1. Ford R.L., Nelson W.R. The EGS Code System: Computer Programs for the Monte Carlo Simulation of Electromagnetic Cascade Showers (Version 3). Stanford Linear Accelerator Center Report Number SLAC-210 (1978).

2. Ремаев В.В., Кузьменко В.А., Гончаров К.С., Быков В.Т. // Атомная энергия. Т.74. Вып.1. Янв. 1993.

Поступила в редакцию 02.09.97.

УДК 621.396

П.Д.КУХАРЧИК, Д.В.СИДОРОВИЧ

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ТРЕХМЕРНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ

In this contribution we have used an approximate ML procedure for estimation of wave parameters taking into account polarzation of the waves. A strategy for maximization of the loglikelihood function has been outlined and the proposed algorithm has been succesfully applied to simulated and real seismic data. Summarizing, parametric methods are very attractive for applications because of the possibility to develop physically motivated models and because of the availability of a handable estimation procedure with statistically desirable properties.

В настоящее время интенсивно ведутся работы по оптимальной и адаптивной обработке сигналов в антенных решетках, чувствительных к поляризации волн. Это обусловлено как важностью приложений в сейсмологии и радиолокации, так и прогрессом электроники, позволившим реализовать адаптивные системы. В работах [1,2,3] отмечено, что трехмерные антенные решетки, чувствительные к поляризации волн, могут с успехом применяться в шумовой обстановке, которая зачастую находится в непрерывном изменении. Но при этом возникают следующие проблемы: во-первых, введение дополнительных параметров предоставляет новую информацию о сигналах; во-вторых, увеличивается сложность алгоритма обработки сигналов в антенной решетке. Компромиссное решение в этом случае можно получить, исследуя среднеквадратичную ошибку оценивающего устройства максимального правдоподобия. Целью данной работы является изучение абсолютно нижней границы средней квадратичной ошибки, достижимой в трехмерных антенных решетках, чувствительных к поляризации волн. Для наглядности используется метод концентрических эллипсов [4,5].

Пусть θ — единственный неизвестный параметр. Устройство, определяющее его значение, является оптимальным, когда оно максимизирует функцию правдоподобия $P(x/\theta)$. Обычно указанная задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log P(x/\theta)=0. \tag{1}$$

Ясно, что это уравнение имеет много решений, из которых одно обеспечивает глобальный максимум.

Когда оценивается несколько параметров (т.е. θ — вектор), то задача сводится к решению системы уравнений, аналогичных (1). В работе [1] показано, что оптимальное оценивающее устройство, реализующее максимум функции правдоподобия, базируется на двух важных свойствах:

1) оценка является асимптотически несмещенной;
2) оценка является асимптотически эффективной.

Используя этот факт, можно записать элементы информационной матрицы Фишера в виде

$$J_{ij}(\theta)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\ln P(x/\theta)\right]. \tag{2}$$

Так как в нашем случае вектор измерения x — гауссов с ковариационной матрицей C, то формула (2) принимает относительно простой вид

$$J_{ik}(\theta)=\sum_{j=1}^{J}\left[\mathrm{tr}\left(\frac{\partial C_x(\omega_j,\theta(\omega_j))}{\partial\theta_i}C_x(\omega_j,\theta(\omega_j))^{-1}\frac{\partial C_x(\omega_j,\theta(\omega_j))}{\partial\theta_k}C_x(\omega_j,\theta(\omega_j))^{-1}\right)\right]. \tag{3}$$

Неравенство Крамера-Рао непосредственно обобщается на случай одновременной обработки n-параметров. Тогда набор нижних границ ковариационной матрицы ошибок оценки векторного параметра θ дается соотношением

$$C \geq J^{-1}.$$

Используя это неравенство, получим уравнение эллипса, определяющее границу максимальной точности оценки:

$$r^2 = \left(\hat{\theta} - \theta_0\right) J \left(\hat{\theta} - \theta_0\right).$$

Определим теперь диагональную матрицу размерности $\left[p_{\bar{\eta}} \times \mathrm{M}\right]$ на $\left[p_{\bar{\eta}} \times \mathrm{M}\right]$:

$$\Lambda = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p_{\bar{\eta}} \times \mathrm{M}}\right).$$

В этом случае информационная матрица Фишера может быть диагонализирована следующим образом:

$$\mathbf{Q}^* \mathbf{J} \mathbf{Q} = \Lambda, \tag{5}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p_{\bar{\eta}} \times \mathrm{M}}$ – собственные значения матрицы $\mathbf{J}$ и $\mathbf{Q} = \left[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_{p_{\bar{\eta}} \times \mathrm{M}}\right]'$ – матрица собственных векторов $\mathbf{J}$.

При этих предположениях границы максимальной точности оценки можно записать в виде:

$$r^2 = \left(\hat{\theta} - \theta_0\right)' \mathbf{J} \left(\hat{\theta} - \theta_0\right) = \sum_{j=1}^{p_{\bar{\eta}} \times \mathrm{M}} \lambda_j \mu_j^2, \tag{6}$$

где $\mu = \mathbf{Q}^* \left(\hat{\theta} - \theta_0\right)$.

