ПАРОСОЧЕТАНИЯ С ПРЕДПИСАННЫМИ МЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

М. Г. Блоцкий

ВВЕДЕНИЕ

Среди многочисленных направлений исследований в теории графов паросочетания занимают видное место. Задача нахождения наибольшего паросочетания в графе имеет широкие практические и теоретические применения [2]. В частности, эта задача моделирует широкий спектр реальных прикладных задач, возникающих при эффективной организации современного производства, технологических процессов, при планировании и оптимальной организации работы транспортных средств, статистической обработке данных, при организации параллельных и конвейерных вычислений.

Обобщением понятия паросочетания в графе является понятие k-разделенного паросочетания [4]. Исследование k-разделенных паросочетаний в существенной степени стимулируется их значением для приложений (проектирование СБИС, сетей сотовой связи и широковещательных сетей [3,4]) и давно привлекает внимание специалистов. В частности, задача нахождения наибольшего 2-разделенного паросочетания имеет прикладной интерес и возникает, при выборе наибольшего числа одновременно работающих передатчиков и распределении каналов передачи информации в коммуникационных сетях со следующим ограничением, обеспечивающим секретность: допускается получение сообщений от одного передатчика только одним приемником по выбранным каналам [3].

В настоящей работе установлена сложность задачи о наибольшем k-разделенном паросочетании в классе двудольных графов, а также для некоторых его подклассов, определяемых конечными списками запрещенных порожденных подграфов. Найдены новые классы графов, для которых задача о наибольшем антипаросочетании может быть решена за полиномиальное время.

1. *K*-РАЗДЕЛЕННЫЕ ПАРОСОЧЕТАНИЯ

Все определяемые в работе понятия можно найти в [1].

Пусть $\Sigma^k(G)$ обозначает число ребер в наибольшем k-разделенном паросочетании графа G, а $\alpha(G)$ – число вершин в наибольшем независимом множестве вершин графа G. Для фиксированного k и произвольного графа G можно построить граф G^* (конструкция опускается ввиду ограниченности объема курсовой), для которого будет верно следующее утверждение.

Теорема 1. Справедливо соотношение $\Sigma^k(G^*) = \alpha(G)$.

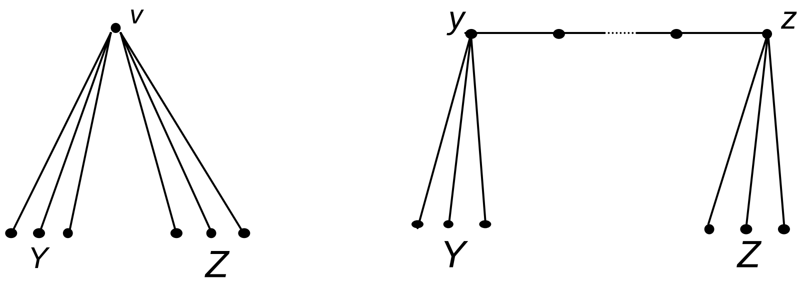

Рис. 1. Преобразование Алексеева

Таким образом, поскольку задача нахождения наибольшего независимого множества вершин в произвольном графе является *NP*-трудной, то и задача нахождения наибольшего *k*-разделенного паросочетания является *NP*-трудной для произвольного графа.

Более того, наша конструкция обладает тем свойством, что граф G^* является двудольным при $k \geq 3$ и в нем нет циклов длины $\leq k$ при $k \geq 2$.

Преобразованием Алексеева в графе G при вершине v называется следующая серия операций (рис. 1):

1. разбиваем множество $N(v)$ соседей вершины v на два множества Y и Z ($Y \bigcup Z = N(v)$, $Y \bigcap Z = \varnothing$);
2. удаляем из графа G вершину v и все инцидентные ей ребра;
3. добавляем к графу цепь длины $k+1$ с концами y и z;
4. соединяем вершину y со всеми вершинами из множества Y, а z – со всеми вершинами из Z.

Пусть $Ale_G^k(v)$ – граф, полученный в результате применения преобразования Алексеева к графу G при вершине v. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для любого графа G, в котором нет циклов длины не более k, и любой вершины $v \in V(G)$ имеет место равенство $\Sigma^k(Ale_G^k(v)) = \Sigma^k(G) + 1$.

Преобразование Алексеева позволяет значительно сузить класс графов, для которых задача нахождения числа ребер в наибольшем *k*-разделенном паросочетании является *NP*-трудной.

Следствие. Для любых фиксированных $k \geq 2$ и $l \geq k$ задача нахождения $\Sigma^k(G)$ является *NP*-трудной для двудольных графов максимальной степени 3, в которых нет циклов длины не более l.

2. K-РАЗДЕЛЕННЫЕ АНТИПАРОСОЧЕТАНИЯ

Множество ребер называется k-разделенным антипаросочетанием, если расстояние между любыми двумя ребрами из этого множества не более k. Пусть $\mu^k(G)$ число ребер в наибольшем по мощности k-разделенном антипаросочетании. Через $L(G)$ обозначим реберный граф графа G.

Лемма 1. $\mu^k(G)$ равно числу вершин в наибольшей клике графа $(L(G))^{k+1}$.

Пусть F_1, F_2, F_3, F графы, изображенные на рисунке 2.

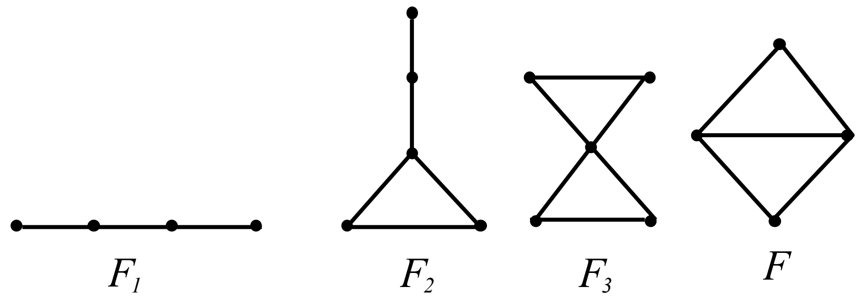

Рис. 2. Графы F_1, F_2, F_3, F

Теорема 3. Задача нахождения наибольшей клики в F-свободном графе разрешима за полиномиальное время.

Теорема 4. Граф G является $\{F_1, F_2, F_3\}$-свободным тогда и только тогда, когда в графе $(L(G))^2$ нет порожденного подграфа F.

Как следствие теорем 3 и 4 и леммы 1, получается следующее утверждение.

Теорема 5. Число $\mu^1(G)$ для $\{F_1,F_2,F_3\}$-свободного графа G может быть найдено за полиномиальное время.

Литература

1. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов.– М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1990.-384 с.
2. *Ловас Л., Пламмер М.* Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии.– М.: Мир, 1998.– 65с.
3. *Golumbic M.C., Lewenstein M.* New results on induced matchings, Discrete Applied Mathematics, v.101 n.1-3, p.157-165, April, 2000
4. *Stockmeyer L.J., Vazirani V.V.* NP-completeness of some generalizations of the maximum matching problem // Information Processing Letters.– 1982.– Vol. 15.– P. 14-19.