

### МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР ПО ДИНАМИКЕ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

#### INTERNATIONAL SEMINAR ON VISCOUS FLUID DYNAMICS

Течения вязкой жидкости со свободной поверхностью являются важной частью многих технологических процессов, например, они используются для организации тепло- и массообмена, встречаются при нанесении покрытий. На свободной поверхности возможно образование волн, эволюция возмущений определяется силами инерции, внешними массовыми и поверхностными силами, а также поверхностным натяжением. Для управления процессами волнообразования и неустойчивости необходимо иметь инструмент влияния на указанные силы, например создать переменное поле массовых сил с помощью вращения, поверхностные силы газовым потоком вдоль поверхности жидкости или переменное поверхностное натяжение с помощью добавления в жидкость поверхностно-активного вещества.

Решению некоторых задач управления процессами неустойчивости и определению фундаментальных механизмов, влияющих на характер течения, посвящены следующие научные проекты: «Гидродинамическая неустойчивость и волны в стекающей пленке при воздействии неравновесной адсорбции-десорбции летучего растворимого поверхностно-активного вещества (ПАВ)» (поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, № 18-01-00762, руководитель – профессор В. Я. Шкадов); «Гидродинамические и тепловые процессы производства минеральных и металлических волокон для получения теплоизоляционной ваты, материалов дымоуловителей и фильтров ГРЭС и ТЭЦ, армирующих

добавок тормозных колодок большегрузных автомобилей» (поддержан государственной программой научных исследований Республики Беларусь «Энергетические системы, процессы и технологии 2.48», № 20161423, руководитель – профессор М. А. Журавков, ответственный исполнитель – доцент П. Н. Конон); «Стационарные и волновые капиллярные течения во вращающихся объемах жидкости» (поддержан Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований, № Ф18Р-225, и Российским фондом фундаментальных исследований, № 18-51-00006, соруководители – П. Н. Конон и Е. И. Могилевский).

Для координации исследований белорусской и российской сторонами был организован семинар по динамике вязких жидкостей на механико-математических факультетах БГУ и МГУ имени М. В. Ломоносова, проходивший в режиме видеоконференции под руководством профессора В. Я. Шкадова, доцентов А. Н. Белоглазкина, П. Н. Конона, Е. И. Могилевского, ассистента А. И. Алексюка<sup>1</sup>.

В конце первого полугодия совместной работы, 7–8 декабря 2018 г., на механико-математическом факультете Белорусского государственного университета состоялся Международный семинар по динамике вязких жидкостей, который явился заключительным в 2018 г. В работе семинара принимали участие сотрудники МГУ имени М. В. Ломоносова, БГУ, Института тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова НАН Беларуси, а также аспиранты и студенты БГУ (рис. 1). Сделаны сообщения

---

<sup>1</sup>Информация о видеосеминаре (программа заседаний, аннотации докладов) размещается в интернете по адресу: <http://new.math.msu.su/departament/aeromech/research.php?p=viscousfluidsdynamics>.



Рис. 1. Участники семинара  
Fig. 1. Participants of the workshop

о последних результатах в области моделирования капиллярных течений вязкой жидкости. Доклады сотрудников и аспирантов МГУ имени М. В. Ломоносова и БГУ были посвящены течениям пленок и капель во вращающихся системах и общим подходам к моделированию подобных течений.

Ниже приводятся аннотации всех сообщений, заслушанных на семинаре.

**А. И. Алексюк<sup>2</sup>, В. Я. Шкадов<sup>2</sup> «Применение расширенного метода конечных элементов для расчета двухфазных течений со свободной поверхностью».** Рассматриваются двухфазные течения перемешивающихся вязких несжимаемых жидкостей с учетом поверхностного натяжения в поле силы тяжести. Движение каждой фазы описывается уравнениями Навье – Стокса. Численное решение начально-краевых задач проводится на основе стабилизированного метода конечных элементов (GLS-метод – Galerkin/Least-Squares), который ранее успешно применялся для решения двумерных и трехмерных задач обтекания тел потоком вязкой жидкости (газа)<sup>3</sup>. Пространства пробных и весовых функций дополняются функциями, которые допускают разрывы параметров потока внутри ячеек, содержащих границу раздела (extended finite element method)<sup>4</sup>. Для отслеживания перемещений последней применяется метод функции уровня (level-set method). Все это позволяет моделировать течения с изменяющейся топо-

логией свободной поверхности на неподвижных расчетных сетках.

