Важным моментом является получение расчетных формул для одного из общих случаев прогнозирования темпов инфляции.

Литература

1. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. 1995

О ТЕСТЕ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНЫХ СТАТИСТИК ЦЕПИ МАРКОВА С ЧАСТИЧНЫМИ СВЯЗЯМИ

А. И. Петлицкий

ВВЕДЕНИЕ

Выявление зависимости в случайной последовательности и обнаружение отклонений вероятностного распределения элементов последовательности от равномерного являются важнейшими проблемами в защите информации [1,2,3], генетике [4] и других приложениях. Обзор существующих методов решения этих задач представлен в [2]. Актуальность проблемы построения новых статистических тестов [5] связана с тем, что: 1) многие известные тесты проверяют лишь одно из вероятностных свойств, характеризующих случайную последовательность; 2) многие тесты построены «эвристически» и не фиксируют семейство альтернатив; 3) многие из существующих тестов не имеют теоретических оценок мощности.

В данной статье предлагается тест для статистической проверки гипотезы $H_0 = \{$наблюдаемая последовательность есть равномерно распределенная случайная последовательность (РРСП)$\}$ против альтернативы $H_1 = \overline{H}_0$; РРСП – это случайная последовательность, элементы которой независимы в совокупности и имеют равномерное распределение вероятностей [2]. Этот тест $T_{ЦМ(s,r)}$ основан на частотных статистиках новой марковской модели [6] – цепи Маркова s-го порядка с r частичными связями. Для теста $T_{ЦМ(s,r)}$ исследована мощность для семейства контигуальных альтернатив.

1. ЦЕПЬ МАРКОВА С ЧАСТИЧНЫМИ СВЯЗЯМИ

Обозначим: $A = \{0,1,...,N-1\}$ алфавит мощности $2 \le N < \infty$; $J_i^l = (j_i, j_{i+1},..., j_l) \in A^{l-i+1}$ – мультииндекс $(l-i+1)$-го порядка, $l \ge i$; $x_t \in A$ – однородная цепь Маркова s-го порядка с вероятностями одношаговых переходов

$$p_{J_1^{s+1}} = \mathrm{P}\{x_{t+s} = j_{s+1} \mid x_{t+s-1} = j_s,...,x_t = j_1\},\ J_1^{s+1} \in A^{s+1},\ t \ge 1;$$

$r \in \{1,...,s\}$ – параметр, называемый числом связей; $M_r^0 = \left(m_1^0,...,m_r^0\right)$ – целочисленный r-вектор с упорядоченными компонентами $1 = m_1^0 < \ldots < m_r^0 \le s$, называемый шаблоном связей; $Q = \left(q_{j_1,...,j_{r+1}}\right)$, $J_1^{r+1} \in A^{r+1}$, – некоторая (r+1)-мерная стохастическая матрица.

Цепь Маркова x_t называется [6] цепью Маркова s-го порядка с r частичными связями и обозначается ЦМ(s,r), если ее вероятности одношаговых переходов имеют вид

$$p_{j_1,...,j_s,j_{s+1}} = q_{j_{m_1^0},...,j_{m_r^0},j_{s+1}},\ J_1^{s+1} \in A^{s+1}. \tag{1}$$

Соотношение (1) означает, что вероятность перехода процесса x_t в состояние j_{s+1} зависит не от всех s предыдущих состояний процесса $j_1,...,j_s$, а лишь от r избранных состояний $j_{m_1^0},...,j_{m_r^0}$. Если $s = r$, то получаем обычную цепь Маркова s-го порядка [7]. Условия эргодичности ЦМ(s,r) установлены в [8]. Далее предполагаем шаблон связей M_r^0 известным, а $q_{J_1^{r+1}} > 0$, $J_1^{r+1} \in A^{r+1}$. В этом случае цепь Маркова с частичными связями является эргодической.

