УДК 517.956

О.А. КОНОПЕЛЬКО

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

One-valued solvability of boundary value problems in tube domains for a fourth-order equation of composite type is proved in the paper.

В данной работе приводятся постановки еще четырех корректно поставленных граничных задач в цилиндрических областях для уравнения четвертого порядка составного типа и применяется метод работы [1] для доказательства существования и единственности обобщенных решений этих задач. Под уравнением составного типа понимается уравнение с оператором, характеристический многочлен которого имеет и действительные, и комплекснозначные характеристики. Исследование подобных уравнений вызвано необходимостью дальнейшего развития фундаментальной теории корректно поставленных задач для линейных дифференциальных уравнений с частными производными и большим практическим значением полученных результатов, что подтверждается многочисленными публикациями по данной тематике.

1. Постановка задачи. Для функции u независимых переменных $\mathbf{x}=(x_0,\dots,x_n)$ $(n+1)$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ рассматривается линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка с оператором составного типа в главной части, представляющим собой композицию волнового оператора и эллиптического оператора типа Лапласа,

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + (b^2 - a^2)\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\Delta u - a^2 b^2 \Delta^2 u + A^{(2)} u = f(\mathbf{x}), \tag{1}$$

где a и b – некоторые постоянные, удовлетворяющие соотношению $0<a^2<b^2$, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа относительно независимых переменных $\mathbf{x}'=(x_1,\ldots,x_n)$, $A^{(2)} = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le 2} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}$, $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_0^{\alpha_0}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)$, α_i, $i=0,\ldots,n$, – целые неотрицательные числа, $|\boldsymbol{\alpha}|=\alpha_0+\ldots+\alpha_n$.

Уравнение (1) задается в цилиндрической области $Q=(0,T)\times\Omega$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Граница ∂Q области Q состоит из нижнего основания $\Omega^{(0)}=\{\mathbf{x}\in\partial Q \mid x_0=0\}$, верхнего основания $\Omega^{(T)}=\{\mathbf{x}\in\partial Q \mid x_0=T\}$ и боковой поверхности $\Gamma=\{\mathbf{x}\in\partial Q \mid 0<x_0<T\}$.

Обозначим через $C^l(\overline{Q})$ множество непрерывно дифференцируемых функций до порядка l включительно в замыкании $\overline{Q}$ области Q, где l – целое неотрицательное число. В уравнении (1) $a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{x})$ – заданные функции и $a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{x})\in C^2(\overline{Q})$.

К уравнению (1) присоединяются следующие граничные условия:

$$u\big|_{\Omega^{(0)}} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(0)}} = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0 \tag{3}$$

и

$$u\big|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{v}^2}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{4}$$

где $\mathbf{v}=(\nu_0,\ldots,\nu_n)$ – единичный вектор внешней относительно области Q нормали к гиперповерхности Γ.

Вместо условий (4) на боковой поверхности Γ можно задать условия

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}\right|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial \mathbf{v}^3}\right|_{\Gamma} = 0. \tag{5}$$

В задачах (1) – (4) и (1) – (3), (5) можно поменять местами условия на $\Omega^{(0)}$ и $\Omega^{(T)}$, а также задать неоднородные граничные условия, но они сводятся к однородным путем продолжения в область Q функциями из подходящих пространств их правых частей и замены искомой функции [2]. Таким образом, для уравнения (1) здесь рассматриваются четыре граничные задачи.

2. Определение обобщенного решения. Рассмотрим задачу (1) – (4) и введем для нее функциональные пространства, в которых через равенство некоторых функционалов будет определено обобщенное решение. Для этого наряду с задачей (1) – (4) будем рассматривать и сопряженную по отношению к ней задачу, т. е. уравнение

$$\mathcal{L}'v \equiv \frac{\partial^4 v}{\partial x_0^4} + (b^2 - a^2)\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\Delta v - a^2 b^2 \Delta^2 v + A^{(2)\prime} v = g(\mathbf{x}) \tag{6}$$

и граничные условия

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0, \tag{7}$$

$$v\big|_{\Omega^{(T)}} = \left.\frac{\partial v}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}} = \left.\frac{\partial^3 v}{\partial x_0^3}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0, \tag{8}$$

$$v\big|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{v}^2}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{9}$$

где $A^{(2)\prime} v = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le 2} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}(a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{x})v)$.

