ЭКОНОМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХ КОНКУРЕНТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА. СИЛЫ ГОСУДАРСТВА

Е. А. Пристрем

В данной работе исследуется математическая модель, описывающая действия силы государства по отношению к ценам на рынке. Результат моделирования представлен в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цель − исследование устойчивости равновесия динамического развития цен на рынке товаров и услуг во времени, основанной на вмешательстве внешних структур.

Запишем экономическую систему дифференциальных уравнений и дадим экономическое пояснение параметрам. Основное дифференциальное уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(pq(p)\dot{p}) = r_0 p_0 (pq(q) - p_0 q_0), \tag{1}$$

где p_0 – равновесная цена, q_0 – объем продаж при равновесной цене, r_0 – постоянный коэффициент, учитывающий процент обязательных выплат продавцом товара внешним структурам, $F_g = r_0 p_0 (pq - p_0 q_0)$ – сила внешних структур, где pq означает доход.

Данное уравнение (1) сводится к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha(x) y^2 + \beta(x); \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha(x) = \left(\frac{1}{x + p_0} + \frac{q'(x + p_0)}{q(x + p_0)} \right)$, $\beta(x) = r_0 \left(p_0 - \frac{{p_0}^2 q_0}{(x + p_0) q(x + p_0)} \right)$,

с помощью замены $\begin{cases} x = p - p_0, \\ y = \dot{x} = \dot{p}. \end{cases}$

Исследуется устойчивость экономического равновесия системы (2), которая далее после разложения в ряд Тейлора отдельных ее коэффициентов представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -a^2 x + Z(x,y); \end{cases} \tag{3}$$

где коэффициенты:

$$a^2 = -r_0 p_0{}^2 q_0 \left(\frac{1}{p_0^2 q_0} + \frac{q'_0}{p_0 q_0^2} \right),$$

$$Z(x,y) = -r_0 p_0{}^2 q_0 \left(\frac{1}{p_0{}^3 q_0} + \frac{q'_0}{p_0{}^2 q_0{}^2} - \frac{q''_0\, q_0 - 2q'_0{}^2}{p_0\; q_0{}^3} \right) x^2 -$$

$$- r_0 p_0{}^2 q_0 \left(\frac{q''_0\, q_0 - 2q'_0{}^2}{p_0{}^2 q_0{}^3} - \frac{1}{p_0{}^4 q_0} - \frac{q'_0}{p_0{}^3 q_0{}^2} - \frac{-6q_0 q'_0\, q''_0 + 6q'_0{}^3 + q_0{}^2 q'''_0}{q_0{}^4\, p_0} \right) x^3 -$$

$$- y^2 \left(\frac{1}{p_0} + \frac{q'_0}{q_0} \right) - y^2 x \left(\frac{-2q'_0{}^2 + q_0 q''_0}{q_0{}^2} - \frac{1}{p_0{}^2} \right) -$$

$$- y^2 x^2 \left(\frac{1}{p_0{}^3} + \frac{2q'_0{}^3 + q'''_0\, q_0{}^2 - 3q_0 q'_0\, q''_0}{q_0{}^3} \right) -$$

$$- y^3 x^3 \left(\frac{q''''_0\, q_0^3 - 4q'_0\, q'''_0\, q_0^2 + 12 q_0 q'^2_0\, q''_0 - 3q_0^2 q''^2_0 - 6q'^4_0}{q_0^3} - \frac{1}{p_0^4} \right).$$

Исходя из последней системы (3), составляется система первого приближения, а именно:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -a^2 x. \end{cases} \tag{4}$$

Используя теорему об устойчивости по первому приближению, составим определитель матрицы данной системы:

$$\det A = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a^2 = 0,\ \lambda = \pm ia. \tag{5}$$

Значит, характеристическое уравнение матрицы системы первого приближения имеет пару чисто мнимых корней. Необходимо исследовать данный критический случай для того, чтобы определить, устойчива система или нет. Для этого в работе использовался метод, изложенный в книге [2].

