«Таймырский» Норильского месторождения в 2003 г. Ч.III: Рудник «Таймырский» // ФТПРПИ, №6, 2004. С.5–22.
10. *Гориков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В.* Волны в сплошных средах: Учеб. пособ. для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.

ОПЕРАТОРНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ И Λ-РАСКРАСКА ВЕРШИН ПОДКЛАССОВ УНИГРАФОВ

О. В. Максимович

ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

Многие из рассмотренных ниже понятий относятся к азбуке теории графов и могут быть найдены в [2]. Утверждения и понятия, связанные с теорией декомпозиции графов, читатель может найти в [3].

Пусть G – некоторый граф. Раскраску $\varphi{:}VG\to\mathbf{Z}_+$ назовем $L(2,1)$-*допустимой раскраской* (или просто *допустимой раскаской*), если выполнены следующие *условия допустимости*: 1) $|\varphi(v) - \varphi(u)| \geq 2$, если вершины v и u смежны; 2) $\varphi(v) \neq \varphi(u)$, если расстояние $d(u,v) = 2$.

Обозначим через $\Lambda(G)$ множество всех допустимых раскрасок графа G. Для $\varphi\in\Lambda(G)$ положим $\max\varphi = \max\,\{\varphi(v)|v\in VG\}$. Раскраску $\varphi\in\Lambda(G)$ назовем $\lambda_{2,1}$-*раскраской* [4] или просто λ-*раскраской*, если $\max\varphi\leq\lambda$, $\lambda\in\mathbf{Z}_+$. Обозначим через $\lambda(G)$ (или $L(G;2,1)$ в терминологии [5]) минимальное число λ, для которого существует λ-раскраска графа G. λ-раскраску φ, для которой $\max\varphi = \lambda(G)$, назовем *оптимальной*.

Введенная выше раскраска приводит к следующей задаче:

Задача 1. *Для произвольного графа G найти параметр $\lambda(G)$ и оптимальную λ-раскраску вершин.*

Заменив в условиях допустимости пункт 2) условием инъективности функции φ, получим определения $L'(2,1)$-*допустимой раскраски* и всех связанных с этой раскраской понятий, введенных выше.

Задача 2. *Для произвольного графа G найти параметр $\lambda'(G)$ и оптимальную λ'-раскраску вершин.*

НАЧАЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Фиксируем произвольную раскраску φ графа G и упорядочим его вершины по неубыванию цвета: $VG=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, где $\varphi(v_{i+1})\geq\varphi(v_i)$. Назовем полученную перестановку вершин и раскраску φ *согласованными*. С другой стороны, фиксируем произвольную перестановку $p = (u_1,u_2,\ldots,u_n)$ вершин графа G и число $q\in\mathbf{Z}_+$. Определим индуктивно *q-хорошую (относительно p) инъективную раскраску g^q* условиями:

$$g^q(u_1) = q,\ g^q(u_{i+1}) = g^q(u_i) + c_{i+1},\ \text{где } c_{i+1} = \begin{cases} 2, \text{ если } v_{i+1} \sim v_i; \\ 1, \text{ в противном случае.} \end{cases} \quad (1)$$

0-хорошую раскраску g^0 назовем просто *хорошей* (*относительно* p) и обозначим буквой g. Положим $\lambda(p) = \max g$.

Пусть теперь s – еще одна перестановка вершин графа G. Скажем, что *p не хуже чем s* и будем писать $p \le s$, если $\lambda(p) \le \lambda(s)$. Нумерацию p назовем *оптимальной*, если она не хуже любой другой перестановки.

Зафиксируем некоторую перестановку p. Пусть g^q – q-хорошая (относительно p) λ'-раскраска. С помощью формул (1) определим на множестве VG весовую функцию w, положив $w(v_i) = c_i$, где c_1 = q и c_{i+1} такие же, как в (1).