В качестве областей определения операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ возьмем

$$\mathcal{D}(\mathcal{L})=\left\{u\in C^4(\overline{Q})\,|\,u|_{\Omega^{(0)}}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(0)}}=\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\right|_{\Omega^{(0)}}=0,\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}}=0, u|_\Gamma=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{v}^2}\right|_\Gamma=0\right\},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}')=\left\{v\in C^4(\overline{Q})\,|\left.\frac{\partial v}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(0)}}=0, v|_{\Omega^{(T)}}=\left.\frac{\partial v}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}}=\left.\frac{\partial^3 v}{\partial x_0^3}\right|_{\Omega^{(T)}}=0, v|_\Gamma=\left.\frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{v}^2}\right|_\Gamma=0\right\}.$$

Легко проверяется, что

$$(\mathcal{L}u,v)_{L_2(Q)}=(u,\mathcal{L}'v)_{L_2(Q)} \tag{10}$$

для любых функций $u\in\mathcal{D}(\mathcal{L})$ и $v\in\mathcal{D}(\mathcal{L}')$, где $(\cdot,\cdot)_{L_2(Q)}$ – значение скалярного произведения пространства $L_2(Q)$ квадратично суммируемых по Лебегу в области Q функций.

Обозначим через $H^l(Q)$ гильбертово пространство функций $u\in L_2(Q)$, обобщенные производные которых $\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u$, $|\boldsymbol{\alpha}|\le l$, также квадратично суммируемы по Лебегу в области Q. Скалярное произведение в пространстве $H^l(Q)$ определяется выражением $(u,v)_{H^l(Q)}=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le l}(\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u,\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}v)_{L_2(Q)}$. Пусть $H^l_{\text{гр}}(Q)$, l=3,4, – подпространства пространства $H^l(Q)$, элементы которых удовлетворяют граничным условиям (2) – (4) согласно теоремам вложения С.Л. Соболева. Аналогично определяются подпространства $H^{l\ \text{гр}}(Q)$, их элементы удовлетворяют условиям (7) – (9).

Условие 1. Граница ∂Q области Q такова, что замыкание множества $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ по норме пространства $H^l(Q)$ совпадает с подпространством $H^l_{\text{гр}}(Q)$, а замыкание множества $\mathcal{D}(\mathcal{L}')$ – с подпространством $H^{l\ \text{гр}}(Q)$, l=3,4.

Отметим, что элементы пространства $H^3_{\text{гр}}(Q)$ имеют смысл не для всех граничных условий (2) – (4). Если $u\in H^3_{\text{гр}}(Q)$, то u фактически удовлетворяет первым двум условиям из (2) и условиям (3), (4). Аналогичное замечание имеет место и для элементов $H^{3\ \text{гр}}(Q)$ относительно условий (7) – (9). Отметим, что подпространства $H^l_{\text{гр}}(Q)$ и $H^{l\ \text{гр}}(Q)$, l=3,4, также являются гильбертовыми пространствами.

Для определения обобщенного решения задачи (1) – (4) рассмотрим билинейную форму $\Phi(u,v)=(u,\mathcal{L}'v)_{L_2(Q)}$, $u\in\mathcal{D}(\mathcal{L})$, $v\in\mathcal{D}(\mathcal{L}')$.

Если функция $u\in H^3_{\text{гр}}(Q)$, а $v\in H^{4\ \text{гр}}(Q)$, то форму $\Phi(u,v)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Phi(u,v)=-\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3},\frac{\partial v}{\partial x_0}\right)_{L_2(Q)}-(b^2-a^2)\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^2\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L_2(Q)}+\\+a^2b^2\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2\partial x_j},\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_{L_2(Q)}+(A^{(2)}u,v)_{L_2(Q)}.\end{aligned} \tag{11}$$

Для каждого элемента $u\in H^3_{\text{гр}}(Q)$ $\Phi(u,v)$ будем рассматривать как линейный функционал $v\to\Phi(u,v)$.

