ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ ЧЕРЕДНИКА

Р. Д. Максимов

Целью данной работы является классификация конечномерных неприводимых представлений рациональной алгебры Чередника для группы G_4.

Основными результатами данной работы являются построение представления Данкла, построение модулей Верма и доказательство ряда их свойств, нахождение неприводимых представлений и классов сопряженности комплексных отражений для группы G_4, классификация неприводимых конечномерных представлений рациональной алгебры Чередника для группы $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Понятие рациональной алгебры Чередника было введено Этингофом и Гинзбургом [1] в начале 2000-х годов. Мотивацией к рассмотрению данных алгебр служили работы Чередника, который рассматривал схожие алгебры. Категория $\mathcal{O}$ была введена в работе Гинзбурга, Гуэй, Опдама и Рукье [2]. Алгебра используется для построения и исследования квантовых интегрируемых систем типа Калоджера-Мозера.

Пусть V – конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$, Γ – конечная группа, линейно действующая на V, $T(V)$ – тензорная алгебра пространства V.

Тогда через $T(V)\#\Gamma$ будем обозначать следующую алгебру:

$T(V)\#\Gamma$ совпадает с $T(V)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\Gamma$ как векторное пространство, и умножение задается следующим образом:

$$v_1\otimes\gamma_1\cdot v_2\otimes\gamma_2 := v_1\gamma_1(v_2)\otimes\gamma_1\gamma_2,\quad v_1,v_2\in T(V),\quad \gamma_1,\gamma_2\in\Gamma.$$

Пусть $\mathfrak{h}$ – векторное пространство над $\mathbb{C}$, W – конечная подгруппа в $GL(\mathfrak{h})$.

Элемент $s\in GL(\mathfrak{h})$ назовем комплексным отражением, если $\operatorname{rank}(s-id)=1$. Через S обозначим множество всех комплексных отражений в W. Пусть c – некоторая функция из S в $\mathbb{C}$, постоянная на классах сопряженности в S.

Рациональной алгеброй Чередника $H_{1,c}(W,\mathfrak{h})$ называется фактор алгебры $T(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^*)\#W$ по следующим соотношениям:

$$[x,x']=0,[y,y']=0,\quad x,x\in\mathfrak{h}^*,\quad y,y'\in\mathfrak{h}$$
$$[y,x]=\langle x,y\rangle-\sum_{s\in S}c(s)\langle x,\alpha_s^{\vee}\rangle\langle y,\alpha_s\rangle s.$$

В предыдущем соотношении $\alpha_s \in \mathfrak{h}^*, \alpha_s^\vee \in \mathfrak{h}$ – собственные векторы s, соответствующие неединичным собственным значениям, удовлетворяющие соотношению $\langle \alpha_s, \alpha_s^\vee \rangle = 2$.

Рассмотрим алгебру $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ полиномиальных функций на $\mathfrak{h}$. Пусть $w \in W$, $x \in \mathfrak{h}^*$, $y \in \mathfrak{h}$.

Рассмотрим следующие операторы на $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$. Через w будем обозначать эндоморфизм пространства $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, который индуцируется действием w на $\mathfrak{h}$. Через x будем обозначать оператор умножения на элемент $x \in \mathfrak{h}^*$. Через D_y будем обозначать оператор Данкла:

$$D_y = \partial_y + \sum_{s \in S} \frac{2c(s)}{1-\lambda_s} \frac{\langle \alpha_s, y \rangle}{\alpha_s}(s - id).$$

Здесь λ_s- собственное значение относительно s, соответствующее собственному вектору α_s.

Можно показать, что $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ является представлением алгебры $H_{1,c}(W,\mathfrak{h})$, где $w \in W$, $x \in \mathfrak{h}^*$, $y \in \mathfrak{h}$ действуют на $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ соответственно как w, x, D_y.

Это представление называется *представлением Данкла*. Представление Данкла позволяет доказать важную теорему о структуре рациональной алгебры Чередника (треугольное разложение):

$$H_{1,c}(W,\mathfrak{h}) \cong S(\mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C}W \otimes S(\mathfrak{h}^*).$$

Пусть y_1, $y_2, \ldots, y_n$ – некоторый базис в $\mathfrak{h}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – двойственный базис в $\mathfrak{h}^*$. Рассмотрим следующий элемент алгебры:

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \frac{n}{2} - \sum_{s \in S} \frac{2c(s)}{1-\lambda_s} s.$$

Утверждение 1. $[\mathbf{h}, x] = x$, $[\mathbf{h}, y] = -y$, где $x \in \mathfrak{h}^*$, $y \in \mathfrak{h}$.

Оказывается, что все собственные значения оператора $[\mathbf{h}, \cdot]$ на $H_{1,c}(W,\mathfrak{h})$ целые и таким образом получаем на $H_{1,c}(W,\mathfrak{h})$ $\mathbb{Z}$-градуировку, определенную элементом $\mathbf{h}$ (степень w – 0, степень x – 1, степень y – (-1)).

Категория $\mathcal{O}$ состоит из всех модулей M над $H_{1,c}(W,\mathfrak{h})$, таких что:

(1) M является конечно порожденным как $S(\mathfrak{h}^*)$-модуль.