Проведено тестирование численных алгоритмов на различных течениях со свободной поверхностью. Получено хорошее соответствие результатов расчетов задач о всплытии «двумерного пузыря» (рис. 2, а) и о стекании пленки по плоской вертикальной стенке (рис. 2, б) с данными других исследователей<sup>4</sup>. В качестве примера задачи с изменяющейся топологией границы раздела представлены расчеты развития неустойчивости Рэлея – Тейлора из состояния равновесия (рис. 2, в): покоящийся слой жидкости находится под слоем более тяжелой жидкости.

**А. Н. Белоглазкин<sup>2</sup>, В. Я. Шкадов<sup>2</sup>, А. Е. Кулаго<sup>5</sup> «Формирование предельных волновых режимов при пространственном и при временном развитии течения стекающей пленки жидкости».** Система эволюционных уравнений Капицы – Шкадова<sup>6</sup>, описывающая волновое течение жидких пленок, изначально допускает вариации во времени его интегральных характеристик, будь то средняя толщина или расход. Использование инвариантных свойств эволюционных уравнений позволяет производить расчеты течений пленки как для режимов постоянной толщины, так и для режимов постоянного расхода, что дает возможность установить соответствие между характеристиками регулярной волны, наблюдаемой в эксперименте или при численных расчетах течения

<sup>2</sup> МГУ имени М. В. Ломоносова.

<sup>3</sup> *Aleksyuk A. I., Shkadov V. Ya.* Analysis of three-dimensional transition mechanisms in the near wake behind a circular cylinder // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2018. Vol. 72. P. 456–466 ; *Aleksyuk A. I., Osipov A. N.* Direct numerical simulation of energy separation effect in the near wake behind a circular cylinder // Int. J. Heat Mass Transf. 2018. Vol. 119. P. 665–677. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.11.133.

<sup>4</sup> *Sauerland H., Fries T.-P.* The extended finite element method for two-phase and free-surface flows: A systematic study // J. Comput. Phys. 2011. Vol. 230, issue 9. P. 3369–3390. DOI: 10.1016/j.jcp.2011.01.033 ; *Nosoko T., Miyara A.* The evolution and subsequent dynamics of waves on a vertically falling liquid film // Phys. Fluids. 2004. Vol. 16, issue 4. P. 1118–1126. DOI: 10.1063/1.1650840.

<sup>5</sup> Российский экономический университет (РЭУ) имени Г. В. Плеханова.

<sup>6</sup> *Шкадов В. Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. Акад. наук СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 43–51.

