Краткие сообщения

УДК 33:517.925

Б.С.КАЛИТИН

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА ТИПА "ЭФФЕКТИВНАЯ КОНКУРЕНЦИЯ"

The mathematical model of the market of the n-competitors is represented in this paper.

Настоящая работа представляет собой попытку построения математической модели динамического развития цен на рынке товаров и услуг во времени, основанной на учете характера взаимодействия основных участников торговли – продавцов и покупателей, а также на учете результатов вмешательства внешних структур (государства, теневых группировок и т.п.). В отличие от известных моделей Вальраса–Леонтьева–Неймана [1] мы не используем соотношения типа "затраты–выпуск", тесно связанные с производством и соответствующими условиями баланса. Предлагаемая модель касается акта торговли и общественных отношений между его участниками, порожденных преследуемыми каждой из сторон целями. В основу построения модели экономической системы отчасти положен метод динамических аналогий и в определенной степени проводится параллель со вторым законом Ньютона применительно к специально выбранной мере движения. В качестве такой меры выступает основное понятие рыночных отношений – цена единицы товара. Результат моделирования представлен в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих ряду заданных предположений относительно экономических взаимоотношений партнеров по рынку. При построении модели будем исходить из следующих допущений.

1) В каждый момент времени рынок обладает равновесием, т.е. существует фиксированный набор цен всех предлагаемых товаров, при которых планы покупателей и продавцов полностью совпадают.

2) На каждый товар "действуют" силы, порожденные каждым из участников рынка с целью изменения вектора цен в ту или иную сторону. К ним относятся: а) сила V_j, возникающая из-за естественного желания продавца j-го товара повысить цену, предлагая его по цене не ниже себестоимости; в) сила C_{ji}, характеризующая влияние i-го конкурента на цену j-го товара; с) сила D_j воздействия j-го товара на его цену в соответствии с законом спроса; d) сила G_j, отражающая эффект оказываемого влияния на цену j-го товара со стороны внешних структур (государственные налоги и законодательные акты, поборы в виде взяток, рэкет и т.п.). Список может быть продолжен. Сюда, к примеру, можно отнести силу, возникающую из-за такого явления, как недоверие покупателей к слишком низкой цене на вновь появившийся товар по сравнению с ценой товара общеизвестной марки такого

же назначения и не уступающий последнему по качеству (см. [2]). Это же относится и к силе воздействия рекламы на увеличение объемов продаж и т.п.

3) Имеет место **принцип независимости действия сил** для каждого товара, представленного на рынке. При этом результат изменения цены отдельного товара под действием сил зависит от величины их суммарного воздействия.

4) Выполняется следующий закон: скорость изменения цены на каждый товар равна взвешенной сумме всех действующих на этот товар сил. Таким образом, каждая сила имеет размерность скорости изменения цены товара в единицу времени.

Введем следующие обозначения: $p_j(t)$ — цена единицы j-го товара в момент времени t; p_j^0 — равновесная цена j-го товара; $q_j(t)$ — количество единиц j-го товара, продаваемого в момент t; q_j^0 — равновесное количество единиц j-го товара; p_j^* — пороговое значение цены j-го товара, связанное с осуществленными затратами; p_j^{**} — пороговое значение цены j-го товара, связанное с осуществленными затратами; p_j^* — пороговое значение цены j-го товара, выше которого покупатели отказываются приобретать товар.

В соответствии с высказанными предположениями математическая модель принимает вид следующей системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_j}{dt} = V_j(p_j^*, p_j^0, p_j) + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} C_{ji}(p_j^0, p_j; p_i^0, p_i) + D_j(p_j^{**}, p_j^0, p_j) + G_j(q_j^0, q_j; p_j^0, p_j),$$

$$p_j^* < p_j < p_j^{**},\ j = 1,2,\ldots,n.$$

Согласно требованиям 1) – 4), функции сил должны удовлетворять условиям:

$$V_j(p_j^*, p_j^0, p_j^0) = 0,\ \lim_{p_j \to p_j^* + 0} V_j(p_j^*, p_j^0, p_j) = +\infty,\quad \frac{\partial V_j(p_j^*, p_j^0, p_i^0)}{\partial p_j} \le 0\ ;$$

$$\frac{\partial C_{ji}(p_j^0, p_j^0; p_i^0, p_i^0)}{\partial p_i} \ge 0 \text{ для } i \neq j \text{ и } \frac{\partial C_{ji}(p_j^0, p_j^0, p_i^0, p_i^0)}{\partial p_j} \le 0\ ;\ C_{ji}(p_j^0, p_j^0; p_i^0, p_i^0) = 0\ ;$$

