$$t^{(\mp)} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2h^{(\mp)}\xi + \left(h^{(\mp)}\right)^2 \left(1 - v_z^2\right)},\ -\frac{\pi}{2} \le \arg t^{(\mp)} < \frac{\pi}{2},$$

$$l^{(\mp)} = \omega\sigma - \sigma V\xi + \frac{1}{2} i\mu\sigma^2 V^2 \gamma v_z^2 \mp iVDv_z,\ d = -\frac{\tilde{\sigma}}{p},\ q^{(\mp)} = i\frac{p-1}{pv_z}\left(\frac{\omega}{V} - \xi\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\mu\sigma V\gamma v_z \mp \frac{D}{\sigma p},\ \eta^{(\mp)} = \frac{g\sigma - g_1 p}{\sigma p V}\omega - \frac{g-p}{p}\xi + \frac{1}{2} i\frac{g}{p}\mu\sigma\gamma V v_z^2 \mp i\frac{g}{\sigma p} D v_z,$$

$$D = \left(\sigma^4\left(1 - s^2\right)\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \zeta^2\right) + \frac{1}{4}\mu^2\sigma^4 V^2 \gamma^2 v_z^2 - 2\sigma^4 \frac{\omega}{V}\left(1 - s^2\right)\xi + \right.$$

$$+2\sigma^2\frac{\omega}{V} - 2\frac{\omega^2}{V^2}\sigma^2\left(1 - v_z^2\right) - s^2\sigma^2\frac{\omega^2}{V^2}v_z^2 + \frac{\omega^2}{V^2}\left(1 - v_z^2\right) + \sigma^2\zeta^2 +$$

$$\left. +\sigma^4\frac{\omega^2}{V^2}\left(1 - s^2\right)\left(1 - v_z^2\right) + i\mu\gamma V\sigma^3\left(\xi - \frac{\omega}{V}\right)\right)^{1/2}, -\frac{\pi}{2} \le \arg D < \frac{\pi}{2}.$$

Литература

1. *Ерофеенко В. Т., Кравченко В. Ф., Крючков А. И.* Теоремы сложения для базисных электромагнитных полей // Радиотехника, 1995. № 6. С. 49 – 57.
2. *Новожилов Ю. В., Яппа Ю. А.* Электродинамика / М. 1978.

ВЫБОР ЛОКАЛЬНОЙ ОКРЕСТНОСТИ В НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ТЕСТЕ НЕЛИНЕЙНОЙ КОИНТЕГРАЦИИ

Е. И. Русак

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДАННЫХ

При совместном анализе и эконометрическом моделировании нестационарных временных рядов значительное место уделяется тестированию и учету свойства коинтегрированности временных рядов [1]. Большая часть теоретических результатов и практических приложений связана с понятием линейной коинтегрированности [5]. Однако в последнее время исследователей все больше интересует свойства нелинейных преобразований интегрированных временных рядов и проблема нелинейной коинтеграции [2].

Данная статья посвящена разработке правила выбора локальной аппроксимирующей окрестности для непараметрического теста коинтегрированности между нестационарными (интегрированными) временными рядами. Сформулируем математическую модель.

Пусть имеется N-мерный временной ряд $x_t=(x_{t1},...,x_{tN})\in R^N, t=1,2,...,T$, для которого выполняется соотношение:

$$T(x_t)=x_{t1}-\varphi(\overline{x}_t)=\xi_t, \tag{1}$$

где $\overline{x}_t=(x_{t2},...,x_{tN})^T; \xi_t$ – некоторый стационарный процесс. Функции $T(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ принадлежат некоторому классу достаточно гладких функций.

В случае, когда компоненты вектора $x_t \in \Re^N$ являются стационарными временными рядами, данный вектор при условии (1) можно рассматривать как вектор с «существенно зависимыми компонентами» [3]. Если $\{x_{ti}\}_{i=2}^N$ –нестационарные интегрированные временные ряды одного порядка интегрированности, то соотношение (1) можно рассматривать как свойство нелинейно коинтегрированных с функцией $\varphi(\cdot)$ временных рядов $\{x_{ti}\}_{i=1}^N$ [2].

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПЛОТНОСТИ С АДАПТИВНЫМ ЯДРОМ

Одной из наиболее распространенных оценок многомерной плотности распределения вероятностей является оценка Розенблата-Парзена с многомерным гауссовским ядром:

$$f_T(x)=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} n_N(x\,|\,X_i,h^2H), \tag{3}$$

где $A=\{X_i : X_i\in R^N, i=\overline{1,T}\}$ – случайная выборка из N-мерного распределения вероятностей с неизвестной плотностью $f(\cdot)$; $n_N(x\,|\,a,B)-N$-мерная гауссовская плотность с математическим ожиданием a и ковариационной матрицей B; $h=h(T)$ – коэффициенты размытости, удовлетворяющие при $T\to\infty$ условиям: $h\to 0, Th^N\to\infty$.

