

УДК 336:330.4(043.3)

Оптимизация структуры портфеля ценных бумаг на различных горизонтах инвестирования (стохастические модели)

И. А. КАРАЧУН

In this paper a set of stochastic models for the optimal allocation of resources in the primary securities is developed (short-term CVaR-model and medium-term CCaR-model), which is incorporating the most significant risks faced by a portfolio investor. The technique of derivative portfolio optimization is proposed, which allows replacing the derivative portfolio optimization problem by the optimization portfolio of underlying. It provides the variation of a risk reducing method depending on the length of investment horizon.

На сегодняшний день большинство финансовых расчетов в условиях неопределенности будущей рыночной ситуации строится на основании модели поведения финансовых активов, предложенной Л. Башелье, доработанной П. Самуэльсоном и впервые примененной для практических целей Ф. Блекум и М. Шоулзом [1].

Пусть $S^i(t)$ – стоимость i -го актива портфеля в момент времени t . Ограничимся рассмотрением периода $[0, T]$, где $t = 0$ – текущий момент времени, а T представляет собой длину горизонта инвестирования (в торговых днях), определяемую владельцем портфеля. Будем считать, что безрисковый актив $S^0(t)$ является облигацией с постоянной процентной ставкой r (это также может быть казначейский вексель или банковский вклад). Рыночная стоимость облигации – детерминированная положительная последовательность $S^0(t)$, динамика которой описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$dS^0(t) = rS^0(t)dt.$$

В качестве рискованных активов рассматриваются акции стоимостью $S^i(t)$, $i = \overline{1, m}$, с ожидаемой логарифмической доходностью μ_i . Рыночная стоимость $S^i(t)$ i -й акции в момент времени t описывается положительной стохастической последовательностью и становится известна только в этот момент. Динамика стоимости акции задается стохастическим дифференциальным уравнением [2]:

$$dS^i(t) = S^i(t) \left(\mu_i dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} dW^j(t) \right), \quad i = \overline{1, m},$$

где $\mu = (\mu_1 \dots \mu_m)'$ – ожидаемые логарифмические доходности рискованных активов (для упрощения можно предполагать, что, по крайней мере, одна из доходностей рискованных активов превышает значение r , так как только в таком случае инвестору выгодно приобретать эти активы); $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^m$ – волатильность логарифмических доходностей рискованных активов; $W(t)$ – m -мерное стандартное броуновское движение на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Keywords: *portfolio, securities, optimization, stochastic model, risk, CVaR, CCaR*

2000 Mathematics Subject Classification: 90C15, 93E03

© И. А. Карачун, 2012.

В реальных условиях цены акций котируются на дискретных интервалах времени. Это означает, что имеется практическая нижняя граница для основного временного шага случайного блуждания dt , так как на современных биржах котировки проводятся каждые несколько минут. Но при использовании такого временного шага для оценки активов возникает необходимость в обработке очень больших массивов данных, что влечет за собой увеличение затрат времени на принятие инвестиционного решения и вероятности появления вычислительных ошибок. Вместо этого удобнее использовать модель рынка в непрерывном времени при $dt \rightarrow 0$. Такой подход позволяет более эффективно решать дифференциальные уравнения, чем моделирование случайного блуждания на реальной временной шкале. При этом инвестору нет необходимости постоянно следить за котировками и перестраивать портфель в соответствии с изменяющимися рыночными условиями, достаточно делать это периодически. В условиях современного рынка оптимальным периодом между перестройками портфеля считается один торговый день.

Обозначим $X(t)$ – капитал инвестора в момент времени t (стоимость портфеля), а $n^i(t)$ – число единиц i -го актива в этот момент. Динамика стоимости портфеля описывается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dX(t) = \sum_{i=1}^m n^i(t) S^i(t) \left(\mu_i dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} dW^j(t) \right) + \left(X(t) - \sum_{i=1}^m n^i(t) S^i(t) \right) r dt, \quad X(0) = x_0,$$

где x_0 – стартовый капитал инвестора. Правая часть уравнения состоит из прибыли/убытка от инвестиций в акции и прибыли/убытка от инвестиций в облигации.

Обозначим через $\pi^i(t)$ долю каждого рискованного актива в портфеле:

$$\pi^i(t) = \frac{n^i(t) S^i(t)}{X(t)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Случайный вектор $\pi(t) = (\pi^1(t) \dots \pi^m(t))'$ будем называть портфелем или стратегией инвестора. Тогда уравнение динамики капитала инвестора можно переписать в матричном виде:

$$dX(t) = (\pi'(t)(\mu - r\mathbf{1}) + r)X(t)dt + \pi'(t)\sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = x_0,$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ – стартовый капитал инвестора; $\mathbf{1} = (1 \dots 1)' \in \mathbb{R}^m$ – m -мерный единичный вектор; $\pi^0(t) = 1 - \pi'(t)\mathbf{1}$ – доля средств, вложенная в безрисковый актив.

