УДК 515.12

Г.О. КУКРАК, В.Л. ТИМОХОВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ*

The subject of the study is different topologies on the set of continuous maps *C*(*X*,*Y*), especially the exponential topology $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$, the topology of uniform convergence $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$ and the topology $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ determined as the supremum of all topologies of the type $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$.

The following results 1, 2 are the main. Spaces *X* and *Y* are satisfies some natural conditions. Moreover, space *Y* is Hausdorff and developable in 1 and metrizable in 2.

1. The space (*C*(*X*,*Y*), $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$) is a *k*-space if and only if space *X* is countably compact.

2. The space (*C*(*X*,*Y*), $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$) is a *k*-space if and only if the closure in *Y* of any set *f*(*X*), where *f*∈*C*(*X*,*Y*), is compact. At that all topologies of the type $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$ are coincides with the topology $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$.

В предлагаемой статье изучаются свойства пространства непрерывных отображений *C*(*X*, *Y*) (пространство *Y* хаусдорфово) с экспоненциальной топологией $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$, а также (в случае метризуемого *Y*) с топологиями равномерной сходимости $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$ ($\mu = \mu(\rho)$ – метрика равномерной сходимости, порожденная допустимой метрикой ρ на Y) и топологией $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$, минимальной по включению содержащей все топологии вида $\tau_{\mu}^{(X,\,Y)}$. Найдены необходимые и достаточные условия, чтобы пространство *C*(*X*, *Y*) с топологиями $\tau_{\exp}^{(X,\,Y)}$ и $\tau_{\sup}^{(X,\,Y)}$ было *k*-пространством, а также имело счетную тесноту (теоремы 2.8 и 3.6). Указано необходимое и достаточное условие совпадения топологий $\tau_{\exp}^{(X,\,Y)}$ и $\tau_{\sup}^{(X,\,Y)}$ (теорема 4.3). Эти результаты существенно дополняют содержание работы [1]. Под пространством понимается топологическое T_1-пространство, под отображением – непрерывное отображение.

1. Основные понятия и обозначения. Как и в [1], для произвольных пространства *X*, множества $A \subset X$ и точки $x \in X$ обозначим: τ_X и φ_X – топология пространства *X* и соответственно семейство всех замкнутых в *X* множеств; $[A]_X$ и $\tau_X(A)$ – замыкание и соответственно семейство всех окрестностей множества *A* в *X* ($\tau_X(x)$ при $A = \{x\}$); $\exp X$ – экспонента пространства *X*, т. е. множество $\varphi_X \setminus \{\varnothing\}$, снабженное топологией Виеториса, предбазой которой служит семейство всех множеств вида $T_1(U) = \{F \in \exp X \mid F \cap U \neq \varnothing\}$ и $T_2(U) = \{F \in \exp X \mid F \subset U\}$, где $U \in \tau_X$; $C(X,\,Y)$ – множество всех непрерывных отображений пространства *X* в пространство *Y*; $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ – график отображения $f \in C(X,\,Y)$; $T(X,\,Y) = \{f \in C(X,\,Y) \mid$ множество $f(X)$ одноточечно$\}$.

Семейство α некоторых множеств в пространстве *X* называют дискретным в *X*, если для любой точки $x \in X$ найдется окрестность $U \in \tau_X(x)$, пересекающаяся не более чем с одним элементом α. Множество *A* дискретно в *X*, если дискретно в *X* семейство $\{\{a\} \mid a \in A\}$.

Последовательность покрытий α_n пространства *X* называется измельчением, а *X* при наличии такой последовательности называют измельчающимся, если для любых $x \in X$ и $U \in \tau_X(x)$ можно подобрать $n \in \mathbb{N}$, для которого $\bigcup\{V \in \alpha_n \mid x \in V\} \subset U$.

Топологию τ_X называют секвенциальной, если для любого не замкнутого в *X* множества *A* найдутся точка $x \in X \setminus A$ и последовательность точек $a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, сходящаяся к *x*. Говорят, что топология τ_X имеет счетную тесноту, если для любых $A \subset X$ и $x \in [A]_X \setminus A$ существует счетное $B \subset A$, для которого $[B]_X \ni x$. Наконец, назовем τ_X *k*-топологией (при этом *X* называют *k*-пространством), если для любого не замкнутого в *X* множества *A* найдется компактное $B \subset X$ такое, что $A \cap B$ не замкнуто

---

* Авторы статьи – сотрудники кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики.

в B. Отметим, что любая топология, удовлетворяющая первой аксиоме счетности, секвенциальна, любая секвенциальная является k-топологией и (факт неочевидный) имеет счетную тесноту.

Если пространство Y хаусдорфово, то определена инъекция $C(X,Y) \xrightarrow{\Gamma} \exp(X \times Y) : f \to \Gamma_f$, посредством которой на $C(X,Y)$ индуцируется экспоненциальная топология $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$. Отметим как очевидное хаусдорфовость $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$.

Если Y метризуемо, Ω_Y – множество всех допустимых метрик на Y, то на $C(X,Y)$ определены для каждой $\rho \in \Omega_Y$ соответствующая топология равномерной сходимости $\tau_{\mu}^{(X,\,Y)}$, заданная метрикой $\mu = \mu(\rho)$, $\mu(f,g) = \sup\{\rho(f(x),g(x)) \mid x \in X\}$ (здесь допускается равенство $\mu(f,g) = \infty$, что, очевидно, не влияет на топологию), а также топология $\tau_{\sup}^{(X,\,Y)}$, предбазой которой служит семейство $\bigcup\{\tau_{\mu(\rho)}^{(X,\,Y)} \mid \rho \in \Omega_Y\}$ (т. е. топология $\tau_{\sup}^{(X,\,Y)}$ наименьшая, содержащая все топологии вида $\tau_{\mu}^{(X,Y)}$). Очевидно, что топология $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ хаусдорфова.

Более подробно об указанных понятиях см., например, [1–3].

2. Топология $\boldsymbol{\tau_{\exp}^{(X,Y)}}$. Далее считаем пространство Y хаусдорфовым. Сформулируем некоторые известные факты.

2.1. *Утверждение.* Семейство всех множеств вида $O(U) = \{f \in C(X,Y) \mid \Gamma_f \subset U\}$, где $U \in \tau_{X \times Y}$, является базой топологии $\tau_{\exp}^{(X,\,Y)}$.

2.2. *Утверждение.* Если пространство X счетно компактно, а Y измельчается, то топология $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Доказательства 2.1 и 2.2 см. в [1].

2.3. *Определение.* Скажем, что упорядоченная пара произвольных пространств $(X,\,Z)$ удовлетворяет условию (T), если в Z найдется точка z_0 (базовая) такая, что для любых $V \in \tau_Z(z_0)$, $F \in \varphi_X \setminus \{\varnothing, X\}$ и $x \in X \setminus F$ можно указать отображение $f \in C(X,\,Z)$, для которого $f(X) \subset V$, $f(F) = \{z_0\}$ и $f(x) \neq z_0$.

2.4. *Замечание.* Условию (T) удовлетворяет любая пара (X,Z), где X вполне регулярно, а Z содержит нетривиальную кривую (т. е. неодноточечный непрерывный образ отрезка).

2.5. **Лемма.** Пусть пространство X регулярно, пара (X,Y) удовлетворяет условию (T) и при этом по крайней мере базовая точка $y_0 \in Y$ имеет в Y счетную локальную базу. Тогда, если топология $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$ имеет счетную тесноту, то пространство X счетно компактно.

Доказательство. Допустим от противного, что X не счетно компактно. Тогда найдется дискретное в X множество $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$ (см. [2, с. 304]). Поскольку X регулярно и $B \in \varphi_X$ для любого $B \subset A$, можно для каждого $n \in \mathbb{N}$ подобрать пару окрестностей $(U_n, H_n) \subset \tau_X(a_n)$ так, чтобы $U_i \cap U_j = \varnothing$ при $i \neq j$, и $[H_n]_X \subset U_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем базовую точку $y_0 \in Y$, и пусть $\{V_n \in \tau_Y(y_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ – ее локальная база в $Y, V_1 \supset V_2 \supset \ldots$. Рассмотрим отображение $f \in T(X,\,Y), f(X) = \{y_0\}$. Отметим, что $\Gamma_f = X \times \{y_0\}$. Фиксируем произвольную окрестность $O(Q) \ni f$ (т. е. $\Gamma_f \subset Q \in \tau_{X \times Y}$, см. 2.1) и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем окрестности $O_n \in \tau_X(a_n)$, $W_n \in \tau_Y(y_0)$ и отображение $f_n \in C(X,\,Y)$ такие, что $O_n \subset H_n$, $W_n \subset V_n$, $O_n \times W_n \subset Q$, $f_n(X) \subset W_n$, $f_n(X \setminus O_n) = \{y_0\}$ и $f_n(a_n) \neq y_0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Далее определим отображение $f_Q : X \to Y$, $f_Q(x) = y_0$ при $x \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$, $f_Q(x) = f_n(x)$ при $x \in O_n$, $n \in \mathbb{N}$. Проверим, что

$f_Q \in C(X,Y)$. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in X$. Если $x_0 \in U_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $f_Q\big|_{U_n} = f_n\big|_{U_n}$, и, следовательно, f_Q непрерывно в точке x_0. Если же $x_0 \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, то $f_Q(x_0) = y_0$. Тогда для любой окрестности $V_n \ni y_0$, очевидно, существует окрестность $G \in \tau_X(x_0)$, для которой $G \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} [H_i]_X\right) = \varnothing$. Несложно проверить, что $f_Q(G) \subset \bigcup_{i=n+1}^{\infty} W_i \subset V_n$. Итак, $f_Q \in C(X,Y)$. Ясно также, что $f_Q \in O(Q)$. Обозначим $\Sigma = \{f_Q \mid \Gamma_f \subset Q \in \tau_{X\times Y}\}$. Ясно (см. 2.1), что f является точкой прикосновения для Σ, но $f \notin \Sigma$. В силу счетной тесноты f является точкой прикосновения для некоторого множества отображений $h_n \in \Sigma$, $h_n = f_{Q_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $E = (X \times Y) \setminus \{(a_n, h_n(a_n)) \in X \times Y \mid n \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что $\Gamma_f \subset E \in \tau_{X\times Y}$, т. е. $f \in O(E)$, но $h_n \notin O(E)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что ведет к противоречию. Лемма доказана.

2.6. *Замечание.* Если в 2.5 регулярность пространства X усилить до нормальности, то требование наличия счетной локальной базы в точке y_0 можно опустить. Доказательство в этом случае опирается на существование дискретного семейства окрестностей $\{U_a \in \tau_X(a) \mid a \in A\}$ для любого дискретного в X счетного множества A (см. [2, с. 119]).

2.7. **Лемма**. Пусть пространство X регулярно и удовлетворяет первой аксиоме счетности, пара (X,Y) удовлетворяет условию (*T*), и при этом базовая точка y_0 имеет в Y счетную локальную базу, а топология $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$ является *k*-топологией. Тогда пространство X счетно компактно.

Доказательство. Считаем A, U_n, H_n, V_n и f теми же, что и в доказательстве 2.5, $\{O_k^n \mid k \in \mathbb{N}\}$ – локальная база в X точки a_n, $H_n \supset O_1^n \supset O_2^n \supset \cdots$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждой упорядоченной пары $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ фиксируем отображение $f_k^n \in C(X,Y)$, $f_k^n(x) = y_0$ при $x \in X \setminus O_k^n$, $f_k^n(O_k^n) \subset V_k \setminus \{f_i^n(a_n) \mid 1 \le i < k\}$, $f_k^n(a_n) \ne y_0$. Обозначим $\Lambda = \{\overline{k} = (k_1, k_2, \ldots) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \mid k_1 < k_2 < \cdots\}$ и для каждого $\overline{k} \in \Lambda$ определим отображение $f_{\overline{k}} : X \to Y$, $f(x) = y_0$ при $x \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{k_n}^n$, $f(x) = f_{k_n}^n(x)$ при $x \in O_{k_n}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Непрерывность $f_{\overline{k}}$ доказывается как и в 2.5. Ясно, что множество $\Sigma = \{f_{\overline{k}} \mid \overline{k} \in \Lambda\}$ дискретно в себе, $f \notin \Sigma$, но f – точка прикосновения для Σ. Но тогда найдется компактное (относительно $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$) множество $\Omega \subset C(X,Y)$ такое, что $\Omega \cap \Sigma$ не замкнуто в Ω, в частности бесконечно. Выберем произвольным образом множество $\Delta = \{h_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \Omega \cap \Sigma$, $h_n \ne h_m$ при $n \ne m$, и рассмотрим отображение $h \in \Omega \setminus \Delta$, являющееся предельной точкой для Δ. Обозначим $F_n = \{f_k^n(a_n) \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{y_0\}$ и исследуем следующие случаи.

(A) $h(a_n) \notin F_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим открытое в $X \times Y$ множество $G = (X \times (Y \setminus F_n)) \cup ((X \setminus \{a_n\}) \times Y)$. Поскольку $h \in O(G)$, но $O(G) \cap \Delta = \varnothing$, случай (A) невозможен.

(B) $h(a_n) = y_0$ и $h(a_m) = f_k^m(a_m)$ для некоторых *n*, *m*, *k* и *n*<*m*. Для точек y_0 и $f_k^m(a_m)$ фиксируем окрестности V_p и W соответственно такие, что $V_p \cap \{f_i^n(a_n) \mid 1 \le i \le k\} = \varnothing$ и $W \cap F_m = \{f_k^m(a_m)\}$, и определим открытое в $X \times Y$ множество $G = ((X \setminus \{a_m\}) \times V_p) \cup ((X \setminus \{a_n\}) \times W) \cup ((X \setminus \{a_n, a_m\}) \times Y)$. Поскольку $h \in O(G)$, но $O(G) \cap \Delta = \varnothing$, случай (B) невозможен.

(C) $h(a_n) = f_k^n(a_n)$ и $h(a_m) = f_p^m(a_m)$ для некоторых *n*, *m*, *k*, *p* и *n*<*m*, $k \ge p$. Для точек $f_k^n(a_n)$ и $f_p^m(a_m)$ подберем окрестности V и W соответственно, $V \cap F_n = \{f_k^n(a_n)\}$ и $W \cap F_m = \{f_p^m(a_m)\}$, и положим $G=\left(\left(X\setminus\{a_m\}\right)\times V\right)\bigcup\left(\left(X\setminus\{a_n\}\right)\times W\right)\bigcup\left(\left(X\setminus\{a_n,a_m\}\right)\times Y\right)$. Так как $G\in\tau_{X\times Y}$, $h\in O(G)$, но $O(G)\bigcap\Delta=\varnothing$, случай (C) также невозможен.

(D) $h(a_n)=f_{k_n}^n(a_n)$, $n\in\mathbb{N}$, и $k_1<k_2<\cdots$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ подберем окрестность $W_n\in\tau_Y\left(f_{k_n}^n(a_n)\right)$, $W_n\bigcap F_n=\left\{f_{k_n}^n(a_n)\right\}$ и определим $G\in\tau_{X\times Y}$, $G=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left(X\setminus\left(A\setminus\{a_n\}\right)\right)\times W_n\right)\right)\bigcup$ $\bigcup\left(\left(X\setminus A\right)\times Y\right)$. Ясно, что $h\in O(G)$ и $O(G)\bigcap\Sigma=\left\{f_{\bar{k}}\right\}$, $\bar{k}=(k_1,k_2,\ldots)$. Итак, и случай (D) оказывается невозможным.

Таким образом, показано, что найдется $m\in\mathbb{N}$ $\left(m=m(h)\right)$ такое, что $h(a_n)=y_0$ для любого $n\geq m$. Теперь применим к Δ следующую процедуру. Положим формально $\Delta_0=\Delta$, $N_0=\mathbb{N}$, $n_2^0=1$, $m_1^0=m_0^1=0$ и строим поэтапно множества $N_1=\left\{n_i^1\mid i\in\mathbb{N}\right\}\subset N_0$, $n_2^0=n_1^1<n_2^1<\cdots$, и $M_1=\left\{m_i^1\mid i\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathbb{N}$, $m_1^0<m_1^1<m_2^1<\cdots$, $n_{i+1}^1=\min\left\{n>n_i^1\mid h_{n_1^1}(a_m)\neq h_n(a_m)\text{ для некоторого } m>m_{i-1}^1\right\}$, $m_i^1=\min\left\{m>m_{i-1}^1\mid h_{n_1^1}(a_m)\neq h_{n_{i+1}^1}(a_m)\right\}$, $i\in\mathbb{N}$. Такое построение возможно, поскольку в противном случае найдется $p\in\mathbb{N}$ такое, что $h_1(a_i)=h_j(a_i)$ для любых $i\geq p, j\geq p$, откуда следует конечность множества Δ, что влечет противоречие. Далее, положив $m_0^2=m_1^1$, мы можем применить указанную процедуру к множеству $\Delta_1=\left\{h_{n_i^1}\mid i\in\mathbb{N}\right\}$ и т. д. В итоге получим последовательности множеств $M_i=\left\{m_j^i\mid j\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathbb{N}$, $m_1^{i-1}<m_1^i<m_2^i<\cdots, i\in\mathbb{N}$, и $N_i=\left\{n_j^i\mid j\in\mathbb{N}\right\}$, $\mathbb{N}\supset N_1\supset N_2\supset\cdots$, $n_2^{i-1}=n_1^i<n_2^i<\cdots$, $i\in\mathbb{N}$, причем $h_{n_1^i}\left(a_{m_j^i}\right)\neq h_{n_{j+1}^i}\left(a_{m_j^i}\right)$ для любых $i\in\mathbb{N}$, $j\in\mathbb{N}$. Определим открытые в $X\times Y$ множества $E_i=(X\times Y)\setminus\left\{\left(a_{m_j^i},h_{n_{j+1}^i}\left(a_{m_j^i}\right)\right)\mid j\in\mathbb{N}\right\}$. Очевидно, что $O(E_i)\ni h_{n_1^i}$, но $O(E_i)\bigcap\left\{h_{n_j^i}\mid j\geq 2\right\}=\varnothing$ для любого $i\in\mathbb{N}$. Ясно также, что $\bigcup_{i=1}^{\infty}O(E_i)\ni h$ для любых бесконечного $\Delta_*\subset\Delta$ и $h\in\left[\Delta_*\right]_\Omega\setminus\Delta_*$. Положим $\Delta_*=\left\{h_{n_1^i}\mid i\in\mathbb{N}\right\}$ и рассмотрим компакт $K=\left[\Delta_*\right]_\Omega$. Поскольку $K\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}O(E_i)$, но K не покрывается конечным числом множеств $O(E_i)$, получаем противоречие. Лемма доказана.

Привлекая 2.2, получаем следующее.

2.8. **Теорема**. Если пара $(X,\ Y)$ удовлетворяет условию (*T*), пространство *X* регулярно (регулярно и удовлетворяет первой аксиоме счетности), а *Y* измельчается, то эквивалентны следующие условия: (a) топология $\tau_{\exp}^{(X,\ Y)}$ имеет счетную тесноту (является *k*-топологией соответственно); (b) топология $\tau_{\exp}^{(X,\ Y)}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности; (c) пространство *X* счетно компактно.

3. Топология $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{sup}}^{(X,\ Y)}$. Далее считаем пространство *Y* метризуемым.

3.1. *Утверждение*. Для любого $f\in C(X,\ Y)$ семейство открытых шаров $\left\{B_{\mu(\rho)}(f,\varepsilon)\mid\rho\in\Omega_Y,\varepsilon>0\right\}$ является локальной базой для *f* в топологии $\tau_{\sup}^{(X,\ Y)}$.

3.2. *Утверждение*. Если множество $\left[f(X)\right]_Y$ компактно для любого $f\in C(X,\ Y)$, то все топологии вида $\tau_{\mu}^{(X,\ Y)}$, $\mu=\mu(\rho)$, $\rho\in\Omega_Y$, совпадают.

3.3. *Утверждение*. Для любых дискретного в *Y* семейства $\{U_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ и множества $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$, где $U_n\in\tau_Y(a_n)$, $n\in\mathbb{N}$, существует метрика $\sigma\in\Omega_Y$ такая, что $B_\sigma(a_n,1)\subset U_n$ для каждого $n\in\mathbb{N}$.

Доказательства 3.1 – 3.3 см. в [1].

3.4. *Определение* [1]. Произвольное пространство X назовем локально подвижным, если для любой пары (x_0, U), где $x_0 \in X$, $U \in \tau_X(x_0)$, найдутся окрестность $V \in \tau_X(x_0)$ и отображение $f \in C(X, X)$ такие, что $V \subset U$, $f(x) = x$ при $x \in X \setminus V$, $f(V) \subset V$ и $f(x_0) \neq x_0$.

Отметим, что локально подвижным является любое регулярное пространство, локально гомеоморфное линейному нормированному.

3.5. **Лемма**. Пусть пространство Y локально подвижно, а топология $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ имеет счетную тесноту или является k-топологией. Тогда множество $[f(X)]_Y$ компактно для любого $f \in C(X, Y)$.

Доказательство. Допустим от противного, что найдутся $f \in C(X, Y)$ и дискретное в Y множество $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset [f(X)]_Y$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Подберем дискретное в Y семейство окрестностей $U_n \in \tau_Y(a_n)$ (см. [2, с. 444, 452, 453]) и точки $b_n \in U_n \cap f(X)$, $b_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждых $\rho \in \Omega_Y$ и упорядоченной пары $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ выберем открытый шар $B_\rho(b_n, \varepsilon_n) \subset U_n$, $0 < \varepsilon_n \leq 1$, окрестность $V_n^{(\rho,k)} \in \tau_Y(b_n)$, $V_n^{(\rho,k)} \subset B_\rho\left(b_n, \dfrac{\varepsilon_n}{3k}\right)$, и отображение $f_n^{(\rho,k)} \in C(Y,Y)$, для которого (см. 3.4) $f_n^{(\rho,k)}(y) = y$ при $y \in Y \setminus V_n^{(\rho,k)}$, $f_n^{(\rho,k)}\left(V_n^{(\rho,k)}\right) \subset V_n^{(\rho,k)}$ и $f_n^{(\rho,k)}(b_n) \neq b_n$. Определим $f_k^\rho \in C(Y, Y)$, $f_k^\rho(y) = y$ при $y \in Y \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n^{(\rho,k)}$ и $f_k^\rho(y) = f_n^{(\rho,k)}(y)$ при $y \in V_n^{(\rho,k)}$, $n \in \mathbb{N}$, и положим $h_k^\rho = f_k^\rho \circ f$, $\Sigma = \left\{h_k^\rho \mid \rho \in \Omega_Y, k \in \mathbb{N}\right\}$, $\Sigma^* = \{h \in C(X, Y) \mid$ существует бесконечное $M \subset \mathbb{N}$ такое, что $h(x_m) \neq b_m$ при $m \in M\}$. Очевидно, $\Sigma \subset \Sigma^*$. Поскольку $\mu\left(f, h_k^\rho\right) < \dfrac{1}{k}$ для любых $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega_Y$, и $k \in \mathbb{N}$, то f является точкой прикосновения для Σ (см. 3.1) и тем более для Σ^*, но $f \notin \Sigma^*$. Далее рассмотрим варианты.

(A) $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ имеет счетную тесноту. Тогда найдется множество $\Delta = \{h_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma$, $h_i = h_{k_i}^{\rho_i}$, $i \in \mathbb{N}$, для которого f является предельной точкой. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ фиксируем $W_i \in \tau_Y(b_i)$, $W_i \subset V_i^{(\rho_i,k_i)} \setminus f_{k_i}^{\rho_i}(b_i)$, и подберем метрику $\sigma \in \Omega_Y$, для которой $B_\sigma(b_i, 1) \subset W_i$ при любом $i \in \mathbb{N}$ (см. 3.3). Очевидно, $B_{\mu(\sigma)}(f, 1) \cap \Delta = \varnothing$, что влечет противоречие.