В [3] в нелинейном случае (1) было предложено использовать модифицированную оценку плотности с адаптивным ядром

$$f_{T,1}(X)=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} n_N(X\,|\,X_i,h_i^2 S(i,k_i)). \tag{4}$$

Адаптация достигается за счет использования локальных оценок $\{S(i,k_i)\}$ матрицы ядра H, построенных для каждой точки X_i в некоторой локальной окрестности, обеспечивающей линейную аппроксимацию нелинейной гиперповерхности, определяемой соотношением (1). При этом коэффициенты размытости h_i для точки X_i вычисляются по формуле

$$h_i = \alpha(N) k_i^{-\frac{1}{N+4}}. \tag{5}$$

ВЫБОР ЛОКАЛЬНОЙ ОКРЕСТНОСТИ НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ

В данной работе предлагается определять оптимальный размер окрестности для точки X_i количеством k_i попавших в нее точек из выборки A_i на основе теста для проверки гипотезы о линейной зависимости компонент гауссовского случайного вектора, основанного на статистике Андерсона [4].

Опишем вначале сам тест в предположении, что $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ – p-мерный случайный гауссовский вектор, для которого μ – вектор математического ожидания, Σ – ковариационная матрица. Разобьем вектор X на q подвекторов с $p_1, p_2, ..., p_q$ компонентами. Соответственным образом разбиваются вектор μ и матрица Σ. Пусть $X_1,..,X_T$ – случайная выборка из описанного распределения.

Введем следующие обозначения:

$$A_{q\times q} = \sum_{i=1}^{T}(X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})', \; \bar{X} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} X_i \tag{6}$$

$$V = \frac{|A|}{\prod_{i=1}^{q}|A_{ii}|} = \frac{|R|}{\prod_{i=1}^{q}|R_{ii}|} \tag{7}$$

где R - выборочная матрица корреляции.

В [4] показано, что для проверки гипотезы H_0 о независимости q множеств компонент можно использовать статистику (7). В случае, когда q=2 распределение статистики V совпадает с распределением случайной величины $U_{p_1,p_2,T-1-p_2}$. Тест, основанный на V-статистке (*V-тест*), определяется следующим образом:

$$\text{гипотеза о независимости } H_0 = \begin{cases} \text{не отклонянется, } V > \Delta(\varepsilon, T) \\ \text{отклонянется, } V \le \Delta(\varepsilon, T) \end{cases}. \tag{8}$$

При заданном уровне значимости ε, пороговое значение Δ находится из ограничения на вероятность ошибки первого рода и равно квантили уровня $1-\varepsilon$ соответствующего распределения:

$$\Delta = \Delta(\varepsilon, T) = U^{-1}_{p_1, p_2, T-1-p_2}(\varepsilon), \tag{9}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Статистика отношения правдоподобия для проверки гипотезы о взаимной линейной независимости q множеств компонент задается формулой (7), где A имеет вид (6). Критерий отношения правдоподобия (V-тест) для $q = 2$ задается формулой (8). Порог теста $\Delta(\varepsilon)$ определяется формулой (9).

В [4] также показано, что при $p_1 = 1$

$$U_{1, p_2, T-p_2-1} = \frac{1}{1 + \dfrac{p_2}{T - p_2 - 1} F_{p_2, T-p_2-1}}, \tag{10}$$

где $F_{p_2, T-p_2-1}$ - величина, распределенная по закону Фишера с $p_2, T - p_2 - 1$ степенями свободы. Тогда порог критерия имеет вид:

$$\Delta = \Delta(\varepsilon, T) = \frac{1}{1 + \dfrac{p_2}{T - p_2 - 1} \cdot F^{-1}_{1, T-p_2-1}(1-\varepsilon)}, \tag{11}$$

Опишем процедуру выбора локальной аппроксимирующей окрестности. Для каждого выборочного наблюдения X_i будем определять объем k_i^* выборки, попадающей в локальную окрестность, которая аппроксимирует нелинейный участок гиперповерхности линейным. Для этой цели используется правило:

$$k_i^* = \min_{k_0 \le k_i' < T-1} k_i', \quad k_i' \in K_i, K_i = \{k_i' : V(k_i') \le \Delta(\varepsilon, k_i')\} \tag{12}$$

где k_0 – некоторое начальное значение, а статистика $V(k_i')$ и порог теста $\Delta(\varepsilon, k_i')$ определяются из (7), (11).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ V-ТЕСТА

Для экспериментального исследования критерия отношения правдоподобия используется тестовая модель данных, описывающая двумерный векторный временной ряд с компонентами y_t, x_t $(t = \overline{1, T})$ вида:

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t^{(x)}, t = \overline{1,T},$$
$$y_t = ax_t + \varepsilon_t^{(y)}, t = \overline{1,T}, \quad (13)$$