Для формулировки задачи оптимизации портфеля ценных бумаг необходимо определить целевую функцию и задать ограничение риска с помощью меры, представляющей собой математическую функцию основных характеристик портфеля. Решение этой задачи позволит определить оптимальную стратегию инвестирования, которая характеризуется тем, что одновременно обеспечивает максимальный ожидаемый доход и заданный инвестором уровень риска портфеля.

Введем некоторые обозначения, которые понадобятся при формулировке задач оптимизации. Для заданного уровня риска (уровня доверия) α обозначим через k_α α -квантиль стандартного нормального распределения. Естественно предположить, что α не превышает уровня в 50% ($\alpha < 0.5$), а значит, соответствующее значение будет отрицательным. Это условие необходимо для последующего корректного решения задачи оптимизации. Пусть $k(\pi)$ – α -квантиль стоимости портфеля $X(T)$ в момент времени T . Это означает, что с вероятностью $(1 - \alpha)$ стоимость портфеля в конце горизонта инвестирования будет не ниже $k(\pi)$. Длина этого промежутка времени может быть любой конечной величиной в зависимости от предпочтений инвестора, видов входящих в портфель активов, их ликвидности, кредитного рейтинга эмитента, оборота и условий функционирования рынка.

Условная стоимость под риском – CVaR (Conditional Value-at-Risk) – максимальные возможные потери по портфелю при условии, что они будут больше VaR (максимального возможного с вероятностью $(1 - \alpha)$ убытка). Он имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{CVaR}(\pi, t) &= E[X(t)] - E[X(t) | X(t) \leq k(\pi)] = \\ &= x_0 e^{rt} \exp \left\{ \int_0^t \pi'(s)(\mu - r \underline{1}) ds \right\} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \Phi \left(k_\alpha - \sqrt{\int_0^t \|\pi'(s)\sigma\|^2 ds} \right) \right). \end{aligned}$$

Для применения методики CVaR необходимо знать текущую рыночную стоимость финансового инструмента, волатильность, предполагаемый инвестиционный горизонт и необходимый доверительный уровень. Само значение CVaR опирается на накопленную базу фактических данных, и его можно посчитать только для рисков, измеряемых количественно. Модификацией CVaR является концепция капитала под риском – CCaR (Conditional Capital-at-Risk) [2], который равен разности безрискового дохода и ожидаемого при условии, что последний будет меньше α -квантиля будущей стоимости портфеля:

$$\begin{aligned} \text{CCaR}(\pi, t) &= x_0 e^{rt} - E[X(t) | X(t) \leq k(\pi)] = \\ &= x_0 e^{rt} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \exp \left\{ \int_0^t \pi'(s)(\mu - r \underline{1}) ds \right\} \Phi \left(k_\alpha - \sqrt{\int_0^t \|\pi'(s)\sigma\|^2 ds} \right) \right). \end{aligned}$$

Это строго квазивыпуклая, субаддитивная и когерентная мера риска, наилучшим образом подходящая для среднесрочных и долгосрочных инвестиционных горизонтов.

Формулировка задачи оптимизации портфеля ценных бумаг состоит в следующем:

- для инвестирования имеется денежная сумма x_0 – стартовый капитал;
- определен период инвестирования – горизонт инвестирования T ;
- инвестор рассматривает $m + 1$ определенных активов, представляющих собой ценные бумаги. Бумаги нумеруются от 0 до m , индексом 0 обозначается безрисковый актив – государственная облигация;
- каждая ценная бумага описывается следующими характеристиками: доходности r и μ_i ; риск неблагоприятного изменения рыночных цен σ_i ; взаимосвязь между рисковыми активами Σ_{ij} , описываемая ковариацией их доходностей. Для проведения расчетов имеются исторические данные о ценах активов – $S^i(t)$, $i = \overline{0, m}$; если в состав портфеля входят производные финансовые инструменты, то их стоимости описываются известными функциями вида $f(t, S^1(t), \dots, S^m(t))$;
- имеется возможность осуществлять операции купли-продажи ценных бумаг в любой торговый день до конца инвестиционного горизонта;
- требуется ограничить риск портфеля в конце периода инвестирования значением C при уровне доверия $(1 - \alpha)$;
- требуется определить такую стратегию $\pi(t) = (\pi^0(t), \pi^1(t), \dots, \pi^m(t))'$, чтобы получить максимальную ожидаемую стоимость портфеля $E[X(T)]$ в конце периода инвестирования.

