давцов на рынке, был строго больше коэффициента, показывающего интенсивность действий покупателей.

Рассмотренная модель является неполной, поскольку не учтены многочисленные силы, действующие на рынке, например, силы государства или силы притяжения и отталкивания, порожденные законом спроса и предложения. Такие исследования могли бы более полно отразить динамику происходящих процессов. Однако целью проведенных исследований было выяснение влияния отдельно взятой экономической силы.

**Литература**

11. *Калитин Б. С.* Математические модели экономики: Учебное пособие / Мн.: БГУ. 2004. 182.
12. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения / М.: Наука. 1966. 532.

# О СТАТИСТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ЦЕПЕЙ МАРКОВА С ЧАСТИЧНЫМИ СВЯЗЯМИ

**А. И. Петлицкий**

## ВВЕДЕНИЕ

При математическом моделировании часто возникает необходимость построения адекватных вероятностно-статистических моделей дискретных временных рядов $x_t \in A$, $t \in \mathrm{N}$ (где пространство состояний $A = \{0,1,\ldots,N-1\}$ – конечное множество мощности $N \geq 2$) с «длинной памятью» («long-memory» time series) [1–6]. Известной моделью таких дискретных временных рядов является цепь Маркова достаточно высокого порядка $s \in \mathrm{N}$, определяющего «длину памяти»; если $s = 1$, то цепь Маркова называется простой, если $s>1$ – сложной [7]. Однако для такой модели число параметров $D$ растет экспоненциально при увеличении порядка $s$: $D = N^s(N-1)$, и для статистического оценивания параметров требуется иметь реализацию $x_1,\ldots,x_n$ не всегда доступной на практике длительности $n > D$. В связи с этим актуальна проблема построения «малопараметрических» моделей цепей Маркова высокого порядка. В [8] предложено использовать модель смесей простых цепей Маркова, для которой в [9] исследовано предельное распределение. Также используются цепи Маркова с переменным порядком [10]. Оценивание параметров данной модели представлено в [11]. В данной работе исследуется новая общая «малопараметрическая» модель цепи Маркова $s$-го порядка с $r$-частичными связями ЦМ($s$, $r$), предложенная в [12].

**ЦЕПЬ МАРКОВА ЦМ($S$, $R$)**

Пусть $x_t$ – однородная цепь Маркова $s$-го порядка на $(\Omega, F, \mathrm{P})$ с некоторой $(s+1)$-мерной матрицей вероятностей переходов $P = \left(p_{i_1,\ldots,i_{s+1}}\right)$, $i_1,\ldots,i_{s+1} \in A$; $r \in \{1,\ldots,s\}$ – параметр, который называется числом связей; $M_r^0 = \left(m_1^0,\ldots,m_r^0\right) \in \mathrm{M}$ – произвольный целочисленный $r$-вектор с упорядоченными компонентами $1 = m_1^0 < m_2^0 < \ldots < m_r^0 \le s$, который называется шаблоном связей; $\mathrm{M}$ – множество всевозможных таких векторов с $r$ компонентами, имеющее мощность $\mathrm{K} = |\mathrm{M}| = \mathrm{C}_{s-1}^{r-1}$; $Q^0 = \left(q^0_{j_1,\ldots,j_r,j_{r+1}}\right)$, $j_1,\ldots,j_{s+1} \in A$, – некоторая $(r+1)$-мерная стохастическая матрица.

Цепь Маркова $x_t$ называется цепью Маркова $s$-го порядка с $r$ частичными связями и обозначается ЦМ($s$,$r$), если ее вероятности одношаговых переходов имеют вид:

$$p_{i_1,\ldots,i_s,i_{s+1}} = q^0_{i_{m_1^0},\ldots,i_{m_r^0},i_{s+1}},\ i_1,\ldots,i_{s+1} \in A. \qquad (1)$$

