛА РИСКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ**

В дальнейшем будем рассматривать стационарную цепь Маркова с вектором стационарных распределений $\pi = \pi^0$ и $N = 2$, $\tau = 1$. Тогда элементы матрицы вероятностей одношаговых переходов и вектора стационарных распределений будем обозначать

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}, \ \pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 1.** Риск «подстановочной» прогнозирующей статистики цепи Маркова равен

$$\tilde{r}(T,1) = 1 - p_{01}\pi_0 - p_{10}\pi_1 - (p_{00} - p_{01})(\pi_0 S_1 + \pi_1 S_2) -$$
$$(p_{11} - p_{10})(\pi_0 S_3 + \pi_1 S_4),$$

где

$$S_1 = p_{00}^{T-1} + \sum_{i=1}^{[(T-2)/3]} \sum_{j=2i+1}^{T-1-i} C_j^i C_{T-2-j}^{i-1} p_{00}^{j-i} p_{01}^i p_{10}^i p_{11}^{T-1-j-i} +$$
$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{[(T-1)/3]} C_{2i}^i C_{T-2-2i}^{i-1} p_{00}^i p_{01}^i p_{10}^i p_{11}^{T-1-3i},$$

$$S_2 = \sum_{i=0}^{[(T-3)/3]} \sum_{j=2i+1}^{T-2-i} C_j^i C_{T-2-j}^i p_{00}^{j-i} p_{01}^i p_{10}^{i+1} p_{11}^{T-2-j-i} +$$
$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{[(T-2)/3]} C_{2i}^i C_{T-2-2i}^i p_{00}^i p_{01}^i p_{10}^{i+1} p_{11}^{T-2-3i},$$

$$S_3 = \sum_{i=0}^{[(T-3)/3]} \sum_{j=2i+1}^{T-2-i} C_j^i C_{T-2-j}^i p_{00}^{T-2-j-i} p_{01}^{i+1} p_{10}^i p_{11}^{j-i} +$$
$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{[(T-2)/3]} C_{2i}^i C_{T-2-2i}^i p_{00}^{T-2-3i} p_{01}^{i+1} p_{10}^i p_{11}^i,$$

$$S_4 = p_{11}^{T-1} + \sum_{i=1}^{[(T-2)/3]} \sum_{j=2i+1}^{T-1-i} C_j^i C_{T-2-j}^{i-1} p_{00}^{T-1-j-i} p_{01}^i p_{10}^i p_{11}^{j-i} +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{[(T-1)/3]} C_{2i}^i C_{T-2-2i}^{i-1} p_{00}^{T-1-3i} p_{01}^i p_{10}^i p_{11}^i,$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа $\alpha$.

## ЗНАЧЕНИЕ РИСКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПРИ СИММЕТРИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕХОДОВ

Рассмотрим частный случай исходной задачи, когда матрица вероятностей одношаговых переходов симметрическая. Тогда элементы матрицы вероятностей одношаговых переходов и вектора стационарных распределений имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{01} & p_{00} \end{pmatrix}, \ \pi = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $p_{00} + p_{00} = 1$, причем $0 < p_{00} < 1$.

**Теорема 2.** В случае (3) риск «подстановочной» прогнозирующей статистики равен

$$\tilde{r}(T,1) = p_{00} + (p_{01} - p_{00})(p_{00}^{T-1} + \sum_{i=1}^{[(T-2)/3]} \sum_{j=2i+1}^{T-1-i} C_j^i C_{T-2-j}^{i-1} p_{00}^{T-1-2i} p_{01}^{2i} +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{[(T-1)/3]} C_{2i}^i C_{T-2-2i}^{i-1} p_{00}^{T-1-2i} p_{01}^{2i} + \sum_{i=0}^{[(T-3)/3]} \sum_{j=2i+1}^{T-2-i} C_j^i C_{T-2-j}^{i} p_{00}^{T-2-2i} p_{01}^{2i+1} +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{[(T-2)/3]} C_{2i}^i C_{T-2-2i}^{i} p_{00}^{T-2-2i} p_{01}^{2i+1}).$$

**Следствие.** Если $p_{00} = p_{01} = \dfrac{1}{2}$, то $\tilde{r}(T,1) = r(1) = \dfrac{1}{2}$.

**Теорема 3.** В случае (3), если $p_{00} < \dfrac{1}{3}$, то имеет место асимптотика

$$\tilde{r}(3k,1) = r(1) + o\left( \frac{1}{\sqrt{k}} \left( \frac{27}{4} p_{00} p_{01}^2 \right)^k \right),$$

где $r(1) = p_{00}$, если $p_{00} > \dfrac{2}{3}$, то имеет место асимптотика

$$\tilde{r}(3k,1) = r(1) + o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{27}{4}p_{00}^2 p_{01}\right)^k\right),$$

где $r(1) = p_{01}$.

**Литература**


1. *Харин Ю. С.* Оптимальность и робастность в статистическом прогнозировании // Мн.: БГУ, 2008.
2. *Basawa I. V., Rao B. L. C.* Statistical interference for stochastic processes // N.Y.: Academic Press, 1980.
3. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы // М.: ИЛ, 1956.
4. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова // М.: Наука, 1970.


# ОПТИМАЛЬНОЕ НЕПРЯМОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ


**Е. С. Нехай**


Рассматривается терминальная задача оптимального непрямого управления, в которой управляющие сигналы и воздействия стеснены геометрическими ограничениями. В системах непрямого управления информация о поведении объекта управления поступает в управляющий орган, который вырабатывает управляющие сигналы для регулятора. Последний, используя внешние источники энергии, создает управляющие воздействия необходимой мощности, которые поступают на объект управления.

## 1. ИНЕРЦИОННЫЕ УПРАВЛЯЮЩИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пусть $T = [t_*, t^*]$ – промежуток управления. Скалярную функцию $u(t)$, $t \in T$, назовем *инерционным управляющим воздействием первого порядка*, если она является решением уравнения $\dot{u} = v, u(t_*) = u_0$, с ограниченной кусочно-непрерывной функцией $v(t)$, $t \in T$.

С учетом того, что для решения большинства прикладных задач используются вычислительные устройства дискретного действия, будем считать, что управляющий сигнал $v(t)$, $t \in T$, – *дискретная функция* с периодом квантования $h = (t^* - t_*)/N$ ($N$ – натуральное число): $v(t) = v(t_* + kh)$, $t \in [t_* + kh, t_* + (k+1)h[$, $k = \overline{0, N-1}$. Пусть $S_h = \{t_* + h, t_* + 2h, ..., t^*\}$, $T_h = \{t_*, t_* + 2h, ..., t^* - h\}$. В классе инерционных управляющих воздействий первого порядка рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} c'x(t^*) \to \max, \dot{x} = A(t)x + b(t)u, x(t_*) = x_0, \\ \dot{u} = v, u(t_*) = u_0, Hx(t^*) = g, |u(s)| \le L, s \in S_h, |v(t)| \le M, t \in T_h, \end{gathered} \tag{1}$$