Определим расширение $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ оператора $\mathcal{L}$, принимая во внимание равенство (11). Функцию u отнесем к области определения $\mathcal{D}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$ оператора $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, если $u\in H^3_{\text{гр}}(Q)$ и отображение $v\to\Phi(u,v)$ есть линейный непрерывный функционал на плотном множестве $H^{4\ \text{гр}}(Q)$ пространства $L_2(Q)$ в топологии, индуцированной из пространства $L_2(Q)$. Тогда этот функционал допускает непрерывное продолжение на все пространство $L_2(Q)$. Следовательно, существует единственный такой элемент $\boldsymbol{\mathcal{L}}u\in L_2(Q)$, что $\Phi(u,v)=(\boldsymbol{\mathcal{L}}u,v)_{L_2(Q)}$ при $u\in\mathcal{D}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$ и любых $v\in L_2(Q)$.

Поскольку множество $H^{4\ \text{гр}}(Q)$ плотно в пространстве $L_2(Q)$, то

$$\|\boldsymbol{\mathcal{L}}u\|_{L_2(Q)}=\sup_{v\in H^{4\ \text{гр}}(Q)}\frac{|\Phi(u,v)|}{\|v\|_{L_2(Q)}},\ u\in\mathcal{D}(\boldsymbol{\mathcal{L}}). \tag{12}$$

Из формул (10) и (11) следует, что если $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, то $u \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$. Действительно, $\Phi(u,v) = (\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)}$ и является линейным непрерывным функционалом по v при $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, $v \in L_2(Q)$, т. е. при $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ $\mathcal{L}u = \boldsymbol{\mathcal{L}}u$. Следовательно, $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ является расширением оператора $\mathcal{L}$.

Определение 1. Всякое решение операторного уравнения

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}u = f,\ f \in L_2(Q),$$

назовем *обобщенным* решением задачи (1) – (4).

Аналогично, исходя из равенства (10), строим расширение $\boldsymbol{\mathcal{L}}'$ оператора $\mathcal{L}'$.

Функцию v отнесем к области определения $\mathcal{D}(\boldsymbol{\mathcal{L}}')$ оператора $\boldsymbol{\mathcal{L}}'$, если $v \in H^{3\text{ гр}}(Q)$ и отображение $u \to \Psi(u,v)$, где

$$\Psi(u,v) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial^3 v}{\partial x_0^3}\right)_{L_2(Q)} - (b^2 - a^2)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^3 v}{\partial x_0^2 \partial x_i}\right)_{L_2(Q)} + \\ + a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial^3 v}{\partial x_i^2 \partial x_j}\right)_{L_2(Q)} + (A^{(2)}u, v)_{L_2(Q)}, \tag{13}$$

$u \in H^4_{\text{гр}}(Q)$, есть линейный непрерывный функционал на плотном множестве $H^4_{\text{гр}}(Q)$ пространства $L_2(Q)$ в топологии, индуцированной из пространства $L_2(Q)$. Тогда этот функционал допускает непрерывное продолжение на все пространство $L_2(Q)$. Следовательно, существует единственный такой элемент $\boldsymbol{\mathcal{L}}'v \in L_2(Q)$, что $\Psi(u,v) = (u, \boldsymbol{\mathcal{L}}'v)_{L_2(Q)}$ при $v \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\mathcal{L}}')$ и любых $u \in L_2(Q)$.

Поскольку множество $H^4_{\text{гр}}(Q)$ плотно в пространстве $L_2(Q)$, то

$$\| \boldsymbol{\mathcal{L}}'v \|_{L_2(Q)} = \sup_{u \in H^4_{\text{гр}}(Q)} \frac{|\Psi(u,v)|}{\| u \|_{L_2(Q)}},\ v \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\mathcal{L}}').$$

Из формул (10) и (13) также следует, что если $v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}')$, то $v \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\mathcal{L}}')$.

Сравнивая формулы (11) и (13), заключаем, что справедливо равенство

$$(\boldsymbol{\mathcal{L}}u, v)_{L_2(Q)} = (u, \boldsymbol{\mathcal{L}}'v)_{L_2(Q)},\ u \in H^4_{\text{гр}}(Q),\ v \in H^{4\text{ гр}}(Q). \tag{14}$$

3. Существование единственного обобщенного решения. Существование обобщенного решения будет доказано на основании (14), если будут установлены для операторов $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{L}}'$ следующие априорные оценки. При этом учитывается, что пространства $H^3_{\text{гр}}(Q)$ и $H^{3\text{ гр}}(Q)$ являются рефлексивными.