$$D_j(p_j^{**}, p_j^0, p_j^0) = 0,\ \lim_{p_j \to p_j^{**} - 0} D_j(p_j^{**}, p_j^0, p_j) = -\infty,\quad \frac{\partial D_j(p_j^{**}, p_j^0, p_j^0)}{\partial p_j} < 0;$$

$$G_j(q_j^0, q_j^0; p_j^0, p_j^0) = 0,\quad \frac{\partial G_j(q_j^0, q_j^0; p_j^0, p_j^0)}{\partial (q_j p_j)} \ge 0,\quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Среди функций-сил, удовлетворяющих этим условиям, простейшими, на наш взгляд, являются следующие:

$$V_j = -\frac{v_j(p_j - p_j^0)}{p_j - p_j^*}, C_{ji} = \sum_{i=1, i\neq j}^{n} c_{ji}((p_j - p_j^0) - (p_i - p_i^0)), D_j = -\frac{d_j(p_j - p_j^0)}{p_j^{**} - p_j},$$

$$G_j = r_j q_j (p_j - p_j^0), q_j = q_j^0 - \sum_{=1, i\neq j}^{n} \alpha_{ji}((p_j - p_j^0) - (p_i - p_i^0)), j = 1,2,\ldots,n.$$

Здесь коэффициенты v_j, c_{ji}, d_j, r_j, α_{ji} положительны.

Матрица системы линейного приближения в окрестности равновесия $p_j = p_j^0$, j=1,2,...,n, представляется в виде

$$A=\begin{bmatrix} -\sum\limits_{i=1,j\neq 1}^{n} c_{1i}-S_1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{12} & -\sum\limits_{i=1,i\neq 2}^{n} c_{2i}-S_2 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{13} & c_{13} & -\sum\limits_{i=1,i\neq 3}^{n} c_{3i}-S_3 & \dots & c_{3n} \\ \hdotsfor{5} \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \dots & -\sum\limits_{i=1,i\neq n}^{n} c_{ni}-S_n \end{bmatrix}$$

Здесь использовано обозначение $S_j=\dfrac{v_j}{p_j^0-p_j^*}+\dfrac{d_j}{p_j^{**}-p_j^0}-r_jq_j^0$.

Теорема. *Равновесные цены асимптотически устойчивы, если все главные последовательные миноры матрицы $-A$ строго положительны. Неустойчивость равновесных цен системы будет наблюдаться в том случае, когда один из этих миноров строго отрицателен.*

Можно показать, что необходимым условием определенной положительности матрицы $-A$ является неравенство $S_1+S_2+\ldots+S_n>0$. Условие же $S_j>0$, $j=1,2,\ldots,n$, является достаточным условием определенной положительности матрицы $-A$. Последние неравенства можно трактовать, как **запас прочности** (стабильности) рыночных цен. Иначе говоря, запас прочности есть мера преобладания совместного действия сил сдерживания и сил торможения над действием сил роста цен. Отсутствие запаса прочности приводит к неустойчивости равновесия экономики рынка. Такая неустойчивость может возникнуть по следующим причинам: а) чрезмерно высокие налоги, т.е. большое значение r_j; б) значительный объем продаж (большое значение q_j^0); в) недостаточно мощная конкуренция (малое значение v_j); г) относительно высокие доходы продавцов (большое значение разности $p_j^0-p_j^{**}$); д) относительно высокая покупательная способность потребителей (большое значение $p_j^{**}-p_j^0$). И наоборот, при достаточно малом значении r_j система становится асимптотически устойчивой.

1. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост: Многоотраслевой анализ. М., 1972.

2. Долан Э.Дж., Линдсей Д. Рынок: микроэкономическая модель. СПб., 1992. С.91.

Поступила в редакцию 09.01.96.

УДК 681.328:681.326.3

В.И.ЛЕБЕДЕВ, А.М.ОРАНСКИЙ, А.А.КОЛЯДА

АЛГОРИТМЫ ВРАЩЕНИЯ ВЕКТОРОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ “ЦИФРА ЗА ЦИФРОЙ” И МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ

The two- and three-dimensional vectors rotation based on the different-iterative and modular arithmetic methods is proposed.

Пусть $R(x_0,y_0)$ – исходный вектор, заданный проекциями x_0,y_0 в прямоугольной декартовой системе координат XOY. После его поворота на угол φ_i ($i=1,2,\ldots$) результирующий вектор $R(x_i, y_i)$ будет определяться составляющими