Очевидны следующие утверждения:

1. $\lambda'(p) = \sum_i w(v_i)$;

2. *Раскраска φ оптимальна, если и только если согласованная с ней нумерация p оптимальна и φ совпадает с хорошей относительно этой нумерации раскраской g. При этом $\lambda'(G) = \lambda'(p)$.*

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ К Λ-РАСКРАСКЕ

Пусть дан граф $G \in (P,Q)$, а $G_n \circ G_{n-1} \circ \ldots \circ G_1$ его разложение в (P,Q)-композицию неразложимых компонент [3]. Предположим, все компоненты композиции это A- и B-части и для каждой из компонент разложения графа задача о λ'-раскраске решена.

Предложение 1. *Пусть X и Y – произвольные графы и $C = X*Y$ (соединение графов X и Y). Пусть, далее $p_X = (x_1,x_2,\ldots,x_m)$ и $p_Y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ - оптимальные перестановки вершин графов X и Y соответственно. Пусть $q = \{c_1,c_2,\ldots,c_m,c_{m+1},\ldots,c_{m+n}\}$ – перестановка вершин графа C, в которой $c_i = x_i$ для $i \le m$ и $c_{m+k} = y_k$ для $k \le n$. Тогда:*

1. q является λ'-оптимальной перестановкой вершин графа C;
2. $\lambda'(C) = \lambda'(X) + \lambda'(Y) + 2$;
3. $\lambda(C) = \lambda'(C)$.

Рассмотрим случай дизъюнктного объединения графов. Пусть X и Y – произвольные графы. Без ограничения общности будем считать, что $|X| \ge |Y|$. Пусть $p_X = (x_1,x_2,\ldots,x_m)$ и $p_Y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ – оптимальная перестановка вершин графа X и произвольная перестановка вершин графа Y. И пусть $C = X \cup Y$.

Положим $q_0 = (c_1^0, c_2^0, \ldots, c_m^0) = p_X$.

Пусть для некоторого индекса $i \in [0,n\text{-}1]$ в перестановку q_0 уже внесены вершины $y_1,y_2,\ldots,y_i$ (при $i > 1$) и, тем самым, определена перестановка

$q_i = (c_1^i, c_2^i, \ldots, c_{m+i}^i)$ с весовой функцией w_i. В q_i вставим новую вершину y_{i+1} по правилу:

1. Если в последовательности q_i найдется такая вершина c_k^i, что $w_i(c_k^i) = 2$, то поместим вершину y_{i+1} в q_i непосредственно перед вершиной c_k^i;
2. Иначе, если в последовательности q_i найдутся две такие последовательные вершины c_{k-1}^i и c_k^i, что $c_{k-1}^i, c_k^i \in X$, то поместим вершину y_{i+1} в q_i между этими вершинами;
3. Иначе, вершину y_{i+1} поместим в конец последовательности q_i.

Предложение 2.

1. описанный выше алгоритм определен корректно;
2. *q_n является λ'-оптимальной перестановкой вершин графа C;*
3. $\lambda'(C) = \max\{\lambda'(X), m+n\}$.

Предложение 3. *Пусть X и Y – произвольные графы и $C = X \cup Y$. Тогда:*

1. *Подграфы $C(X)$ и $C(Y)$ можно красить независимо*;
2. $\lambda(C) = \max\ \{\lambda(X), \lambda(Y)\}$.

Перейдем к случаю, когда неразложимые компоненты кроме A- и B-частей могут быть графами из классов *Spider* (класс графов, которые получаются из паросочетания mK_2, где $m \geq 2$, объединением вершин одной доли в клику) и $\overline{Spider}$ (класс графов, дополнительных к *Spider*) – разложимым матрогенным графам. Для графов из классов *Spider* ($\overline{Spider}$) будем считать, что их вершины упорядочены так, что нумерация начинается с 1, вершины с нечетными номерами входят в A-часть, а вершины с четными – в B-часть, причем вершины с номерами $2k-1$ и $2k$ смежны (несмежны) в соответствующих графах.