Теорема 1. *Справедливы неравенства*

$$\| u \|_{H^3_{\text{гр}}(Q)} \le c_1 \| \boldsymbol{\mathcal{L}}u \|_{L_2(Q)},\ u \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\mathcal{L}}), \tag{15}$$

$$\| v \|_{H^{3\text{ гр}}(Q)} \le c_2 \| \boldsymbol{\mathcal{L}}'v \|_{L_2(Q)},\ v \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\mathcal{L}}'), \tag{16}$$

где c_i, i=1, 2, – *некоторые постоянные, не зависящие от функций u и v.*

Доказательство. Установим справедливость неравенства (15). Для этого предположим сначала, что $u \in H^3_{\text{гр}}(Q) \cap H^4(Q)$. Из (11) следует, что для того, чтобы функционал $v \to \Phi(u,v)$ в этом случае был непрерывным над пространством $L_2(Q)$, должно выполняться равенство $\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0$, т. е. фактически $u \in H^4_{\text{гр}}(Q)$, если $u \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$. В этом случае значение функционала $\Phi(u, v)$ можно представить в виде

$$\Phi(u,v) = \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4}, v\right)_{L_2(Q)} + (b^2 - a^2)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^2 \partial x_i^2}, v\right)_{L_2(Q)} - a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}, v\right)_{L_2(Q)} + (A^{(2)}u, v)_{L_2(Q)}, \tag{17}$$

$v \in H^{4\text{ гр}}(Q)$.

Функционал $\Phi(u,v)$, записанный в виде (17), продолжается по непрерывности на все пространство $L_2(Q)$. В (17) полагаем $v = \mathcal{M}u$, где $\mathcal{M}u = (T - x_0)\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3} + (b^2 - a^2)(T - x_0)\frac{\partial}{\partial x_0}\Delta u$. Отметим, что при таком выборе $v \in L_2(Q)$. В этом случае

$$\Phi(u,\mathcal{M}u)=\int_Q\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4}(T-x_0)\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}+(b^2-a^2)\sum_{i=1}^n\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4}(T-x_0)\frac{\partial^3 u}{\partial x_0\partial x_i^2}+\right.$$
$$+(b^2-a^2)\sum_{i=1}^n\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^2\partial x_i^2}(T-x_0)\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}+(b^2-a^2)^2\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^2\partial x_i^2}(T-x_0)\frac{\partial^3 u}{\partial x_0\partial x_j^2}-$$
$$\left.-a^2b^2\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2\partial x_j^2}(T-x_0)\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}-a^2b^2(b^2-a^2)\sum_{i,j,k=1}^n\frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2\partial x_j^2}(T-x_0)\frac{\partial^3 u}{\partial x_0\partial x_k^2}\right)d\mathbf{x}.$$

Представим главную часть подынтегрального выражения в последнем соотношении в дивергентном виде:

$$\Phi(u,\mathcal{M}u)=\int_Q\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_0}\left((T-x_0)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\right)^2+(b^2-a^2)\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}(T-x_0)\frac{\partial^3 u}{\partial x_0\partial x_i^2}\right)+\right.$$
$$+(b^2-a^2)\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_0\partial x_i^2}\right)-(b^2-a^2)\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^2\partial x_i}\right)+(b^2-a^2)\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^2\partial x_i}\right)^2+$$
$$+(b^2-a^2)^2\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^2\partial x_i}(T-x_0)\frac{\partial^3 u}{\partial x_0\partial x_j^2}\right)-(b^2-a^2)^2\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^2\partial x_i}(T-x_0)\frac{\partial^3 u}{\partial x_0\partial x_i\partial x_j}\right)+$$
$$+\frac{(b^2-a^2)^2}{2}\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_0}\left((T-x_0)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0\partial x_i\partial x_j}\right)^2\right)+\frac{(b^2-a^2)^2+3a^2b^2}{2}\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0\partial x_i\partial x_j}\right)^2-$$
$$-a^2b^2\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_i\partial x_j^2}(T-x_0)\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\right)+a^2b^2\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(T-x_0)\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^3\partial x_i}\right)-$$
$$-a^2b^2\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(T-x_0)\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^2\partial x_i\partial x_j}\right)+\frac{a^2b^2}{2}\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_0}\left((T-x_0)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0\partial x_i\partial x_j}\right)^2\right)-$$
$$-a^2b^2\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^3 u}{\partial x_0\partial x_i\partial x_j}\right)-a^2b^2(b^2-a^2)\sum_{i,j,k=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_i\partial x_j^2}(T-x_0)\frac{\partial^3 u}{\partial x_0\partial x_k^2}\right)+$$
$$+a^2b^2(b^2-a^2)\sum_{i,j,k=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(T-x_0)\frac{\partial^4 u}{\partial x_0\partial x_i\partial x_k^2}\right)-$$
$$-a^2b^2(b^2-a^2)\sum_{i,j,k=1}^n\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(T-x_0)\frac{\partial^4 u}{\partial x_0\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\right)+$$
$$+\frac{a^2b^2(b^2-a^2)}{2}\sum_{i,j,k=1}^n\frac{\partial}{\partial x_0}\left((T-x_0)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\right)^2\right)+$$
$$\left.+\frac{a^2b^2(b^2-a^2)}{2}\sum_{i,j,k=1}^n\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\right)^2+A^{(2)}u\mathcal{M}u\right)d\mathbf{x}.$$

В силу условий (2) – (4) получим после перехода к норме пространства $L_2(Q)$

$$\Phi(u,\mathcal{M}u)=\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\right\|_{L_2(Q)}^2+(b^2-a^2)\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^2\partial x_i}\right\|_{L_2(Q)}^2+$$
$$+\frac{(b^2-a^2)^2+3a^2b^2}{2}\sum_{i,j=1}^n\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x_0\partial x_i\partial x_j}\right\|_{L_2(Q)}^2+\frac{a^2b^2(b^2-a^2)}{2}\sum_{i,j,k=1}^n\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\right\|_{L_2(Q)}^2+\int_Q A^{(2)}u\mathcal{M}u\,d\mathbf{x}.$$

С помощью неравенства Коши – Буняковского для интеграла $\int_Q A^{(2)} u \mathcal{M} u d\mathbf{x}$ получим оценку сверху

$$\left| \int_Q A^{(2)} u \mathcal{M} u d\mathbf{x} \right| \le c_3 \| u \|_{H^2_{\text{гр}}(Q)} \| u \|_{H^3_{\text{гр}}(Q)} .$$

С учетом этой оценки функционал $\Phi(u, \mathcal{M}u)$ оценивается снизу следующим образом:

$$\Phi(u, \mathcal{M}u) \ge c_4 \| u \|^2_{H^3_{\text{гр}}(Q)} - c_5 \| u \|_{H^2_{\text{гр}}(Q)} \| u \|_{H^3_{\text{гр}}(Q)} . \tag{18}$$

Поскольку $\| \mathcal{M} u \|_{L_2(Q)} \le c_6 \| u \|_{H^3_{\text{гр}}}$, с учетом (12) и (18) получаем

$$\| \boldsymbol{\mathcal{L}} u \|_{L_2(Q)} \ge c_7 \| u \|_{H^3_{\text{гр}}(Q)} - c_8 \| u \|_{H^2_{\text{гр}}(Q)} . \tag{19}$$

К (19) применим неравенство $\| u \|_{H^2(Q)} \le \varepsilon \| u \|_{H^3(Q)} + C \| u \|_{L_2(Q)}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall u \in H^3(Q)$, постоянная C зависит от ε и Q (неравенство из [3, глава X, § 2, лемма 8], которое справедливо и для кусочно-гладких областей D). Получим, что

$$\| \boldsymbol{\mathcal{L}} u \|_{L_2(Q)} \ge c_9 \| u \|_{H^3_{\text{гр}}(Q)} - c_{10} \| u \|_{L_2(Q)} . \tag{20}$$

