

# УЛУЧШЕНИЕ СВОЙСТВ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

**К. А. Кулак, В. И. Репников**

Свойство устойчивости методов решения задачи Коши традиционно принято исследовать на модельной задаче

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lambda u(x), \operatorname{Re} \lambda < 0, \\ u(x_0) &= u_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Применительно к задаче (1) разностное уравнение, соответствующее одношаговым методам, примет вид

$$y_{n+1} = E(\lambda, \tau)y_n,$$

где  $E(\lambda, \tau)$  – оператор перехода, который для явных одношаговых методов  $s$ -го порядка точности имеет вид

$$P_{s+k}(\tau\lambda) = 1 + \lambda\tau + \frac{(\lambda\tau)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda\tau)^s}{s!} + a_1(\lambda\tau)^{s+1} + \dots + a_k(\lambda\tau)^{s+k}. \quad (2)$$

Соответственно область устойчивости определяется как множество точек  $z = \lambda\tau$  комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$|E(\lambda, \tau)| \leq 1. \quad (3)$$

При этом, конечно, форма и размер области устойчивости (в частности, длина промежутка, по которому она пересекается с вещественной осью и даже свойство связности) зависят от параметров  $a_i, i = 1, \dots, k$ . Указанную ситуацию иллюстрирует рис. 1, на котором изображены области устойчивости метода

$$\begin{aligned} y_{n+\alpha} &= y_n + \alpha\tau f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \tau f(x_{n+\alpha}, y_{n+\alpha}) \end{aligned} \quad (4)$$

Следует отметить также, что в точках комплексной плоскости, в которых соотношение (3) выполняется со знаком « $\Rightarrow$ », область устойчивости имеет нулевую ширину вдоль мнимой оси, что при интегрировании задач, в спектре матрицы Якоби которых присутствуют собственные значения с отличной от нуля мнимой частью, фактически равносильно нару-

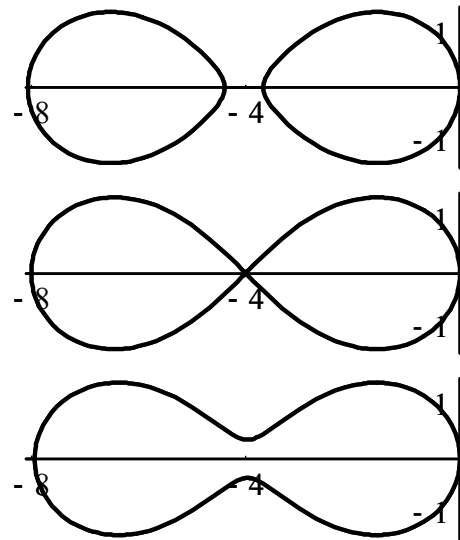


Рис. 1. Область устойчивости метода (4) при  $\alpha = 1/8, \pm 0.001$

шению связности области. Чтобы избавиться от указанного недостатка, достаточно заменить в правой части неравенства (3) константу 1 на некоторую положительную величину  $t < 1$ . Поставим себе задачу определить параметры  $a_i, i=1, \dots, k$  оператора перехода (2) таким образом, чтобы область устойчивости, оставаясь односвязной, имела максимальную длину интервала устойчивости по вещественной оси. Таким образом, требуется построить полиномы

$$P_{s+k}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^s}{s!} + a_1 x^{s+1} + a_2 x^{s+2} + \dots + a_{s+k} x^{s+k}, \quad (5)$$

обладающие тем свойством, что ширина непрерывной области, в которой их значения заключены между прямыми  $\pm t$  является максимальной среди всех многочленов с такими  $s$  и  $k$ . В дальнейшем такие многочлены будем называть оптимальными. Можно доказать, что многочлен  $P_{s+k}(x)$  вида (5) с заданными  $s$  и  $k$  будет оптимальным тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$P'_{s+k}(t_i) = 0, \quad P_{s+k}(t_i) = (-1)^{i+s} t, \quad i = 0, 1, \dots, k-1. \quad (6)$$

Следовательно, решение поставленной задачи в общем случае сводится к решению системы  $2k$  нелинейных уравнений (6) относительно коэффициентов многочлена  $a_i$  и точек  $t_i$ . При решении этой системы методом Ньютона, даже при малых  $k$  возникает проблема выбора начального приближения, так как матрица значений производных для системы линейных уравнений является очень плохо обусловленной (с числом обусловленности до  $10^{50}$ , см. рис. 2). Один из способов преодоления этой проблемы состоит в последовательном решении системы при  $k = 1, 2, \dots, m$ , а в качестве начальных приближений служат экстраполированные значения  $a_i, t_i$ , найденные на предыдущих шагах.

По описанному алгоритму были построены следующие операторы перехода:  $s=1, k=14$  (ширина области устойчивости  $\sim 430$ ),  $s=2, k=10$  (ширина области устойчивости  $\sim 120$ ),  $s=3, k=10$  (ширина области устойчивости  $\sim 85$ ).