Но формула (6) в случае одновременной обработки n-параметров описывает эллипсоид, который называется эллипсоидом рассеяния и интерпретируется как мера разброса ошибок.

Новые переменные μ_i определяют координатные оси эллипсоида, повернутого матрицей $\mathbf{Q}$, и величина $r/\sqrt{\lambda_i}$ указывает длину соответствующей оси эллипса.

Для упрощения анализа полученных выражений будем рассматривать случай приема только одного источника сигналов. Однако даже в этой ситуации для сейсмической модели имеем 5 параметров $\eta = (\xi_x, \xi_y, \xi_z, \gamma, \kappa)$.

Для наглядности мы будем рассматривать только два из них, т.е. двумерный срез пятимерного эллипсоида. Для этой цели определим следующую проекционную матрицу (надо заметить, что были произвольно выбраны параметры ξ_x и ξ_y):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

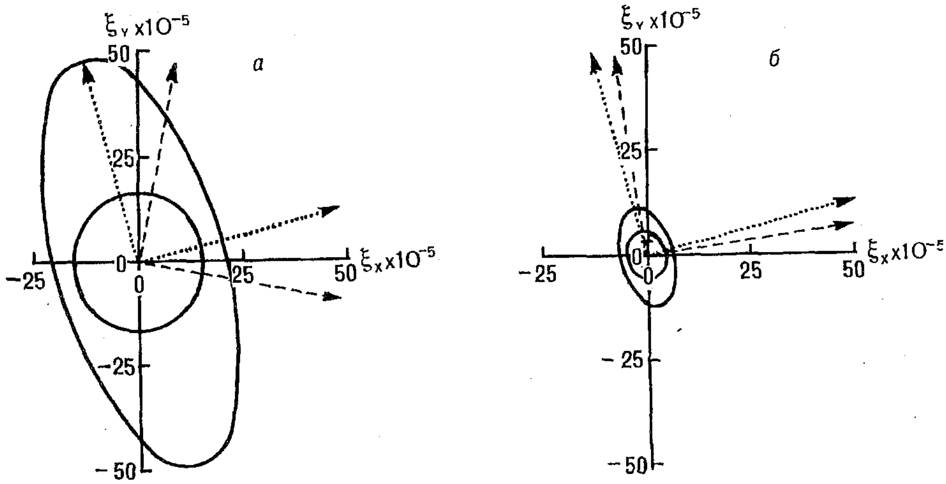
и произведем проектирование эллипсоида в плоскость параметров ξ_x и ξ_y

$$r^2 = \left(\mathrm{P}\left(\hat{\theta} - \theta_0\right)\right)' \left(\mathrm{P}\mathrm{J}^{-1}\mathrm{P}'\right)^{-1} \left(\mathrm{P}\left(\hat{\theta} - \theta_0\right)\right). \tag{8}$$

Это уравнение описывает эллипс, полученный из пятимерного эллипсоида.

Разберем теперь результаты численного эксперимента и математического моделирования рассмотренных выражений. В нашем случае сейсмические данные записываются антенной решеткой, состоящей из четырех станций, каждая из которых, в свою очередь, имеет три перпендикулярно поляризованных приемника. Диаметр антенной решетки составляет 3 км, вертикальная апертура – 200 м. Все последующие вычисления были произведены для этой решетки.

Для сравнения результатов рассмотрим также модель без учета поляризационных параметров. Лучший способ определить каким образом корреляционная матрица обеспечивает меру рассеивания ошибок — рассмотреть частный случай, когда параметры имеют совместное нормальное распределение.



Концентрические эллипсы: отношение сигнал/шум равно *а* — 10 дБ и *б* — 20 дБ, ξ=(0,12; 0,167; 0,13) с/км

На рисунке показаны контуры равной вероятности, которые были вычислены для двух моделей. Равновысотные контуры в случае двух параметров представляют собой уравнение эллипса (8). Эллипсы раздвигаются монотонно с увеличением r^2. Они также обладают тем интересным свойством, что вероятность нахождения внутри эллипса является функцией только r^2. По этой причине эллипсы, определяемые уравнением (8), будем называть эллипсами концентрации (эллипсами рассеяния), так как они служат мерой концентрации плотности. Их можно интерпретировать как меру разброса ошибок. При этом видно, что модели с поляризационными параметрами соответствуют эллипсы с меньшими размерами осей, поэтому они обладают минимальными разбросами ошибок.

Рассматривая эти рисунки, можно наглядно изобразить преимущества учета поляризации для сейсмических волн. Таким образом, формула (8) может быть использована в качестве критерия оптимальной параметризации физической модели.

1. Bohme J.F. // Englewood Cliffs N. J. 1991. V.II.
2. Brillinger D.R. // Time Series: Data Analysis and Theory. San Francisco, 1981.
3. Christofferson A. et. al. // Geophisycal J. 1988. V.93. P.197.
4. Maiwald D., Sidorovitch D.V. Bohme J.F. // Proc. ICASSP. Minneapolis, 1993.
5. Sharf L.L. Statistical Signal Processing. Adisson-Wesley, 1991. P.225.

Поступила в редакцию 27.01.97.