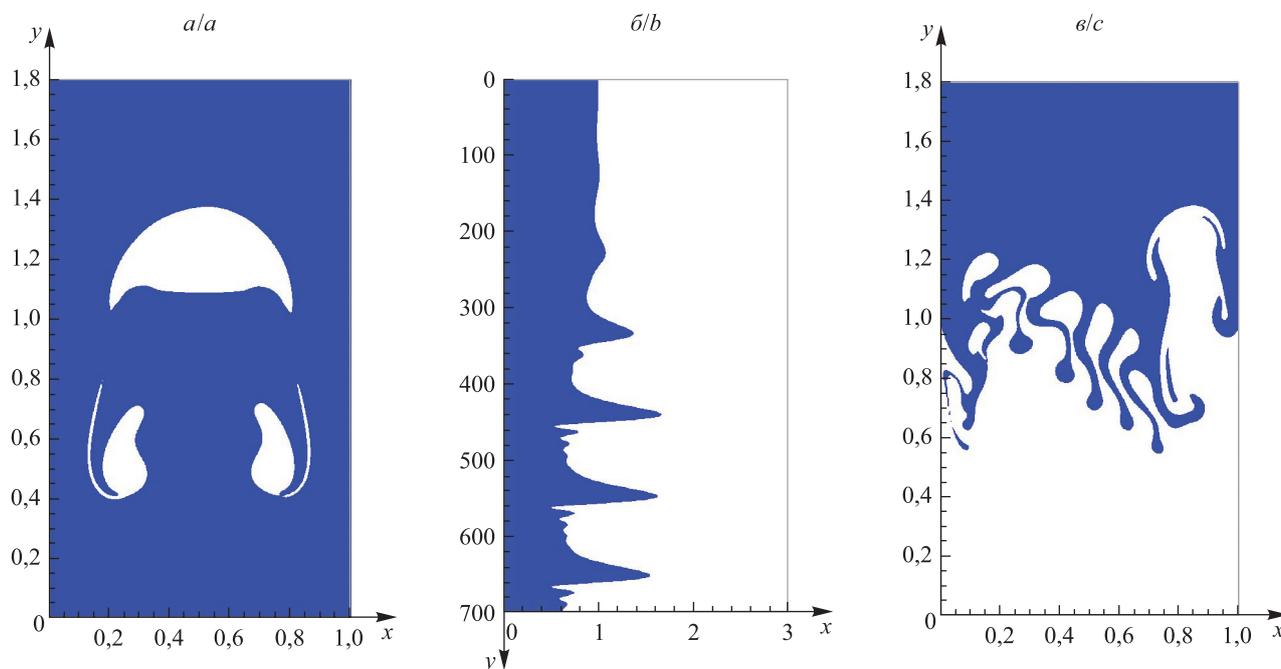


Рис. 2. Примеры тестовых расчетов: *a* – всплытие «двумерного пузыря»;  
*б* – стекание пленки по вертикальной стенке; *в* – развитие неустойчивости Рэлея – Тейлора

Fig. 2. Examples of test calculations: *a* – the ascent of a «two-dimensional bubble»;  
*b* – falling film on a vertical wall; *c* – development of Rayleigh – Taylor instability

для всей числовой оси, и периодическим по пространству предельным решением эволюционной системы уравнений.

На основе анализа глобального аттрактора (множества предельных решений динамической системы, соответствующих периодическим по пространству решениям системы эволюционных уравнений) проведено сравнение свойств волновых режимов и полученных характеристик регулярных волн с данными экспериментов по возбуждению волн на поверхности пленки жидкости заданной частотой, численного решения соответствующей пространственной краевой задачи.

Расчеты не только демонстрируют хорошее соответствие формы волны и характеристик возникающего пленочного течения, но и позволяют объяснить наблюдаемую в некоторых данных перестройку течения вблизи нейтрального значения возбуждаемой частоты. Представлена неединственность характеристик пленки жидкости при ее возбуждении частотой из области промежуточных семейств. Проведено сравнение с экспериментальными данными для тонкой пленки сильновязкой жидкости<sup>7</sup>.

**Е. И. Могилевский<sup>8</sup>, П. Н. Конон<sup>9</sup>, А. Е. Кулаго<sup>10</sup>, В. Я. Шкадов<sup>8</sup> «Равновесные формы капель во внешних полях».** Рассматривается равновесие конечного объема жидкости под действием капиллярных сил и внешних полей: гравитационного, электрического (для модели идеального проводника), поля центробежной силы. Обсуждаются численные методы решения краевой задачи для уравнения Юнга – Лапласа.

На примере задачи о форме висящей капли показана возможность неединственного решения, для выбора физически реализуемого варианта используется критерий устойчивости<sup>11</sup>.

Задача о равновесной форме капли идеального проводника в вертикальном постоянном электрическом поле решается с помощью итерационного метода, идея которого заключается в последовательном решении задачи электростатики для данного приближения формы поверхности и задачи о равновесии жидкости под действием гравитационных, капиллярных и максвелловских напряжений в предположении, что распределение заряда по поверхности – заданная функция<sup>12</sup>. Показано, что неустойчивые равновесные формы

<sup>7</sup>Panga M. K. R., Mudunuri R. R., Balakotaiah V. Long-wavelength equation for vertically falling films // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. P. 036310. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.036310.

<sup>8</sup>МГУ имени М. В. Ломоносова.

<sup>9</sup>БГУ.

<sup>10</sup>РЭУ имени Г. В. Плеханова.

<sup>11</sup>Гидродинамика невесомости / под ред. А. Д. Мышкиса. М. : Наука, 1976.

<sup>12</sup>Могилевский Е. И., Шкадов В. Я., Шутов А. А. Равновесные формы висящей капли в электростатическом поле // Изв. Рос. акад. наук. Механика жидкости и газа. 2012. № 5. С. 23–31.