(2) Элементы из $\mathfrak{h}$ действуют на M локально нильпотентными эндоморфизмами.

Утверждение 2. *Любой конечномерный* $H_{1,c}(W,\mathfrak{h})$ *-модуль лежит в* $\mathcal{O}$.

Пусть V – неприводимый W-модуль. Рассмотрим его как $S(\mathfrak{h})\#W$-модуль, считая что $\mathfrak{h}$ действует как 0. Рассмотрим $\Delta(V) := H_{1,c}(W,\mathfrak{h}) \otimes_{S(\mathfrak{h})\# W} V$.

Модуль $\Delta(V)$ называется *модулем Верма*.

Примечание. За счет треугольного разложения $\Delta(V) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes V$ как $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$-модуль.

Утверждение 3. $\Delta(V) = \oplus_{\lambda\in\mathbb{C}} \Delta(V)_\lambda$, *где* $\Delta(V)_\lambda$ *– собственные подпространства относительно элемента* $\mathbf{h}$. *Причем все* $\Delta(V)_\lambda$ *конечномерны и W-инвариантны.*

Утверждение 4. *Если V – тождественное одномерное представление группы W, то* $\Delta(V)$ *– представление Данкла.*

Утверждение 5. *У* $\Delta(V)$ *есть единственный неприводимый фактор-модуль.*

Обозначим неприводимый модуль из Утверждения 5 через $L(V)$.

Теорема 1. *Любой конечномерный неприводимый модуль над Рациональной алгеброй Чередника имеет вид* $L(V)$.

Пусть U – модуль из $\mathcal{O}$, на котором $\mathbf{h}$ действует диагонально. Тогда характером модуля U назовем следующую величину:

$$ch\, U = \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} q^\lambda [U_\lambda].$$

Под $[U_\lambda]$ подразумевается элемент кольца Гротендика представлений группы W.

Утверждение 6. $ch\,\Delta(V) = q^{\lambda(V)}[V](1+q[\mathfrak{h}^*]+q^2[S^2\mathfrak{h}^*]+\ldots)$.

В работе рассматривается группа G_4: Пусть $\mathbb{H}$ – восьмиэлементная группа кватернионных единиц. Группа $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{H}$, переставляя по циклу *i*, *j* и *k*. Тогда $G_4 \cong \mathbb{H} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Кроме того, группа G_4 вкладывается в SU_2 и поэтому обладает двухмерным комплексным представлением U_0.

Утверждение 7. *В группе* G_4 *есть два класса сопряженности комплексных отражений. Таким образом, алгебра* $H_{1,c}(G_4,U_0)$ *будет зависеть от двух констант:* c_1 *и* c_2.

Теорема 2. У группы G_4 есть 3 одномерных, 3 двухмерных и 1 трехмерное неприводимое комплексное представление.

Кроме того рассмотрена рациональная алгебра Чередника для группы $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ и классифицированы ее неприводимые конечномерные представления.

Будем обозначать $\xi = e^{2\pi i/3}$. Пусть V_0, V_1, V_2 – неприводимые комплексные представления $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, на которых 1 действует соответственно как 1, ξ, ξ^2. Рассмотрим представления алгебры $H_{1,c}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, V_1)$.

Теорема 3.

1. Модуль $L(V_0)$ конечномерен, тогда и только тогда, когда

$3k+1-2c_1-2c_2=0$ или $3k+2-2c_1-2c_2-2c_1\xi^2-2c_2\xi=0$.

2. Модуль $L(V_1)$ конечномерен, тогда и только тогда, когда

$3k+1-2c_1\xi-2c_2\xi^2=0$ или $3k+2-2c_1-2c_2-2c_1\xi-2c_2\xi^2=0$.

3. Модуль $L(V_2)$ конечномерен, тогда и только тогда, когда

$3k+1-2c_1\xi^2-2c_2\xi=0$ или $3k+2+2c_1+2c_2=0$.

Здесь $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Литература

1. *Etingof P., Ginzburg V.* Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism // Invent. Math. 147. 2002. P. 243–348.
2. *Ginburg V.,Guay N.,Opdam E.,Rouquier R.* On the category O for rational Cherednik algebras // Invent. Math. 154. 2003. P. 617–651.
3. *Etingof P.* Calogero-Mozer systems and representation theory // Zurich lectures in advanced mathematics, EMS, Zurich, 2007.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ О ЦЕПЯХ МАРКОВА ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА

М. В. Мальцев

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи статистического анализа последовательностей событий (состояний) часто встречаются в кибернетике [1], генетике [2], криптографии [3] и во многих других областях научной и практической деятельности. Для моделирования дискретных временных рядов широко применяются цепи Маркова [4]. Наиболее общей моделью является цепь Маркова s-го порядка, $s \geq 1$. Однако при увеличении порядка экспоненциально возрастает количество параметров, поэтому построен ряд «малопараметрических» моделей цепи Маркова высокого порядка, одной из которых является цепь Маркова переменного порядка (ЦМПП(s)).