реме о двойном пределе ([1], с.115) существует $\lim\limits_{\alpha\in A} p_\alpha = p$. Предложение доказано.

1. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М., 1968.
2. Ludescher H. // Analele Universitatii din Timisoara. Ser. stiinte mat. 1978. Vol.16. Fasc.2.
3. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. М., 1979.
4. Келли Дж.Л. Общая топология. М., 1981.

Поступила в редакцию 06.04.98.

УДК 517.968

В.В.КАШЕВСКИЙ

СИНГУЛЯРНЫЙ ОПЕРАТОР С ЛОГАРИФМОМ В ЯДРЕ И ПРОСТРАНСТВА ГЕЛЬДЕРА

It is proved that the generalized singular operator is bounded from H_0^μ and $H^{\mu,1}$.

Введем следующий оператор

$$\left(S_{\ln} f\right)(x) = \int_0^1 \frac{f(t)\ln|t-x|}{t-x}\,dt, x\in[0,1]. \tag{1}$$

Будем считать $f(x)\in H^{m,k}$, если найдется постоянная c такая, что

$$\left|f(x+h)-f(x)\right| \le ch^\mu \left(\ln\frac{1}{h}\right)^k, \tag{2}$$

для всех x, $x+h\in[0,1]$, $0<h<\frac{1}{3}$, k=0,1.

Когда $f(0)=f(1)=0$, то пишем $f(x)\in H_0^{\mu,k}$.

Кроме того, пусть $H^{\mu,0}=H^\mu$, $\quad H_0^{\mu,0}=H_0^\mu$.

В работе (1) было получено интегральное представление

$$\left(S_{\ln} f\right)(x) = -\frac{\pi^2}{2} f(x) + \ln(1-x)\int_0^1 \frac{f(t)dt}{t-x} - \int_0^1 \frac{Rf(t)dt}{t-x} + \int_0^1 \left(\ln\frac{t}{1-t}\right)\frac{f(t)dt}{t-x}, \tag{3}$$

где $\left(Rf\right)(x) = \int_0^x \frac{f(x)-f(t)}{x-t}\,dt.$

Лемма. Если $\varphi(t)\in H_0^\mu$, то $\left(\ln\frac{t}{1-t}\right)\varphi(t)\in H_0^{\mu,1}$.

Доказательство. Покажем, что справедлива оценка (2)

$$\left|\varphi(t+h)\ln(t+h)-\varphi(t)\ln t\right| \le \left|\varphi(t+h)-\varphi(t)\right|\left|\ln(t+h)\right| +$$
$$+\left|\varphi(t)\right|\left|\ln(t+h)-\ln t\right| = A_1 + A_2.$$

Вначале оценим

$$A_1 \le ch^\mu \ln\frac{1}{t+h} \le ch^\mu \ln\frac{1}{h}.$$

Теперь оценим A_2 при $h>t$

$$A_2 \le ct^\mu \ln\left(1+\frac{h}{t}\right) \le ct^\mu \ln\frac{1}{t} \le ch^\mu \ln\frac{1}{h}.$$

Пусть $h<t$. Тогда

$$A_2 \le ct^\mu \ln\left(1+\frac{h}{t}\right) \le ct^\mu \frac{h}{t} \le ch^\mu \left(\frac{h}{t}\right)^{1-\mu} \le ch^\mu \ln\frac{1}{h}.$$

Собирая оценки, получим

$$A_1 + A_2 \le 2ch^{\mu} \ln \frac{1}{h}.$$

Лемма доказана.

Теорема. Оператор (1) является ограниченным из пространства H_0^{μ} в пространство $H^{\mu,1}$, $0<\mu<1$.

Доказательство. Вначале преобразуем одно из слагаемых формулы (3):

$$\int_0^1 \frac{(Rf)(t)dt}{t-x} = (Rf)(1)\int_0^1 \frac{tdt}{t-x} + \int_0^1 \frac{(Rf)(t) - t(Rf)(1)}{t-x} dt = (S_0 f)(x) + (S_1 f)(x).$$

$$(S_0 f)(x) = (Rf)(1)(-x\ln x - (1-x)\ln(1-x) + 1) +$$

$$+ \ln(1-x)(Rf)(1) = \ln(1-x)\int_0^1 \frac{f(t)dt}{t-1} + (S_2 f)(x).$$

Получим формулу

$$\int_0^1 \frac{(Rf)(t)dt}{t-x} = \ln(1-x)\int_0^1 \frac{f(t)dt}{t-1} + (S_1 f)(x) + (S_2 f)(x), \qquad (4)$$

где $(S_1 f)(x) = \int_0^1 \frac{(Rf)(1) - t(Rf)(1)}{t-x}dt$, а $(S_2 f)(x) \in H^{\mu,1}$ по лемме.

Из (3) и (4) вытекает, что

$$(S_{\ln} f)(x) = -\frac{\pi^2}{2} f(x) - (S_1 f)(x) - (S_2 f)(x) +$$

$$+ \int_0^1 \left(\ln\frac{t}{1-t}\right)\frac{f(t)dt}{t-x} + \ln(1-x)\left(\int_0^1 \frac{f(t)dt}{t-x} - \int_0^1 \frac{f(t)dt}{t-1}\right).$$

Заметим, что оператор $(Sf)(x) = \int_0^1 \frac{f(t)dt}{t-x}$ ограничен из H_0^{μ} в H^{μ}, а также из $H_0^{\mu,1}$ в $H^{\mu,1}$ [2], [3]. Учитывая лемму, получим, что $(S_3 f)(x) \in H^{\mu,1}$, $(S_4 f)(x) \in H^{\mu,1}$. Из [1] и [3] вытекает, что $(S_1 f)(x) \in H^{\mu,1}$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \sqrt{x - \frac{1}{2}}, x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \\ 2 - 2x, x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

Тогда поведение функции $(S_{\ln} f_0)(x)$ показывает, что результат теоремы нельзя усилить в гельдеровских классах. В частности, оператор $S_{\ln}$ не будет ограничен в пространстве H^{μ}.

1. Кашевский В.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1993. №1. С.66.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977.
3. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М., 1980.

Поступила в редакцию 14.05.98.