не воспроизводятся при таком методе расчета. Обнаружено, что при наличии электрического поля становятся неустойчивыми формы капель, содержащие «шейку» (радиус пятна соприкосновения с твердой поверхностью меньше наибольшего радиуса горизонтального сечения).

Решена задача о равновесии капли на поверхности горизонтального вращающегося диска. Установлено, что достаточно большие капли под влиянием центробежной силы трансформируются из почти плоского слоя с закруглением на концах в сравнительно узкий обод с тонкой пленкой внутри. Для фиксированного объема жидкости равновесная форма капли существует только для значений угловой скорости, не превосходящих критическое. Определена зависимость критической угловой скорости от объема капли.

Приводятся результаты наблюдений поведения капли вязкой жидкости на вращающемся диске для докритических и сверхкритических угловых скоростей. При превышении критической скорости капли малого объема утекают в одну сторону, причем форма следа, оставляемого на поверхности диска, зависит от вязкости жидкости (определяется значением числа Экмана). При больших значениях объема капля разрывается на некоторое количество ручейков. Обсуждаются постановки задач, позволяющие предсказать число ручейков.

Получены неосесимметричные стационарные формы капель как возмущения осесимметричной. Показано, что в случае малой кривизны возмущения представляют собой линейную комбинацию функций Бесселя<sup>13</sup>. Выведено выражение для второй вариации энергии в окрестности осесимметричного решения. Предполагается, что возмущения, искажающие форму капли, отвечают наибольшему по модулю уменьшению энергии при фиксированном значении нормы возмущений в пространстве непрерывных функций. Так как возможны равновесные возмущения, выражающиеся через функции Бесселя, именно эту систему функций предлагается использовать в качестве базиса.

Рассматривается постановка задачи для уравнений Стокса, в которой не предполагается равновесие жидкости относительно подвижной вращающейся системы отсчета. Поле течений может быть найдено с помощью теории потенциала<sup>14</sup>, а для определения эволюции использован тот же метод,

что и при вычислении равновесной формы капли в электрическом поле.

Результаты работы могут применяться для оптимизации процессов нанесения покрытий, а также производства металлических волокон центробежным способом.

**П. Н. Конон<sup>15</sup>, А. В. Жук<sup>15</sup>, В. Я. Шкадов<sup>16</sup>**  
**«Неизотермическое возмущенное движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра».** С целью изучить процессы центробежного литья металлов исследовано неизотермическое плоское движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности горизонтального вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра в поле сил поверхностного натяжения, гравитации и инерции<sup>17</sup>.

Движение вязкой жидкости рассматривается в относительной полярной системе координат, связанной с вращающимся цилиндром, и описывается уравнениями Навье – Стокса. В уравнении энергии учтены конвективные составляющие и диссипативные члены. Для случая достаточно быстрого вращения цилиндра найдены уравнения первого приближения, подобные уравнениям пограничного слоя. Полученная система решается прямым методом с учетом граничных условий прилипания на поверхности цилиндра, отсутствия вязкого взаимодействия с окружающей средой на свободной поверхности и теплообмена по условиям 3-го рода.

В результате исследований получена и численно решена система дифференциальных уравнений в частных производных для определения эволюции свободной поверхности плоского слоя конечной толщины при умеренных и больших числах Рейнольдса  $Re$  в поле центробежных сил с учетом изменяющегося температурного поля в жидкости (рис. 3). Проведены сравнения с экспериментами и результатами исследования изотермической задачи. Найдена зависимость времени распада слоя на цилиндре от числа  $Re$ . Учет нелинейного взаимодействия возмущений позволил проследить за механизмом эволюции поверхности слоя. Основной причиной его распада на внутренней цилиндрической вращающейся поверхности является гравитационная неустойчивость, вызванная значительным влиянием силы тяжести по сравнению с центробежными силами.

<sup>13</sup> Конон П. Н., Кулаго А. Е., Сицко Г. Н., Конон П. П. Экспериментальное и теоретическое исследование поведения слоя жидкости на вращающемся диске // Теорет. и прикл. механика : междунар. науч.-техн. сб. 2016. Вып. 31. С. 87–94.