Примем обозначения: $J_s = (j_1,\ldots,j_s) = (J_{s-1}, j_s) \in A^s$ – мультииндекс $s$-го порядка; $\delta_{J_s,J_s'}$ – символ Кронекера для мультииндексов $J_s$, $J_s'$; $S_t(X_n; M_r) = \left(x_{t+m_1-1},\ldots,x_{t+m_r-1}\right) \in A^r$ – функция $A^n \times \mathrm{M} \to A^r$, которую условимся называть селектором $r$-го порядка с параметрами $M_r \in \mathrm{M}$ и $t \in \{1,\ldots,n-s+1\}$; $\mathrm{I}\{B\} \in \{0,1\}$ – индикатор события $B$; $\Pi_{K_s} = \mathrm{P}\{X_s = K_s\}$ – начальное $s$-мерное распределение вероятностей ЦМ($s$, $r$);

$$\nu_{r+1}(J_{r+1}; M_r) = \sum_{t=1}^{n-s} \mathrm{I}\{S_t(X_n; M_{r+1}) = J_{r+1}\}$$

– частота $(r+1)$-граммы $J_{r+1} \in A^{r+1}$ для шаблона $M_{r+1} = (M_r, s+1)$. Условимся полагать, что если вместо какого-то индекса стоит точка, то это означает суммирование по всем возможным значениям этого индекса.

**Теорема 1.** ЦМ($s$, $r$), определяемая (1), эргодична тогда и только тогда, когда найдется целое число $l \ge 0$ такое, что

$$\min_{J_s, J_s' \in A^s} \sum_{K_l \in A^l} \prod_{i=1}^{s+l} q^0_{S_i\left((J_s, K_l, J_s'); M_{r+1}^0\right)} > 0.$$

По наблюдаемой реализации $X_n$ на основе подстановочного принципа построен информационный функционал $\hat{I}_{r+1}(M_r)$.

**Теорема 2.** ОМП $\hat{M}_r$, $\hat{Q}=\left(\hat{q}_{J_{r+1}}\right)$, $J_{r+1}\in A^{r+1}$, параметров $M_r^0$, $Q^0$ определяются следующими соотношениями:

$$\hat{M}_r=\arg\max_{M_r\in \mathrm{M}}\hat{I}_{r+1}(M_r),$$

$$\hat{q}_{J_{r+1}}\left(\hat{M}_r\right)=\begin{cases}\nu_{r+1}\left(J_{r+1};\hat{M}_r\right)/\nu_{r+1}\left(J_r\ \cdot;\hat{M}_r\right), \text{ если } \nu_{r+1}\left(J_r\ \cdot;\hat{M}_r\right)>0,\\ 1/N, \text{ если } \nu_{r+1}\left(J_r\ \cdot;\hat{M}_r\right)=0.\end{cases} \qquad (2)$$

Пусть: $\Pi^*_{K_s}$ – стационарное распределение вероятностей ЦМ(*s,r*);

$$\mu_{r+1}\left(J_{r+1};M_r,M_r^0\right)=\sum_{K_{s+1}\in A^{s+1}}\mathrm{I}\{S_1(K_{s+1};M_{r+1})=J_{r+1}\}\,\Pi^*_{K_s}\,p_{K_{s+1}}.$$

**Теорема 3.** Если ЦМ(*s,r*), определяемая (1), стационарна и шаблон $M_r^0\in\mathrm{M}$ удовлетворяет условию идентифицируемости, то при $n\to\infty$ ОМП $\hat{M}_r$, $\hat{Q}$, определяемые (2), состоятельны:

$$\hat{M}_r\xrightarrow{\mathrm{P}}M_r^0,\ \hat{Q}\xrightarrow{L_2}Q^0,$$

причем справедливо асимптотическое разложение для вариации оценки $\hat{Q}$:

$$\Delta_n^2=\mathrm{E}\left\{\left\|\hat{Q}-Q^0\right\|^2\right\}=\frac{1}{n-s}\cdot\sum_{J_{r+1}\in A^{r+1}}\frac{\left(1-q^0_{J_{r+1}}\right)q^0_{J_{r+1}}}{\mu_{r+1}\left(J_r\ \cdot;M_r^0,M_r^0\right)}+o\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (3)$$

С помощью оценок (2) построен критерий статистической проверки гипотез $H_0$: $Q^0=Q_0$ против альтернативы общего вида $H_1=\overline{H}_0$, где $Q_0=\left(q_{0J_{r+1}}\right)$ – некоторая заданная стохастическая матрица. Решающее правило заданного асимптотического размера $\varepsilon\in(0,1)$ имеет вид:

$$\text{принимается } \{H_0, \text{ если } \rho\le\Delta; H_1, \text{ если } \rho>\Delta\},$$

где $\rho=\sum_{J_{r+1}:\,q_{0J_{r+1}}>0}\nu_{r+1}\left(J_r\ \cdot;\hat{M}_r\right)\left(\hat{q}_{J_{r+1}}-q_{0J_{r+1}}\right)^2/q_{0J_{r+1}}$, $\Delta=G_L^{-1}(1-\varepsilon)$.

