УДК 62-50

В.И.БУЛАТОВ

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ РЕГУЛЯРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Criteria of the existence of solutions of the regular discrete systems and linear differenial systems are obtained.

Рассмотрим дискретную стационарную систему

$$A_0x(t+1)=Ax(t)+Bu(t),\ t\in\mathbf{Z}^+=\{0,1,2,...\}, \tag{1}$$

и ассоциированную с ней линейную дифференциальную систему

$$A_0\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\ t\in[0;+\infty[, \tag{2}$$

где x — n-вектор; u — r-вектор; A_0, A и B соответственно $n\times n$, $n\times n$ и $n\times r$-матрицы.

Под решением дискретной системы (1), соответствующим начальному условию

$$x(0)=x_0, \tag{3}$$

где x_0 — постоянный n-вектор, будем подразумевать пару $(x(t);\ u(t))$, $t\in\mathbf{Z}^+$, из вектор-последовательностей $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$,..., и $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$,..., удовлетворяющих (1), (3).

Под решением линейной дифференциальной системы (2) с начальным условием (3) подразумеваем пару $(x(t);u(t))$, $t\in[0,+\infty[$, из достаточно гладких вектор-функций $x(t)$ и $u(t)$, удовлетворяющих (2), (3).

Для заданного n-вектора x_0 рекуррентное соотношение

$$A_0x_{k+1}=Ax_k+Bu_k,\ k=\overline{0,n-1}, \tag{4}$$

где x_1, x_2,...,x_n и u_0, u_1,...,u_{n-1} соответственно n-векторы и r-векторы, будем называть определяющим уравнением для систем (1) и (2) с начальным условием (3).

Системы (1) и (2) считаем регулярными, если найдется такое число λ_0, что

$$\det(\lambda_0A_0-A)\neq 0. \tag{5}$$

Для регулярных систем (1) и (2) с начальным условием (3) введем функцию

$$f(\lambda)=\frac{h(\lambda)}{g(\lambda)}, \tag{6}$$

где $h(\lambda)$ является наибольшим общим делителем миноров n-го порядка λ-матрицы

$$P(\lambda)=[\lambda A-A_0;B], \tag{7}$$

а $g(\lambda)$ означает наибольший общий делитель миноров n-го порядка расширенной λ-матрицы $[P(\lambda);\ Ax_0]$. Очевидно, что при выполнении (5) функция (6) корректно определена и представляет собой полином от λ.

Имеет место

Теорема. Следующие утверждения равносильны:

(a) регулярная дискретная система (1) имеет решение, соответствующее начальному условию (3);

(b) при выполнении (5) определяющее уравнение (4) разрешимо относительно n-векторов x_1, x_2,...,x_n и r-векторов u_0, u_1,...,u_{n-1};

(c) для регулярных систем (1) и (2) с начальным условием (3) полином (6) удовлетворяет соотношению $f(0)\neq 0$;

(d) линейная регулярная система (2) имеет бесконечно дифференцируемое решение, соответствующее начальному условию (3).

Доказательство проведем по схеме

$$(a)\Rightarrow(b)\Rightarrow(c)\Rightarrow(d)\Rightarrow(a).$$

Из условия (a) следует, что для заданного n-вектора x_0 векторы

$$\begin{cases} x_i = x(i), & i = \overline{1,n}, \\ u_j = u(j), & j = \overline{0,n-1}, \end{cases}$$

где $(x(t);\ u(t))$, $t \in \mathbf{Z}^+$, является соответствующим решением регулярной дискретной системы (1) с начальным условием (3), будут удовлетворять (4) и, значит, выполняется (b).

Для обоснования перехода (b)$\Rightarrow$(c) заметим, что, в силу [1], для корня $\lambda=0$ кратности m полинома $h(\lambda)$ найдется такая управляемая пара $m\times m$ и $m\times n$-матриц S и G, что $\det(\lambda E-S)=\lambda^m$ и для λ-матрицы (7) элементами матрицы

$$(\lambda E-S)^{-1}GP(\lambda)=[(\lambda E-S)^{-1}(SGA-GA_0)+GA;\ (\lambda E-S)^{-1}GB]$$

будут целые функции от λ. Отсюда, на основании теоремы Гамильтона–Кэли [2], во-первых, получаем $S^m=0$, и, во-вторых, имеем $SGA=GA_0$, $GB=0$. Поэтому для $y_k=GAx_k$, $k=\overline{0,n}$, из (4) следует $y_k=G(A_0x_{k+1}-Bu_k)=GA_0x_{k+1}=$ $=SGAx_{k+1}=Sy_{k+1}$, $k=\overline{0,n-1}$. Из этого рекуррентного соотношения последовательно получаем

$$GAx_0=y_0=Sy_1=S^2y_2=\ldots=S^my_m=0.$$

Значит, элементами матрицы

$$(\lambda E-S)^{-1}G[P(\lambda);Ax_0]=[(\lambda E-S)^{-1}GP(\lambda);0]$$

будут целые функции от λ. Поэтому в силу [1] число $\lambda=0$ является корнем кратности не ниже m полинома $g(\lambda)$. Отсюда, для полинома (6) следует $f(0)\neq 0$.

Если выполнено (c), то по [3] регулярная система (2), (3) будет иметь достаточно гладкие решения, причем среди этих решений всегда найдется пара $(x_0(t);\ u_0(t))$, $t\in[0;+\infty[$, с бесконечно дифференцируемыми функциями $x_0(t)$ и $u_0(t)$, т.е. будет справедливо (d).

Для обоснования перехода (d)$\Rightarrow$(a) отметим, что, в силу равенств

$$\begin{cases} A_0\dot{x}_0(t) = Ax_0(t)+Bu_0(t), & t\in[0;+\infty[, \\ x_0(0)=x_0, & \end{cases}$$

для бесконечно дифференцируемого решения $(x_0(t);\ u_0(t))$, $t\in[0;+\infty[$, регулярной системы (2), (3), последовательным дифференцированием при $t=0$ получаем вектор-последовательности

$$\begin{cases} x(k)=x_0^{(k)}(0), \\ u(k)=u_0^{(k)}(0), & k\in\mathbf{Z}^+, \end{cases}$$

которые будут удовлетворять начальному условию (3) и соотношениям

$$A_0x(k+1)=Ax(k)+Bu(k),\ k\in\mathbf{Z}^+,$$

и поэтому дадут соответствующее решение дискретной регулярной системы (1) с начальным условием (3).

1. Булатов В. И. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. Мн., 1981.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1988.
3. Булатов В. И. Критерий существования решений одного класса регулярных систем: Мат. междунар. конф. “Проблемы математики и информатики”, Гомель, 1994. Ч.1.

Поступила в редакцию 03.03.97.