В компактном виде модель оптимизации портфеля первичных ценных бумаг может быть представлена следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 e^{rT} \exp \left\{ \int_0^T \pi'(s)(\mu - r \underline{1}) ds \right\} \rightarrow \max_\pi, \\ X(0) = x_0, \quad X(t) \geq 0, \quad \alpha < 0.5, \\ \sum_{i=0}^m \pi^i(t) = 1, \\ \left\{ \begin{array}{l} x_0 e^{rT} \exp \left\{ \int_0^T \pi'(s)(\mu - r \underline{1}) ds \right\} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \Phi \left(k_\alpha - \sqrt{\int_0^T \|\pi'(s)\sigma\|^2 ds} \right) \right) \leq C, \text{ если } T < 250, \\ x_0 e^{rT} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \exp \left\{ \int_0^T \pi'(s)(\mu - r \underline{1}) ds \right\} \Phi \left(k_\alpha - \sqrt{\int_0^T \|\pi'(s)\sigma\|^2 ds} \right) \right) \leq C, \text{ если } T \geq 250. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

При проведении операций на спекулятивном рынке ценных бумаг, характеризующемся высокой неустойчивостью доходности акций, возникает проблема дополнительного страхования рисков инвестирования. В современной портфельной теории существует методика, позволяющая дополнительно ограничивать риск портфеля путем хеджирования. Суть заключается в покупке первичных финансовых активов совместно с их производными инструментами. Представленная выше модель не предусматривает включение в состав портфеля производных ценных бумаг из-за того, что динамика такого портфеля приобретает нелинейный характер. Для решения этой проблемы предлагается использовать метод реплицирования опциона набором базового актива и облигации, платежи по которому полностью дублируют поступления от опциона. Это позволяет перейти от оптимизации опционного портфеля к задаче оптимизации портфеля из базовых акций и облигации.

Цена опциона в момент времени t задается непрерывно дифференцируемой функцией $f(t, S(t))$ (для простоты будем рассматривать опционы с одним базовым, поскольку алгоритм решения для других классов аналогичен) и дублируется стоимостью портфеля, содержащего облигацию и m базовых акций. Тогда существует такая дублирующая стратегия, что справедливая цена опциона $E[H(T)f(T, S(T))]$, где $H(t)$ – стохастический дефлятор, а стоимость соответствующего дублирующего портфеля равна $X^*(t) = \frac{1}{H(t)}E[H(T)f(T, S(T))]$ [3]. Это утверждение можно перефразировать путем введения эквивалентной мартингальной меры $\tilde{P}$ для цен базовых активов (т.е. вероятностной меры, относительно которой дисконтированные цены активов $\frac{S(t)}{S^0(t)}$ являются мартингалами), которая определяется как $\tilde{P}(A) = E[e^{rT}H(T)I_A]$, $\forall A \in \mathcal{F}_T$. Соответственно, $\tilde{E}[e^{-rT}f(T, S(T))] = E[H(T)f(T, S(T))]$, и оценка стоимости опциона сводится к нахождению дисконтированного ожидания премии по опциону относительно эквивалентной мартингальной меры. В рамках мартингального подхода к оптимизации портфеля можно интуитивно предположить следующее: поскольку цены опционов несут ту же информацию, что и цены базовых активов (говоря математическим языком – генерируют ту же фильтрацию), то и оптимальные структуры портфелей из акций и из опционов должны быть взаимосвязаны.

Реплицирующая стратегия опциона $n(t) = (n^1(t) \dots n^m(t))'$ имеет вид [4]:

$$n^i(t) = \frac{df(t, S^i(t))}{dS^i(t)}, \quad n^0(t) = \frac{f(t, S^i(t)) - \sum_{i=1}^m \frac{df(t, S^i(t))}{dS^i(t)} S^i(t)}{S^0(t)},$$

где $n^i(t)$ – число единиц соответствующего базового актива; функция $f(t, S^i(t))$ – решение дифференциального уравнения:

$$\frac{df(t, S^i(t))}{dt} + \sum_{i,j=1}^m \Sigma_{ij} \frac{d^2 f(t, S^i(t))}{dS^i(t) dS^j(t)} S^i(t) S^j(t) + \sum_{i=1}^m r \frac{df(t, S^i(t))}{dS^i(t)} S^i(t) - r f(t, S^i(t)) = 0. \quad (0.1)$$

Для определения динамики стоимости опциона необходимо применить формулу Ито [5] к процессу $f(t, S^i(t))$ и использовать тот факт, что он удовлетворяет уравнению (0.1). Получим стохастическое дифференциальное уравнение:

$$df(t, S^i(t)) = \left(r f(t, S^i(t)) + \sum_{i=1}^m \frac{df(t, S^i(t))}{dS^1(t)} S^i(t) (\mu_i - r) \right) dt + \sum_{i=1}^m \frac{df(t, S^i(t))}{dS^1(t)} S^i(t) \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} dW^j(t).$$