Метод предполагает рассмотрение системы дифференциальных уравнений $n+2$ порядка, но рассматривался частный случай при $n=0$. Метод включает в себя несколько замен переменных, переход к полярным координатам и изучение отдельных коэффициентов на периодичность, а также выделение первого непериодического коэффициента r_m, который имеет вид:

$$r_m = gv + \varphi(v),\ g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_m dv.$$

В результате используется утверждение об устойчивости, изложенное в книге [2]: в случае центра невозмущенное движение устойчиво, но не асимптотически; в случае фокуса невозмущенное движение асимптотически устойчиво при $g < 0$ и неустойчиво при

$$g > 0.$$

Для данной экономической модели (1) в итоге получаем следующее утверждение.

Теорема. Экономическое равновесие $p=p_0$ модели (1) является асимптотически устойчивым для любых положительных значений параметров r_0, p_0, q_0.

Данный результат вытекает из изучения отдельного коэффициента

$$g = -\frac{9}{8}D_2^2,\ \text{где}\ D_2 = \frac{2}{3}(N_{0,2}a - \frac{1}{4a}r_0 {p_0}^2 q_0 M_2).$$

Здесь коэффициенты:

$$N_{0,2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p_0} + \frac{q'_0}{q_0}\right),\ M_2 = \frac{1}{{p_0}^3 q_0} + \frac{q'_0}{{p_0}^2 {q_0}^2} - \frac{q''_0 q_0 - 2{q'_0}^2}{p_0\ {q_0}^3}.$$

В результате исследования было установлено, что начало координат является фокусом, а коэффициент g, как видно, отрицательный, что и позволяет сделать вывод об асимптотической устойчивости. Равенство нулю этого коэффициента не предусматривалось по предположению.

Анализируя результаты исследования устойчивости равновесия цен, товаров и услуг на рынке, легко заметить, что государство оказывает весомое влияние на ценообразование, например, таким мощным рычагом экономики, как налоговая система. С помощью этой системы, в ответ на изменение цены на рынке, государство пытается урегулировать состояние экономики в целом.

При увеличении стоимости на товар сила государства возрастает, но в случае постоянного объема продаж (равновесной цены) сила становится пассивной в плане воздействия на регулирование цены.

Несмотря на довольно широкий ряд причин, по которым равновесие может нарушаться, сила государства, представленная данной моделью, приводит экономику в положение асимптотической устойчивости при любом уровне налогообложения.

Другие силы, такие как силы продавцов и покупателей, силы конкуренции, также играют существенную роль в оказании влияния на состояние экономики, но в данной работе рассматривалась только сила государства.

В настоящее время устойчивость равновесия на рынке цен изучена не полностью: строятся модели, проводятся исследования, ищутся ответы на многочисленные вопросы, поэтому считаем тему работы достаточно актуальной.

Литература

1. *Калитин Б. С.* Математические модели экономики / Мн: БГУ. 2004.
2. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения / М.: Наука. 1966.

ПЛОСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ДВИЖУЩИХСЯ ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Ю. В. Пулко

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, в котором зафиксируем декартову систему координат $O'x'y'z'$. При этом каждая точка $M \in \mathbb{R}^3$ определяется координатами $\vec{r}\,'=\left(x',y',z'\right)$. Будем считать, что все пространство $\mathbb{R}^3$ заполнено однородной изотропной средой, которая характеризуется постоянными диэлектрической проницаемостью ε, магнитной проницаемостью μ и проводимостью γ. При этом среда неподвижна относительно системы координат $O'x'y'z'$. Рассмотрим монохроматическое электромагнитное поле в пространстве $\mathbb{R}^3$ с комплекснозначными амплитудами поля $\vec{E}\,'$, $\vec{H}\,'$, которое колеблется с круговой частотой ω'. Для векторов поля $\vec{E}\,'$, $\vec{H}\,'$ выполнены уравнения Максвелла: