# ОБЛАСТИ КЛАССИЧЕСКОГО И НЕКЛАССИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ОДНОАТОМНОГО ЛАЗЕРА

**А. Б. Михалычев, С. Я. Килин**

Задача о взаимодействии двухуровневого атома и одномодового резонансного квантового поля, находящихся в высокодобротном резонаторе, играет важную роль в квантовой оптике, не только являясь важным с теоретической точки зрения объектом, но и представляя собой базовый элемент многочисленных схем квантовой информатики [1–3].

В данной работе исследуются стационарные состояния такой системы, называемой иногда одноатомным лазером, при учете некогерентного источника оптической накачки, процесса затухания резонаторной моды поля и спонтанного распада вобужденного состояния атома. Обнаружено, что получаемое состояние может проявлять как классические, так и неклассические свойства в зависимости не только от параметров системы, но и от типа физических величин, применяемых для ее описания. Таким образом, удается провести классификацию наблюдаемых относительно данного состояния. Кроме того, в работе изучены свойства функции Глаубера стационарного состояния и исследована возможность измерения ее локальных характеристик. Продемонстрированная неклассичность данного состояния является важной с практической точки зрения, позволяя использовать одноатомный лазер в качестве источника излучения с квантовыми свойствами, требуемыми для реализации схем квантовой информатики.

Одноатомный лазер рассматривается в рамках модельной системы, состоящей из двухуровневого атома с основным $|1\rangle$ и возбужденным $|2\rangle$ состояниями, взаимодействующего с резонаторной модой поля с константой взаимодействия *g*. Атом возбуждается некогерентной накачкой со средней скоростью $R_{12}$. Кроме того, учитывается затухание резонаторной моды поля со скоростью $\gamma$ и распад атомного возбужденного состояния со скоростью $R_{21}$.

В рамках перечисленных приближений кинетическое уравнение для редуцированной по состояниям окружения матрицы плотности в представлении взаимодействия имеет вид:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_{RWA},\rho] + 2\gamma L\left(a,a^{+}\right)\rho + R_{12}L\left(\sigma_{+},\sigma_{-}\right)\rho + R_{21}L\left(\sigma_{-},\sigma_{+}\right)\rho, \qquad (1)$$

где $H_{RWA} = \hbar g\left(a^{+}\sigma_{-} + a\sigma_{+}\right)$ - гамильтониан взаимодействия атома с полем в приближении вращающейся волны; релаксация описывается с помощью операторов $2L\left(x,y\right)\rho = [x\rho, y] + [x, \rho y]$.

Учитывая инвариантность уравнения (1) относительно замены $a \to ae^{-i\varphi}$, $a^+ \to a^+e^{i\varphi}$, $\sigma_- \to \sigma_- e^{-i\varphi}$, $\sigma_+ \to \sigma_+ e^{i\varphi}$, матрицу плотности стационарного состояния системы можно искать в виде

$$\rho = \sigma_-\sigma_+ \otimes \rho_{11} + \sigma_+\sigma_- \otimes \rho_{22} + \sigma_+ \otimes (w+iu)a + \sigma_- \otimes a^+(w-iu), \qquad (2)$$

где операторы $\rho_{11}$, $\rho_{22}$, $u$, $w$ имеют диагональный вид в фоковском представлении.

Подставляя данное выражение в эволюционное уравнение (1), можно показать, что для стационарного состояния справедливо $w=0$. Система уравнений для оставшихся трех операторов, характеризующих стационарное состояние, может быть представлена в виде

$$\begin{cases} 2\gamma J\rho_{11} - 2\gamma N\rho_{11} - R_{12}\rho_{11} + R_{21}\rho_{22} + 2gJ^+u = 0, \\ 2\gamma \dfrac{N+2}{N+1} Ju - \gamma(2N+1)u - \dfrac{1}{2}Ru + g\rho_{22} - \dfrac{g}{N+1} J\rho_{11} = 0. \\ 2\gamma J\rho_{22} - 2\gamma N\rho_{22} + R_{12}\rho_{11} - R_{21}\rho_{22} - 2g(N+1)u = 0, \end{cases} \qquad (3)$$

Простое аналитическое решение данных уравнений может быть построено в фоковском базисе в предельном случае высокой добротности резонатора ($\gamma / g \ll 1$) и при рассмотрении асимптотики большого числа фотонов ($n^2 \gg R_{12}g^2 / 4\gamma^3 \equiv A_0$). В этих случаях матрица плотности стационарного состояния может быть представлена в виде диагональной части гипергеометрических обобщенных когерентных состояний [4; 5] $\left|1;\nu_0+1;\sqrt{a_0}\right\rangle$ и $\left|\cdot;1;\sqrt{A_0}\right\rangle$ соответственно, где введены обозначения $a_0 = R_{12}/(4\gamma)$, $\nu_0 = R_{21}/(4\gamma) - 1/2$. Проведенный в работе [4] анализ свойств обобщенных когерентных состояний гипергеометрического типа позволяет заключить, что матрица плотности, получаемая в приближении сильной связи, пригодном при $\gamma / g \ll 1$, обладает классическими свойствами при $\nu_0 > 0$ и неклассическими – в противном случае. Асимптотическое поведение элементов матрицы плотности при больших значениях $n$ при всех величинах параметров системы соответствует неклассическому состоянию. Таким образом, можно предположить, что проявление неклассических свойств стационарного состояния одноатомного лазера зависит не только от значений основных параметров, характеризующих данную систему, но и от рассматриваемой области значений $n$, то есть от типа проводимого измерения.