<sup>14</sup> Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М. : Наука, 1970.

<sup>15</sup> БГУ.

<sup>16</sup> МГУ имени М. В. Ломоносова.

<sup>17</sup> Решение изотермической задачи рассмотрено в: Епихин В. Е., Конон П. Н., Шкадов В. Я. О возмущенном движении слоя вязкой жидкости на поверхности вращающегося цилиндра // Инж.-физ. журн. 1994. Т. 66, № 6. С. 689–694 ; Пухначев В. В. Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести // Прикл. механика и техн. физика. 1977. № 3. С. 78–88 ; Конон П. Н., Жук А. В. Напряжения на внешней и внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью // Механика машин и механизмов. 2013. № 4 (25). С. 32–37.

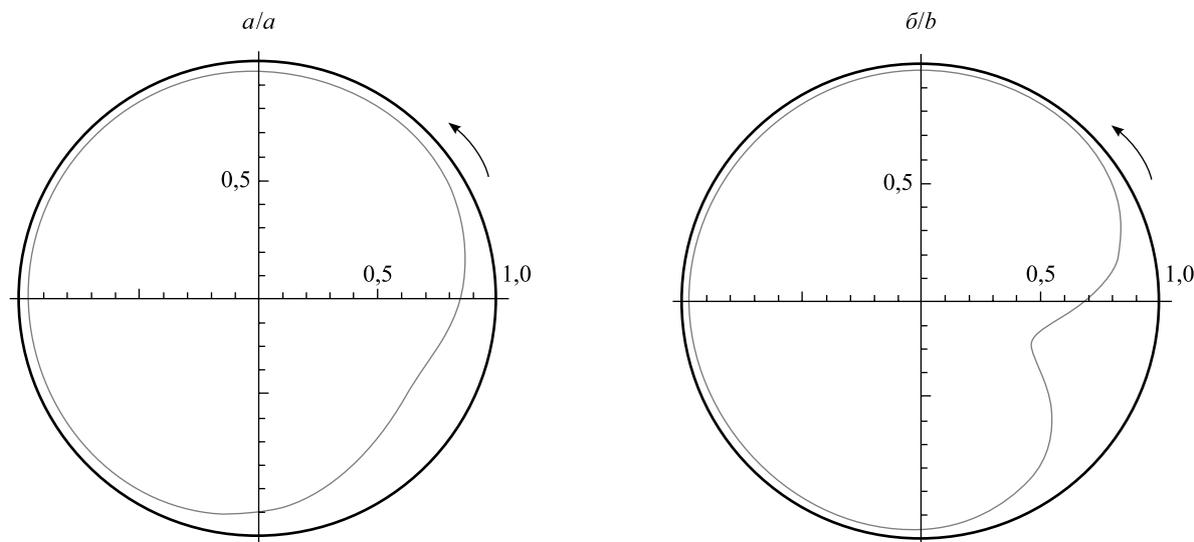


Рис. 3. Пример одного из расчетов:  
поднятие (а) и провисание (б) слоя глицерина в различные моменты времени  
при заполнении жидкостью в 16,5 % объема цилиндра

Fig. 3. An example of one of the calculations:  
raising (a) and sagging (b) of the glycerin layer at different points  
in time when filling with a liquid in 16.5 % of the cylinder volume

**А. И. Ермоленко<sup>18</sup>, П. Н. Конон<sup>18</sup> «Движение двух несмешивающихся слоев вязких жидкостей на цилиндрической поверхности в поле центробежных и массовых сил».** Исследовано плоское движение тонких несмешивающихся слоев вязких жидкостей на внешней поверхности горизонтально расположенного, вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра в поле сил тяжести и инерции. Подобного рода течения можно использовать при нанесении двухслойных покрытий на цилиндрические поверхности.

С помощью условия постоянства потока в окружном направлении<sup>19</sup> решена задача определения вида поверхностей двух слоев в случае установившегося движения жидкостей как на внутренней, так и на внешней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки<sup>20</sup>. В данном исследовании также сформулирована общая трехмерная постановка задачи движения двух несмешивающихся слоев вязких жидкостей в поле центробежных, поверхностных и гравитационных сил.