где $\varepsilon_t^{(x)}, \varepsilon_t^{(y)}$ - независимы и одинаково распределены по нормальному закону $N_1(0,0.01)$, T – длина временного ряда, x_0 – некоторое начальное значение. Рассматриваемый *V*-тест применяется не для исходных временных рядов, а для их первых разностей $\Delta y_t, \Delta x_t$, так как в данном случае Δx_t является гауссовской случайной величиной, а распределение *V*-статистики не зависит от распределения одной из компонент вектора (в нашем случае Δy_t). Целью модельных экспериментов является исследование мощности теста для различных объемов выборки и значений параметра *a* в модели (13), характеризующего степень линейной зависимости временных рядов. Результаты, приведенные в табл. 1, свидетельствуют о том, что при увеличении объема выборки *T*, размер теста при $\varepsilon = 0.05$ остается неизменным, а мощность теста стремится к 1. Это свойство теста дает возможность использовать данный подход для тестирования линейной коинтегрированности.

В общем случае, описанный тест можно использовать для выбора локальной окрестности в ядерной оценке плотности с адаптивным ядром (4). Действительно, пусть $f_{T,1}(x_t)$ – статистика, вычисляемая как непараметрическая оценка плотности вектора с существенно зависимыми компонентами с адаптивным ядром. В данной оценке матрица гауссовского ядра оценивается по выборкам из локальных окрестностей, которые находятся по правилу (12). Оценки $f_{T,1}(x_t)$ затем используются для получения ряда остатков $\hat{\xi}_t = y_t - \hat{y}_t$ из условия:

$$\hat{y}_i = \arg\max_{y \in Y} f_{T,1}(y \mid X_i^{(1)} = x_i), i = \overline{1,T} \quad (14)$$

Таблица 1.

Объем выборки	Порог значимости	Оценки мощности			
		a = 0,1	a = 0,2	a = 0,5	a = 0,9
		6,85	8,41	16,82	37,62
20	0,803074	6,88	9,45	30,63	70,06
30	0,869674	6,99	12,01	44,43	87,17
40	0,902652	7,47	14,26	55,80	94,92
50	0,922320	8,45	16,02	66,12	98,36
100	0,961368	10,82	28,21	92,95	100
500	0,992308	35,73	87,87	100	100
1000	0,996156	60,61	99,43	100	100

Если временной ряд остатков $\{\hat{\xi}_t\}$ является стационарным, то это должно свидетельствовать о том что: а) временные ряды $\{x_{ti}\}_{i=1}^{N}$ связаны «существенной зависимостью» для стационарных временных рядов $\{x_{ti}\}_{i=2}^{N}$; б) временные ряды $\{x_{ti}\}_{i=1}^{N}$ являются нелинейно коинтегрированными с некоторой неизвестной функцией $\varphi(\cdot)$. Для тестирования стационарности остатков $\{\hat{\xi}_t\}$, можно использовать различные тесты единичного корня [5].

Литература

1. *Robert F. Engle and C. W. J. Granger.* Co-integration and error correction representation, estimation, and testing // Econometrica. 1987. No. 2. Vol. 55. P. 251–276.
2. *Jin-Lung Lin, Clive W. J. Granger.* Testing Nonlinear Cointegration // Proc. of the Conference «Nonlinear Time Series Analysis». 2004.
3. *Малюгин В. И.* Об оценивании плотности вероятностей случайных векторов с существенно зависимыми компонентами // Вестник БГУ. Сер. 2. 1985. С. 41–44.
4. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ / Пер. с англ. Ю. Ф. Кичатова; Под ред. Б. Ф. Гнеденко. Москва. 1963. 500.
5. *Харин Ю.* С., *Малюгин В. И.* Эконометрическое моделирование / М. БГУ. 2003. 313.

ТЕКСТУРНАЯ СЕГМЕНТАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА БАЗЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ МАРКОВА

П. М. Самойлов

При анализе изображений важной их характеристикой служит текстура, которая присутствует во всех изображениях, начиная со снимков, полученных с помощью самолетных и спутниковых устройств и кончая микроскопическими изображениями в биомедицинских исследованиях. Во многих задачах анализа и интерпретации изображений (визуальное слежение, хирургия, мультимедийные приложения и т. д.) текстурное изображение необходимо сегментировать для его последующего распознавания.

Объектами исследования данной работы стали случайные поля Маркова (*MRF, Markov Random Fields*) и их применение для текстурной сегментации изображений. Целью работы являлась разработка и реализация модуля сегментации на однородные регионы аэрофотоснимков и фотографий, полученных со спутника.

Рассмотрим математическую модель MRF. Определим MRF на графах. Пусть $G=(S,E)$ - граф, где $S=\{s_1,\ldots,s_N\}$ - множество вершин, E - множество ребер. Пусть V_s - множество всех вершин графа, смежных с