Примем еще несколько обозначений: $X_1^n = \left(x_1,\ldots,x_n\right)$ – наблюдаемая реализация; $\delta_{J_1^s,K_1^s} = \prod_{i=1}^{s}\delta_{j_i,k_i}$ – символ Кронекера для мультииндексов J_1^s, K_1^s; $S_t\left(X_1^n\right) = \left(x_{t+m_1^0-1},\ldots,x_{t+m_r^0-1},x_{t+s}\right) \in A^{r+1}$;

$$\nu\left(J_1^{r+1}\right) = \sum_{t=1}^{n-s}\delta_{S_t\left(X_1^n\right),J_1^{r+1}},\ J_1^{r+1} \in A^{r+1}, - \tag{2}$$

частотные статистики цепи Маркова ЦМ(s,r); $\Pi^*_{K_1^s}$, $K_1^s \in A^s$, – стационарное распределение вероятностей эргодической ЦМ(s,r);

$$\mu\left(J_1^{r+1}\right) = \mathrm{P}\left\{S_t\left(X_1^n\right) = J_1^{r+1}\right\} = q_{J_1^{r+1}}\sum_{K_1^{s+1} \in A^{s+1}}\delta_{S_1(K_1^{s+1}),J_1^{r+1}}\Pi^*_{K_1^s};$$

$\hat{\mu}\left(J_1^{r+1}\right) = \nu\left(J_1^{r+1}\right)/(n-s)$ – частотная оценка вероятности $\mu\left(J_1^{r+1}\right)$, которая с учетом свойств частот для цепей Маркова [9] является несмещенной и состоятельной оценкой. Условимся, что если вместо какого-то индекса стоит точка, то это означает суммирование по всем возможным значениям этого индекса: $\mu\left(J_1^r,\cdot\right) = \sum_{j_{r+1} \in A}\mu\left(J_1^{r+1}\right)$.

2. ТЕСТ, ОСНОВАННЫЙ НА ЧАСТОТНЫХ СТАТИСТИКАХ ЦМ(S,R)

Построим тест проверки гипотез H_0: $\{x_t\}$ – РРСП, то есть $q_{J_1^{r+1}} \equiv N^{-1}$, $J_1^{r+1} \in A^{r+1}$; H_1: $\{x_t\}$ – цепь Маркова ЦМ(s,r), для которой матрица Q имеет вид:

$$q_{J_1^{r+1}} = q_{J_1^{r+1}}(n) = N^{-1}\left(1 + b_{J_1^{r+1}} / \sqrt{n-s}\right),\ J_1^{r+1} \in A^{r+1}, \tag{3}$$

где $\sum_{j_{r+1}\in A} b_{J_1^{r+1}} = 0$, $\sum_{J_1^{r+1}\in A^{r+1}} | b_{J_1^{r+1}} | \neq 0$. Соотношение (3) определяет контигуальное семейство альтернатив [10] и означает, что при увеличении длительности n наблюдаемой последовательности, гипотеза H_1 сближается с H_0 со скоростью $O\left(n^{-1/2}\right)$.

Обозначим

$$\xi\left(J_1^{r+1}\right) = \sqrt{(n-s)N^{r+1}}\left(\hat{\mu}\left(J_1^{r+1}\right) - N^{-(r+1)}\right). \tag{4}$$

Теорема 1. *При $n \to \infty$ случайная величина*

$$\rho_{ЦМ(s,r)} = \sum_{J_1^r \in A^r}\left(\sum_{j_{r+1}\in A}\xi^2\left(J_1^{r+1}\right) - N^{-1}\xi^2\left(J_1^r, \cdot\right)\right) \tag{5}$$

в случае справедливости гипотезы H_0 имеет χ^2-распределение с $U = N^r(N-1)$ степенями свободы, а при справедливости гипотезы H_1 имеет нецентральное χ^2-распределение с U степенями свободы и параметром нецентральности

$a_{ЦМ(s,r)} = N^{-(r+1)}\sum_{J_1^{r+1}\in A^{r+1}} b_{J_1^{r+1}}^2$.(6)

Эта теорема является обобщением результатов работы [11].