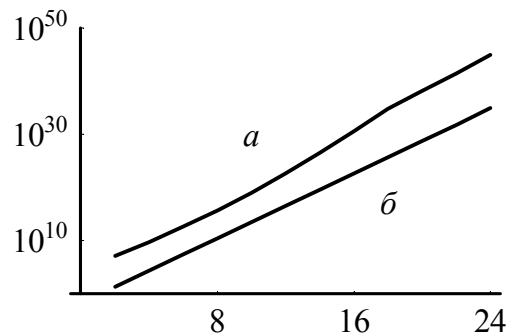


Рис. 2. Число обусловленности  
 $a$  – рассмотренная матрица,  
 $b$  – матрица Гильберта

Отметим, что в случае  $s=1$  и  $t=1$  известно аналитическое представление оптимального полинома:  $P_n(x) = T_n\left(1 + \frac{n}{x^2}\right)$ , где  $T_n(x)$  – многочлен Чебышева степени  $n$  [2]. Опишем способ построения операторов перехода вида (3) для  $s=1$  и  $s=2$  с ограничением  $|E(\lambda, \tau)| \leq t < 1$ , используя для этого многочлены сдвинутые и растянутые многочлены Чебышева. Оптимальные многочлены для случая  $s=1$  будем искать в виде

$$P_n(x) = tT_n(\varepsilon_n(t) + \omega_n(t)x), \quad \varepsilon_n(t) = \cos\left(\frac{1}{n} \arccos\left(\frac{1}{t}\right)\right), \quad \omega_n(t) = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1 - \varepsilon_n(t)}{t^2 - 1}}.$$

Коэффициент  $\omega_n(t)$  можно также вычислять и с помощью приведенного ниже рекуррентного соотношения, напоминающего рекуррентное соотношение для многочленов Чебышева.

$$\omega_n(t) = (tnQ_{n-1}(\varepsilon_{n+1}(t)))^{-1}, \quad Q_{n+1}(x) = 2xQ_n(x) - Q_{n-1}(x), \\ Q_0 = 1, \quad Q_1 = 2x.$$

Случай  $s=2$  реализуется аналогично. При этом многочлены отыскиваются в виде (значения коэффициентов  $a_n(t), b_n(t), c_n(t)$ , а также результирующий многочлен  $P_{2n}(x)$  здесь не приводятся из-за громоздкости)

$$P_{2n}(x) = tT_n(a_n(t)x^2 + b_n(t)x + c_n(t)), \quad P_{2n}(0) = 1, \quad P'_{2n}(0) = 1, \quad P''_{2n}(0) = 1/2.$$

Отметим, что построенные таким способом многочлены свойством оптимальности обладать уже не будут, однако позволяют увеличить длину интервала устойчивости практически до любой величины (естественно, за счет увеличения числа стадий) без решения системы (6). Эти полиномы обладают также рядом любопытных с точки зрения анализа свойств, описать которые не позволяют размеры публикации.

Рассмотрим теперь простой способ построения методов второго порядка по заданному оператору перехода, наглядно демонстрирующий один из возможных подходов к решению данной задачи.

В качестве основы возьмем метод последовательного повышения порядка точности (4), который при  $\alpha = 1/2$  является методом второго порядка [1]. Заменим вычисление значения  $y_{n+\alpha}$  на рекурсивный вызов себя же, но уже с другим  $\alpha = \alpha_1$ . Повторяя эту процедуру несколько раз, можно получить метод второго порядка (положив  $\alpha_0 = 1/2$ ) с любым числом стадий. Например, при  $k=2$  получается метод

$$\hat{y} = y + \mathcal{F}\left(x + \frac{\tau}{2}, y + \frac{\tau}{2} f\left(x + \frac{\tau\alpha_2}{2}, y + \frac{\tau\alpha_2}{2} f\left(x + \frac{\tau\alpha_1\alpha_2}{2}, y + \frac{\tau\alpha_1\alpha_2}{2} f\right)\right)\right), \quad (7)$$

параметры  $\alpha_i$  которого можно определить по заданным  $a_i$  – коэффициентам многочлена (5), используя формулу

$$\alpha_i = 2^{k-i+2} \frac{a_{k-i+1}}{\prod_{j=i+1}^k \alpha_j^{j-i+1}}, \quad i = k-1, k-2, \dots, 1 \quad (8)$$

Приведем результаты сравнительного тестирования построенных таким образом методов второго порядка (6, 9 и 12 стадий) на модельной системе из [3], обладающей средней степенью жесткости.

При малых  $x$  многостадийные методы проигрывают методам более высоких порядков, но при  $x \approx 1000$  ситуация меняется, и с дальнейшим ростом  $x$  эффективность многостадийных методов проявляется все сильнее (см. таблицу).

Из таблицы можно видеть, что максимальный шаг для построенных методов почти прямо пропорционален ширине области устойчивости. Также можно сделать вывод, что методы с большим числом стадий эффективнее, а значит, построение таких методов приносит практическую пользу.

Таблица

Решение модельной задачи в точке  $x = 10000$

Метод (порядок / стадий)	Число откатов	Точек всего	Макс. шаг	Обращений к f
ПППТ 2 / 6	69	4885	2.16	29310
ПППТ 2 / 9	36	2663	4.63	23967
ПППТ 2 / 12	23	1808	7.67	21696
ПППТ 3 / 3	304	21099	0.46	63297
Рунге-Кутта 5 / 6	453	31452	0.35	188712

### Литература

3. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. П. Вычислительные методы высшей математики, т. 2 / Мн.: «Вышэйшая школа». 1975. 672 с.
4. Прасолов В. В. Многочлены. – 3-е изд. / М.: МЦНМО. 2003. 336 с.
5. Марчук Г. И., Шайдулов В. В. Повышение точности решений разностных схем / М.: Наука. 1979. 320 с.

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К ЭЛЕКТРОННЫМ УЧЕБНИКАМ

С. В. Леончик

Новые средства и методы обработки информации оказывают существенное влияние на средства, формы и методы обучения. Сегодня иннова-