Проинтегрируем по области $Q^{(\tau)} = (0, \tau) \times \Omega$, $\tau \in (0, T)$, тождество $c_{11} \frac{\partial}{\partial x_0} u^2 = 2 c_{11} u \frac{\partial u}{\partial x_0}$, где c_{11} – некоторая достаточно большая положительная постоянная:

$$\begin{gathered} c_{11} \int_\Omega u^2(\tau, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = 2 c_{11} \int_{Q^{(\tau)}} u \frac{\partial u}{\partial x_0} d\mathbf{x} \le \frac{c_{11}}{\varepsilon} \int_{Q^{(\tau)}} u^2 d\mathbf{x} + \\ + c_{11} \varepsilon \int_{Q^{(\tau)}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 d\mathbf{x} \le \frac{c_{11}}{\varepsilon} \int_{Q^{(\tau)}} u^2 d\mathbf{x} + c_{11} \varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial x_0} \right\|^2_{L_2(Q)} , \end{gathered} \tag{21}$$

где $\varepsilon > 0$. В (21) мы воспользовались неравенством $2 | ab | \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$, $\forall \varepsilon > 0$. Обозначим $v(\tau) = c_{11} \int_\Omega u^2(\tau, \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$. Тогда $c_{11} \int_{Q^{(\tau)}} u^2 d\mathbf{x} = \int_0^\tau v(t) dt$, и неравенство (21) примет вид $v(\tau) \le \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau v(t) dt + c_{11} \varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial x_0} \right\|_{L_2(Q)}$. Сложим его с неравенством (20), выберем ε так, чтобы выполнялось неравенство $c_9 - c_{11} \varepsilon > 0$, и применим неравенство Гронуолла:

$$c_{12} \| u \|_{H^3_{\text{гр}}(Q)} + v(\tau) \le e^{\frac{\tau}{\varepsilon}} (\| \boldsymbol{\mathcal{L}} u \|_{L_2(Q)} + c_{10} \| u \|_{L_2(Q)}) \le e^{\frac{T}{\varepsilon}} \| \boldsymbol{\mathcal{L}} u \|_{L_2(Q)} + e^{\frac{T}{\varepsilon}} c_{10} \| u \|_{L_2(Q)} . \tag{22}$$

Правая часть неравенства (22) не зависит от τ, поэтому в левой его части можно перейти к точной верхней грани по τ. Получим следующее неравенство:

$$c_{12} \| u \|_{H^3_{\text{гр}}(Q)} + c_{11} \sup_{0<\tau<T} \| u \|^2_{L_2(\Omega)} (\tau) \le e^{\frac{T}{\varepsilon}} \| \boldsymbol{\mathcal{L}} u \|_{L_2(Q)} + e^{\frac{T}{\varepsilon}} c_{10} \| u \|_{L_2(Q)},$$

из которого с учетом оценки $\sup_{0<\tau<T} \| u \|^2_{L_2(\Omega)} (\tau) \ge \frac{1}{T} \| u \|^2_{L_2(Q)}$ следует доказываемое неравенство $\| u \|_{H^3_{\text{гр}}(Q)} \le c_{13} \| \boldsymbol{\mathcal{L}} u \|_{L_2(Q)}$ в случае $u \in H^3_{\text{гр}}(Q) \cap H^4(Q)$.

Пусть теперь $u \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\mathcal{L}})$. Тогда $J_k u \in H^3_{\text{гр}}(Q) \cap H^4(Q)$, где J_k – оператор осреднения с переменным шагом [4, 5]. В силу доказанного

$$\| J_k u \|_{H^3_{\text{гр}}(Q)} \le \sup_{v \in H^{4\,\text{гр}}(Q)} \frac{| \Phi(J_k u, v) |}{\| v \|_{L_2(Q)}} . \tag{23}$$

Представим функционал $\Phi(J_k u, v)$ в следующем виде:

$$\Phi(J_k u, v) = \Phi(u, J_k^* v) + K_1(u, v; k) + K_2(u, v; k),$$

где

$$K_1(u,v;k)=\left(\frac{\partial^4}{\partial x_0^4}J_k u-\frac{\partial}{\partial x_0}J_k\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3},v\right)_{L_2(Q)}+(b^2-a^2)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_0^2\partial x_i^2}J_k u-\frac{\partial}{\partial x_i}J_k\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^2\partial x_i},v\right)_{L_2(Q)}-$$

$$-a^2b^2\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_i^2\partial x_j^2}J_k u-\frac{\partial}{\partial x_j}J_k\frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2\partial x_j},v\right)_{L_2(Q)}+(A^{(2)}J_k u-J_k A^{(2)}u,v)_{L_2(Q)},$$

$$K_2(u,v;k)=-\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3},J_k^*\frac{\partial v}{\partial x_0}-\frac{\partial}{\partial x_0}J_k^* v\right)_{L_2(Q)}-(b^2-a^2)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^2\partial x_i},J_k^*\frac{\partial v}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}J_k^* v\right)_{L_2(Q)}+$$

$$+a^2b^2\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2\partial x_j},J_k^*\frac{\partial v}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}J_k^* v\right)_{L_2(Q)}.$$