При помощи теоремы 1 построим тест $T_{ЦМ(s,r)}$ для проверки гипотез H_0 и H_1, основанный на частотных статистиках цепи Маркова с частичными связями:

- по наблюдаемой последовательности X_1^n длительности n строятся частотные статистики $\left\{\nu\left(J_1^{r+1}\right) : J_1^{r+1} \in A^{r+1}\right\}$ согласно (2);
- по $\left\{\nu\left(J_1^{r+1}\right) : J_1^{r+1} \in A^{r+1}\right\}$ согласно (4), (5) вычисляются статистики $\left\{\xi\left(J_1^{r+1}\right) : J_1^{r+1} \in A^{r+1}\right\}$ и $\rho_{ЦМ(s,r)}$;
- вычисляется Р-значение: $P = 1 - G_U\left(\rho_{ЦМ(s,r)}\right)$, где $G_U(\cdot)$ – функция χ^2-распределения с U степенями свободы;
- решение выносим с помощью решающего правила: принимается $\{H_0$, если $P > \varepsilon$; H_1, если $P \le \varepsilon\}$, где $\varepsilon \in (0,1)$ – заданный уровень значимости теста.

Следствие 1. *Мощность теста $T_{ЦМ(s,r)}$ при $n \to \infty$ удовлетворяет асимптотическому соотношению:*

$$w \to 1 - G_{U, a_{ЦМ(s,r)}}\left(G_U^{-1}(1-\varepsilon)\right), \tag{7}$$

где $G_{U,a_{ЦМ(s,r)}}(\cdot)$ *– функция нецентрального* χ^2*-распределения с* U *степенями свободы и параметром нецентральности* $a_{ЦМ(s,r)}$*, определяемым (6).*

Литература

1. *Кнут Д.* Искусство программирования. В 3 т. М.: Мир, 1992.
2. *Харин Ю. С. и др.* Математические и компьютерные основы криптологии. Мн.: Новое знание, 2003.
3. *Иванов М. А., Чигунков И. В.* Теория, применение и оценка качества генераторов псевдослучайных последовательностей. М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2003.
4. *Уотермен М. С.* Математические методы анализа последовательностей ДНК. М.: Мир, 1999.
5. *Харин Ю. С., Ярмола А. Н., Петлицкий А. И.* Методы и алгоритмы статистического тестирования генераторов случайных и псевдослучайных последовательностей в системах информационной безопасности // Искусственный Интеллект. 2006. № 3. С. 793-803.
6. *Харин Ю. С.* Цепи Маркова с *r*-частичными связями и их статистическое оценивание // Доклады НАН Беларуси. 2004. т. 48. № 1. С. 40-44.
7. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.
8. *Харин Ю. С., Петлицкий А. И.* Об оценивании порядка цепи Маркова с частичными связями // Информационные системы и технологии. 2006. ч. 1. С. 156–161.
9. *Basawa I. V.* Statistical inference for stochastic processes. AP. 1980.
10. *Руссас Дж.* Контигуальность вероятностных мер. М.: Мир, 1975.
11. *Тихомирова М. И., Чистяков В. П.* О двух статистиках типа хи-квадрат, построенных по частотам цепочек состояний сложной цепи Маркова. // Дискретная математика. 2003. т. 15. № 2. С. 149–159.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ БИЛИНЕЙНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

О. Н. Радиевская

ВВЕДЕНИЕ

Большинство наблюдаемых процессов окружающего нас мира имеют нелинейную природу. Однако в настоящее время в теории и особенно на практике нелинейностью пренебрегают и исследуют эти процессы с помощью линейных моделей, структура и свойства которых просты и хорошо изучены. Но предположение о линейности процесса, как правило, является очень грубым. В этом случае встаёт вопрос количественной оценки влияния нелинейности на выводы, полученные с помощью линейной модели. Наряду с этой проблемой, важным является изучение непосредственно нелинейных моделей, которые более точно описывают реальные процессы.