Для более подробного исследования неклассических свойств стационарного состояния удобно перейти к представлению Глаубера. В этом случае матрица плотности может быть описана выражением

$$\begin{aligned}\rho = \int d^2\alpha \Big\{ & P_{11}(|\alpha|^2)|1\rangle\langle 1| + P_{22}(|\alpha|^2)|2\rangle\langle 2| + \\ & + iP_u(|\alpha|^2)|2\rangle\langle 1| - iP_u(|\alpha|^2)|1\rangle\langle 2| \Big\} \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|.\end{aligned} \quad (4)$$

Исходя из соотношений (3) и **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, уравнения для составляющих $P_{11}(x)$ и $P_{22}(x)$ функции Глаубера стационарного состояния можно записать в виде

$$\begin{cases} P_{11}'(x) = \Big\{ \Big( -g^2 R_{12} + \gamma x(4g^2 + R\gamma + 2R_{12}\gamma - 6\gamma^2) - 4\gamma^3 x^2 \Big) P_{11}(x) + \\ \qquad + \Big( g^2(R_{21} - 2\gamma) + \gamma^2 x(R_{12} - R_{21} - 2\gamma) - 4\gamma^3 x^2 \Big) P_{22}(x) \Big\} \Big/ \Big( 4\gamma^3 x^2 \Big), \\ P_{22}'(x) = \big( (2\gamma x - R_{12})) P_{11}(x) + (R_{21} + 2\gamma(x-1)) P_{22}(x) \big) \big/ \big( 2\gamma x \big), \end{cases} \quad (5)$$

где введено обозначение $x = |\alpha|^2$. Можно показать, что данная система уравнений не имеет непрерывных решений, обладающих всеми необходимыми физическими свойствами. Следовательно, необходимо учесть, что функция Глаубера является обобщенной функцией, а именно, как показывает подробное рассмотрение используемых методов определения ожидаемого значения наблюдаемых, функционалом на множестве аналитических функций.

Слабое решение данных уравнений может быть найдено в виде

$$P_{11}(x) = e^x \sum c_k^{(11)} \delta^{(k)}(x), \qquad P_{22}(x) = e^x \sum c_k^{(22)} \delta^{(k)}(x), \quad (6)$$

где значения коэффициентов при производных δ-функции вычисляются по формулам $c_k^{(11)} = (-1)^k \rho_{11}(k)/\pi$, $c_k^{(22)} = (-1)^k \rho_{22}(k)/\pi$.

Полученное решение может быть представлено в виде суммы его классической части $P_{11}^{(sc)}(x)$, соответствующей приближению сильной связи, и поправки $\Xi(x)$, обладающей неклассическими свойствами и не представимой в виде некоторой непрерывной функции:

$$P_{11}(x) = P_{11}^{(sc)}(x) + \Xi(x). \quad (7)$$

Проведенные исследования доказывают стремление величины $\Xi(x)$ к нулю в пределе $g \to \infty$, что подтверждает пригодность приближения сильной связи для описания поведения системы при $\gamma / g \ll 1$.

Условием «неклассичности» некоторой наблюдаемой при исследовании свойств стационарного состояния одноатомного лазера можно считать необходимость учета поправки $\Xi(x)$ к приближенному решению $P_{11}^{(sc)}(x)$, обладающего классическими свойствами, при вычислении ожидаемого значения данной наблюдаемой. Для того, чтобы данное условие выполнялось для наблюдаемой, описываемой функцией $\phi(x)$ в представлении Глаубера, необходимо, чтобы максимум выражения $\frac{a_0^k}{\Gamma(k+\nu_0+1)}\left|\left(e^x\phi(x)\right)^{(k)}\right|_{x=0}$ достигался при $k$ %‰$g/\gamma$.

Для экспериментального доказательства неклассичности свойств излучения одноатомного лазера можно исследовать зависимость среднего значения наблюдаемой, описываемой в представлении Глаубера функцией $\phi(x;\sigma,x_0)=\exp\Big(-x-x_0)^2/\sigma^2\Big)/(\sqrt{\pi}\sigma)$ от параметров $x_0$, $\sigma$. Данная величина соответствует регуляризованному значению функции Глаубера вблизи точки $x_0$ и позволяет измерить классическую составляющую $P_{11}^{(sc)}(x)$. Проведенные расчеты показывают невозможность измерения неклассической части функции Глаубера таким способом, что может быть объяснено нелокальностью ее свойств.

Таким образом, полученные результаты доказывают существование неклассических свойств стационарного состояния одноатомного лазера. Показано, что наличие данных свойств связано с сингулярной частью функции Глаубера. В зависимости от необходимости учета данной поправки к приближенному решению возможно введение классификации наблюдаемых относительно рассматриваемого стационарного состояния. Также в работе предложен метод экспериментального обнаружения найденных особенностей излучения одноатомного лазера.

**Литература**


1. Quantum Information Processing / Ed. by G. Leuchs, T. Beth. Weinheim, 2003.
2. Quantum computation and quantum communication: theory and experiments / Ed. by M. Pavicic. Springer, 2006.
3. *Килин С. Я., Хорошко Д. Б., Низовцев А. П. и др*. Квантовая криптография: идеи и практика. Мн.: Белорусская наука, 2007.
4. *Appl T., Schiller D. H.* Generalized hypergeometric coherent states // LANL Archive: quant-ph/0308013. 2003.
5. *Roknizadeh R., Tavassoly M. K.* The construction of some important classes of generalized coherent states: The nonlinear coherent states method // Math.Gen. Vol. 37. 2004. P. 8111.