Здесь мы использовали следующее: для того, чтобы функционал $v\to\Phi(u,v)$ был непрерывным над пространством $L_2(Q)$, должно выполняться условие $J_k\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\Big|_{\Omega^{(0)}}=0,$ а по доказанному ранее $\frac{\partial^3}{\partial x_0^3}J_k u\Big|_{\Omega^{(0)}}=0.$

В силу свойств операторов осреднения J_k и J_k^*

$$K_{1,2}(u,v;k)\le\frac{1}{k}\|u\|_{H^3_{\text{гр}}(Q)}\|v\|_{L_2(Q)}, \tag{24}$$

и

$$\|J_k^* v\|_{L_2(Q)}\le c_{14}\|v\|_{L_2(Q)}. \tag{25}$$

В силу оценок (24), (25) неравенство (23) можно продолжить следующим образом:

$$\|J_k u\|_{H^3_{\text{гр}}(Q)}\le\sup_{v\in H^{4\ \text{гр}}(Q)}\frac{|\Phi(J_k u,v)|}{\|v\|_{L_2(Q)}}\le\sup_{v\in H^{4\ \text{гр}}(Q)}\frac{|\Phi(u,J_k^* v)|}{\|v\|_{L_2(Q)}}+\frac{2}{k}\|u\|_{H^2_{\text{гр}}(Q)}\le$$

$$\le\sup_{v\in H^{4\ \text{гр}}(Q)}\frac{|\Phi(u,J_k^* v)|}{\|J_k^* v\|_{L_2(Q)}}+\frac{2}{k}\|u\|_{H^2_{\text{гр}}(Q)}\le\sup_{v\in H^{4\ \text{гр}}(Q)}\frac{|\Phi(u,v)|}{\|v\|_{L_2(Q)}}+\frac{2}{k}\|u\|_{H^2_{\text{гр}}(Q)}.$$

Переходя в нем к пределу при $k\to\infty$, получаем требуемое неравенство (15). Неравенство (16) доказывается аналогично.

Теорема 2. *Если выполняется условие 1 и* $f\in L_2(Q)$, *то существует единственное обобщенное решение задачи (1) – (4).*

Доказательство. Из теоремы 1 следует единственность обобщенного решения задачи (1) – (4). Оператор $\mathcal{L}$ является замкнутым, поэтому для того, чтобы завершить доказательство теоремы 2, осталось доказать, что $\mathcal{R}(\mathcal{L})=L_2(Q)$. Для этого достаточно показать плотность элементов $\mathcal{L}u$, где $u\in H^4_{\text{гр}}(Q)$, в пространстве $L_2(Q)$.

Пусть элемент $v\in H^{4\ \text{гр}}(Q)$ таков, что при любой функции u из указанного класса $(\mathcal{L}u,v)_{L_2(Q)}=0$. Так как $u\in H^4_{\text{гр}}(Q)$ и $v\in H^{4\ \text{гр}}(Q)$, то в силу формулы (14) $(u,\mathcal{L}'v)_{L_2(Q)}=0$. Следовательно, из неравенства (16) вытекает, что $v=0$ в $H^4(Q)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство однозначной разрешимости задачи (1) – (3), (5) проводится аналогично.

1. Корзюк В.И., Конопелько О.А. // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 68.
2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976.
3. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
4. Burenkov V.I. Sobolev Spaces on Domains. Stuttgart; Leipzig, 1998.
5. Корзюк В.И. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1992. № 3. С. 63.

Поступила в редакцию 15.01.10.

Ольга Анатольевна Конопелько – аспирант кафедры математической физики. Научный руководитель – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики В.И. Корзюк.