Предложение 4.

1. *Если $G \in Spider$ и $|G| = 4$, то перестановка (v_1, v_4, v_2, v_3) – оптимальна*;
2. *Если $G \in Spider$ и $|G| \geq 6$, то перестановка $(v_4, v_1, v_6, v_3, \ldots, v_k, v_{k+3}, v_{k+2}, v_{k+5}, \ldots, v_{|G|-3}, v_{|G|}, v_{|G|-1}, v_2)$ – оптимальна*;
3. *Если $G \in \overline{Spider}$, то следующие перестановки задают λ'-раскраску графа G:$(v_1, v_4, v_2, v_3, \ldots, v_{k+1}, v_{k+4}, v_{k+2}, v_{k+3}, \ldots, v_{|G|-3}, v_{|G|}, v_{|G|-2}, v_{|G|-1})$, для* $|G| = 4n$, и $(v_1, v_4, v_2, v_3, \ldots, v_{i+1}, v_{i+4}, v_{i+2}, v_{i+3}, \ldots, v_{|G|-1}, v_{|G|})$, для $|G| = 4n + 2$

Далее будем считать, что граф G_n в декомпозиции $G_n \circ G_{n-1} \circ \ldots \circ G_1$ имеет непустую A-часть. Иначе, воспользовавшись предложением 3, задачу можно разбить на подзадачи с указанным свойством.

Алгоритм 1. Для A- и B-частей используются результаты утверждений 2 и 3. В случае когда $G_i \in Spider$ ($G_i \in \overline{Spider}$) используем раскраски из предложения 4. При возможности вершины из B-части графа G_i вставляются перед вершинами $c_k^i \in G_{i\text{-}1} \circ \ldots \circ G_1$, такими что $w_i(c_k^i) = 2$ (аналогично процедуре описанной в предложении 2). Результатом алгоритма является раскраска, согласованная с полученной перестановкой.

Теорема 1. *Следующие утверждения относительно Алгоритма 1 верны:*

1. *алгоритм определен корректно;*
2. *если на вход алгоритма поступает декомпозиция порогового графа G, то алгоритм строит оптимальную λ-раскраску графа G за время* $O(n)$, *где* $n = |G|$;
3. *если на вход алгоритма поступает декомпозиция доминантно-порогового графа G, то алгоритм строит оптимальную λ-раскраску графа G за время* $O(n)$.

Заметим, что если на вход алгоритма 1 поступает декомпозиция расщепляемого матрогенного графа G, то алгоритм строит приближение λ-раскраски графа G за время $O(n)$.

Гипотеза 1. *Алгоритм* 1 *строит оптимальную λ-раскраску расщепляемого матрогенного графа G.*

Литература

1. *Calamoneri T., Petrechi R.*, λ-Coloring matrogenic graphs // Discrete Applied Mathematics, 2006, *V* ol. 154, pp. 2445 – 2457
2. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.*, Лекции по теории графов. М. Наука, 1990, 384 с.
3. *Тышкевич Р. И., Суздаль С. В.*, Декомпозиция графов // Избранные научные работы Белорусского государственного университета, в семи томах, Т. 6, стр. 482 – 500
4. *Bodlaender H. L., Kloks T., Tan R. B., van Leeuwen J.*, Approximations for λ-Coloring of Graphs // Lecture Notes in Computer Science, 1999, *V* ol. 1770, pp. 350 – 363
5. *Fiala J., Kloks T., Kratochvıl J.*, Fixed-Parameter Complexity of λ-Labelings // Lecture Notes in Computer Science, 1999, *V* ol. 1665, pp. 350 – 363
6. *Tyshkevich R. I.*, Decomposition of graphical sequences and unigraphs // Discrete Mathematics, 2000, *V* ol. 220, pp. 201 – 238