(B) $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ – k-топология. Тогда найдутся компакт $K \subset C(X,Y)$ и отображение $g \in K \setminus \Sigma^*$, являющееся предельной точкой для множества $K \cap \Sigma^*$. В силу определения Σ^* существует $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $g(x_n) = b_n$ при $n \geq m_0$. Несложно заметить, что компакт K метризуем. Но тогда к g сходится некоторая последовательность отображений $h_n \in K \cap \Sigma^*$. Далее подберем $n_i \in \mathbb{N}$, $m_0 \leq n_1 < n_2 < \cdots$, так, чтобы $h_i\left(x_{n_i}\right) \neq b_{n_i}$ при любом $i \in \mathbb{N}$, для каждого $i \in \mathbb{N}$ фиксируем $W_i \in \tau_Y\left(b_{n_i}\right)$, $W_i \subset U_{n_i} \setminus h_i\left(x_{n_i}\right)$, и выберем метрику $\sigma \in \Omega_Y$, для которой $B_\sigma\left(b_{n_i}, 1\right) \subset W_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Поскольку $B_{\mu(\sigma)}(g, 1) \cap \{h_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \varnothing$, получаем противоречие. Лемма доказана.

Учитывая 3.2, получаем следующее.

3.6. **Теорема**. При локально подвижном пространстве Y эквивалентны условия: (а) топология $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ имеет счетную тесноту; (в) $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ – k-топология; (с) $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ совпадает с любой топологией вида $\tau_\mu^{(X,Y)}$, $\mu = \mu(\rho)$, $\rho \in \Omega_Y$; (d) множество $[f(X)]_Y$ компактно для любого $f \in C(X,Y)$.

4. **Топологии $\tau_{\sup}^{(X,Y)}$ и $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$.** Пространство Y по-прежнему считаем метризуемым. Уточним известное соотношение $\tau_{\sup}^{(X,Y)} \subset \tau_{\exp}^{(X,Y)}$ (см. [1]).

4.1. *Утверждение*. При счетно компактном X топология $\tau_{\exp}^{(X,Y)}$ совпадает с любой топологией вида $\tau_{\mu}^{(X,\,Y)}$, $\mu=\mu(\rho)$, $\rho\in\Omega_Y$, в частности $\tau_{\exp}^{(X,Y)}=\tau_{\sup}^{(X,Y)}$.

4.2. *Утверждение*. Если Y не дискретно и топологии $\tau_{\sup}^{(X,\,Y)}$ и $\tau_{\exp}^{(X,\,Y)}$ совпадают на множестве $T(X,\,Y)$ (т. е. индуцируют на $T(X,Y)$ одну и ту же топологию), то X счетно компактно.

Доказательства 4.1 и 4.2 см. в [1].

Из 4.1, 4.2, 2.5 и 2.7 вытекает следующее.

4.3. **Теорема**. Пусть пространство X регулярно (регулярно и удовлетворяет первой аксиоме счетности), а пара (X,Y) удовлетворяет условию (*T*). Тогда эквивалентны условия: (a) топология $\tau_{\exp}^{(X,\,Y)}$ имеет счетную тесноту (является *k*-топологией соответственно); (в) топология $\tau_{\exp}^{(X,\,Y)}$ совпадает с любой топологией вида $\tau_{\mu}^{(X,\,Y)}$ $(\mu=\mu(\rho),\ \rho\in\Omega_Y)$; (c) топологии $\tau_{\sup}^{(X,\,Y)}$ и $\tau_{\exp}^{(X,\,Y)}$ совпадают; (d) топологии $\tau_{\sup}^{(X,\,Y)}$ и $\tau_{\exp}^{(X,\,Y)}$ совпадают на множестве $T(X,\,Y)$; (e) пространство X счетно компактно.

1. Тимохович В.Л., Фролова Д.С. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 3.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986.
3. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., 2006.

Поступила в редакцию 19.06.09.

Глеб Олегович Кукрак – кандидат физико-математических наук, доцент. ***Владимир Леонидович Тимохович*** – кандидат физико-математических наук, доцент.