Обозначим дельта-матрицу портфеля $\Delta = \{\Delta_{ij}(t)\}_{i,j=0}^m$, где $\Delta_{i0}(t) = n^0(t)$, $\Delta_{ij}(t) = \frac{dS^i(t)}{dS^j(t)}$, если i -й актив портфеля является акцией, и $\Delta_{ij}(t) = \frac{df(t, S^i(t))}{dS^j(t)}$, если i -й актив портфеля является опционом. Тогда $f(t, S^i(t)) = \sum_{j=0}^m \Delta_{ij}(t) S^j(t)$ и стоимость портфеля имеет вид:

$$X(t) = \left(n^0(t) + \sum_{j=0}^m n^i(t) \Delta_{i0}(t) \right) S^0(t) + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m n^i(t) \Delta_{ij}(t) \right) S^j(t), \quad (0.2)$$

где $n^i(t)$ – число единиц каждого актива в портфеле из акций.

Обозначим $\pi(t)$ оптимальную торговую стратегию соответствующей задачи для портфеля из акций. Тогда

$$n^i(t) = \frac{\pi^i(t)X^*(t)}{S^i(t)}, \quad n^0(t) = \left(1 - \sum_{i=1}^m \pi^i(t)\right) \frac{X^*(t)}{S^0(t)}.$$

Следовательно, соответствующий процесс стоимости портфеля должен удовлетворять стохастическому дифференциальному уравнению с граничным условием:

$$\begin{aligned} X(T) &= f^*(T, S(T)), \\ dX(t) &= n^0(t)dS^0(t) + \sum_{i=1}^m n^i(t)dS^i(t) = \\ &= \left(rn^0(t)S^0(t) + \sum_{i=1}^m \mu_i n^i(t)S^i(t)\right)dt + \sum_{i,j=1}^m n^i(t)S^i(t)\sigma_{ij}dW^j(t). \end{aligned}$$

С другой стороны, если на опционном рынке существует торговая стратегия $\tilde{n}(t)$ со стоимостью $X(t)$, то, исходя из (0.2), получим:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(\tilde{n}^0(t) + \sum_{i=0}^m \tilde{n}^i(t)\Delta_{i0}(t)\right)dS^0(t) + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \tilde{n}^i(t)\Delta_{ij}(t)\right)dS^j(t) = \\ &= \left(r\tilde{n}^0(t)S^0(t) + \sum_{i=0}^m \tilde{n}^i(t)\left(r\Delta_{i0}(t)S^0(t) + \sum_{j=1}^m \mu_j \Delta_{ij}(t)S^j(t)\right)\right)dt + \\ &\quad + \sum_{i,j,k=1}^m \tilde{n}^i(t)\Delta_{ik}(t)S^k(t)\sigma_{kj}dW^j(t). \end{aligned}$$

Приравняв правые части полученных уравнений и сравнив коэффициенты при dW , получим оптимальную стратегию для смешанного портфеля:

$$\tilde{n}^i(t) = \frac{n^i(t)}{\Delta_{ii}(t)}, \quad i = \overline{1, m}, \quad \tilde{n}^0(t) = \frac{X(t) - \sum_{i=1}^m \tilde{n}^i(t)f^i(t, S^i(t))}{S^0(t)}.$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что оптимальный конечный капитал инвестора зависит от выбора ограничения в задаче, в то время как вид рискованных активов влияет лишь на форму торговой стратегии, которая их обеспечивает. Для определения этой стратегии достаточно знать дельта-матрицу и решить задачу оптимизации портфеля из акций.

Литература

1. **Black F., Scholes M.** The pricing of options and corporate liabilities // J. of Polit. Economy. – 1973. – Vol. 81. – P. 637–654.
2. **Dmitrasinovic-Vidovic G. [et al.]** Continuous time portfolio selection under conditional capital at risk. – Calgary, 2004. – 45 p. – (Preprint / The Math. a. Computational Finance Lab., Univ. of Calgary. – Canada ; T2N 1N4).
3. **Korn R., Trautmann S.** A Optimal control of option portfolios and applications // OR Spektrum. – 1999. – Vol. 21, № 1-2. – P. 123–146.
4. **Karatzas I.** Optimization problems in continuous trading // SIAM J. on Control a. Optimization. – 1989. – Vol. 27, № 6. – P. 1221–1259.
5. **Oksendal B.K.** Stochastic differential equations: an introduction with applications. – 6th ed. – Berlin : Springer-Verl., 2003. – 363 p.