С использованием основных постулатов теории тонкого слоя<sup>21</sup> система уравнений, представляющая собой постановку двумерной нестационарной

плоской задачи, была упрощена. В случае умеренного движения, пренебрегая инерционными членами уравнений Навье – Стокса, найдены окружные и радиальные компоненты скорости, а также взаимосвязанная система уравнений эволюции наружного и внешнего слоев в гравитационном и поверхностном поле. Разработан и реализован численный способ ее исследования, основанный на методе прямых с последующим интегрированием по формулам Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Получены и проанализированы формы раздела слоев и свободной поверхности (рис. 4) от длительного устойчивого состояния при медленном вращении до развития возмущений со временем и распада слоя при увеличении влияния центробежных сил.

В ходе семинара подведены итоги совместной работы групп МГУ имени М. В. Ломоносова и БГУ. Определены направления дальнейших исследований, обсуждены возможности применения численных методов, представленных в сообщении А. И. Алексюка, В. Я. Шкадова, к решению задач, рассмотренных в докладах П. Н. Конона (с соавторами) и А. И. Ермоленко, П. Н. Конона.

<sup>18</sup> БГУ.

<sup>19</sup> Hansen E. B., Kelmanson M. A. Steady, viscous free-surface flow on a rotating cylinder // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 272. P. 91–107. DOI: 10.1017/S0022112094004398.

<sup>20</sup> Конон П. Н., Ермоленко А. И. Исследование двухслойного течения пленок вязких жидкостей на внутренней поверхности вращающегося цилиндра // Вестн. Белорус. гос. ун-та транспорта: Наука и транспорт. 2016. № 1 (32). С. 334–337; Конон П. Н., Ермоленко А. И. Установившееся движение двух тонких плоских слоев вязких жидкостей на внешней поверхности вращающегося цилиндра // Теорет. и прикл. механика : междунар. науч.-техн. сб. 2017. Вып. 32. С. 46–51.

<sup>21</sup> Пухначев В. В. Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести // Прикл. механика и техн. физика. 1977. № 3. С. 78–88.

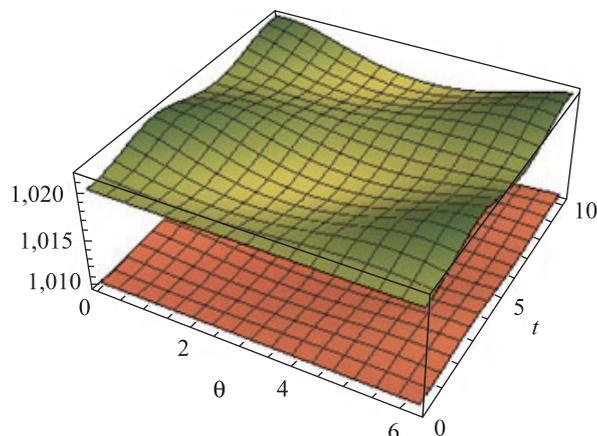


Рис. 4. Пример численного расчета формы раздела двух слоев и свободной поверхности для случая, когда внешний слой меньшей плотности и вязкости

Fig. 4. An example of one of the numerical calculations of the shape of the section of two layers and the free surface when the outer layer is of lower density and viscosity

Результаты, полученные А. Н. Белоглазким (с соавторами), могут использоваться при изучении устойчивости и нелинейных волн, возникающих при движении жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра. Предполагается совместное экспериментальное исследование устойчивости капли на вращающемся диске в развитие работы Е. И. Могилевского (с соавторами).

Принято решение продолжить работу в течение года в форме видеосеминара, а также провести аналогичный семинар в конце 2019 г.

Семинары и описанные исследования проводились при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 18-01-00762, 18-51-00006), Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф18Р-225) и государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Энергетические системы, процессы и технологии 2.48» (№ 20161423).

П. Н. Конон<sup>22</sup>, Е. И. Могилевский<sup>23</sup>

<sup>22</sup> Павел Николаевич Конон – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета БГУ.

Pavel N. Konon, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University.

kononp@tut.by

<sup>23</sup> Евгений Ильич Могилевский – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры аэромеханики и газовой динамики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Evgeny I. Mogilevsky, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of aeromechanics and gas dynamics, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow State University.

mogilevskiy@mech.math.msu.su