На рис. 1 для ЦМ(256,6) приведен график зависимости вариации $\Delta_n^2$ оценки $\hat{Q}$ от длительности наблюдений $n$ (при числе «прогонов» $L=10^4$); кривая вычислена теоретически с помощью главного члена разложения (3), «кружки» – экспериментальные значения, вычисленные по методу Монте-Карло.

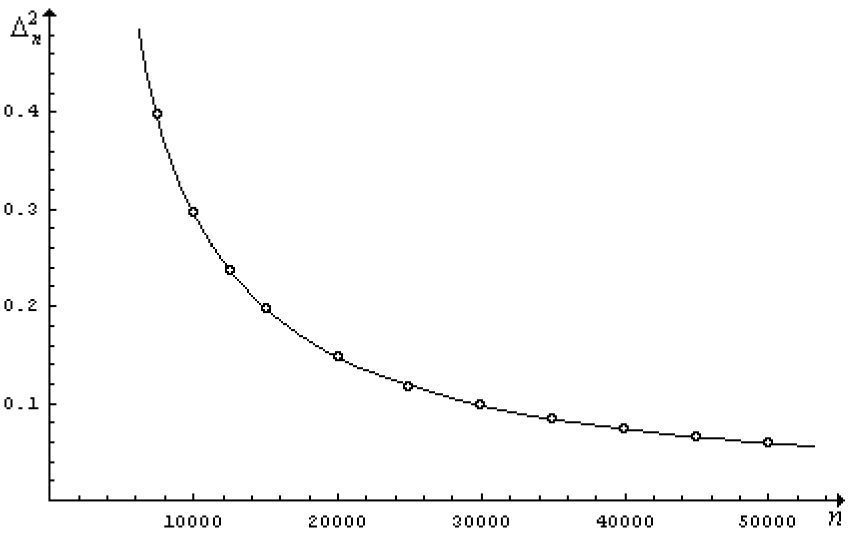


*Рис. 1*. Зависимость $\Delta_n^2$ от $n$ при $N$=4, $s$=64, $r$=3.

**Литература**


1. *Fan J., Yao Q.* Nonlinear time series. Springer. 2003.
2. *Collett D.* Modelling binary data. Chapman&Hall. 2003.
3. *Yaffee R. A., McGee M.* Time series analysis and forecasting. AP. 2002.
4. *Уотермен М. С.* Математические методы анализа последовательностей ДНК. / М., 1999.
5. *Харин Ю. С., Берник В. И., Матвеев Г. В., Агиевич С. В.* Математические и компьютерные основы криптологии. / Мн.: Новое знание. 2003.
6. *Зубков А. М.* Датчики псевдослучайных чисел и их применения // Сб.: Труды II Международной научной конференции «Математика безопасности информационных технологий». М.: МГУ. 2003. С. 200–206.
7. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы. М. 1956.
8. *Raftery A. E.* A model for high-order Markov chains // Journal of the Royal Statistical Society. 1985. Vol. B – 47. № 3. P. 528–539.
9. *Adke S. R., Deshmukh S. R.* Limit distribution of a high order Markov chain // Journal of the Royal Statistical Society. 1988. Vol. B – 50, № 1. P. 105–108.
10. *Buhlmann P., Wyner A.* Variable length Markov chains // The Annals of Statistics. 1999. Vol. 27. № 2, P. 480–513.
11. *Ferrari F., Wyner A.* Estimation of General Stationary Processes by Variable Length Markov Chains // Scandinavian Journal of Statistics. 2003. 30 (3). P. 459–480.
12. *Харин Ю. С.* Цепи Маркова с $r$-частичными связями и их статистическое оценивание // Доклады НАН Беларуси, Т. 48. № 1. 2004. С. 40–44.