УДК 512.542

ЛОКАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ФИТТИНГА И ИНЪЕКТОРЫ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Т. Б. КАРАУЛОВА[1)]

[1)]*Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Московский пр., 33, 210038, г. Витебск, Беларусь*

Произведением $\mathscr{F} \lozenge \mathfrak{X}$ множества Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G и класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ называют множество подгрупп $\{H \leq G : H/H_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{X}\}$. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ и $\mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс всех π'-групп. Пусть также $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^{\pi}$ – класс всех разрешимых групп и класс всех π-разрешимых групп соответственно. В работе доказано, что $\mathscr{F}$-инъектор группы G либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G, когда G – частично разрешимая группа. Описаны главные факторы группы, покрываемые $\mathscr{F}$-инъекторами, в следующих случаях: 1) $G \in \mathscr{F} \lozenge \mathfrak{S}$ и $\mathscr{F}$ – множество Хартли G; 2) $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ и $\mathscr{F} = \mathscr{F} \lozenge \mathfrak{E}_{\pi'}$ для приведенной H-функции f.

Ключевые слова: множество Фиттинга; $\mathscr{F}$-инъектор; функция Хартли; свойство покрытия-изолирования.

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность профессору Н. Т. Воробьеву за постановку задачи и плодотворное обсуждение результатов работы. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф17М-064).

LOCAL FITTING SETS AND THE INJECTORS OF A FINITE GROUP

T. B. KARAULOVA[a]

[a]*P. M. Masherov Vitebsk State University, 33 Maskoŭski Avenue, Vitebsk 210038, Belarus*

The product $\mathscr{F} \lozenge \mathfrak{X}$ of the Fitting set $\mathscr{F}$ of a group G and the Fitting class $\mathfrak{X}$ is called the set of subgroups $\{H \leq G : H/H_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{X}\}$. Let $\mathbb{P}$ be the set of all primes, $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ and $\mathfrak{E}_{\pi'}$ denote the class of all π'-groups. Let $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{S}^{\pi}$ to denote the class of all soluble groups and the class of all π-soluble groups, respectively. In the paper, it is proved that $\mathscr{F}$-injector of a group G either covers or avoids every chief factor of G if G is a partially soluble group. Chief factors of a group covered by $\mathscr{F}$-injectors are described in the following cases: 1) $G \in \mathscr{F} \lozenge \mathfrak{S}$ and $\mathscr{F}$ is the Hartley set of G; 2) $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ and $\mathscr{F} = \mathscr{F} \lozenge \mathfrak{E}_{\pi'}$ for the integrated H-function f.

Key words: Fitting set; $\mathscr{F}$-injector; Hartley function; cover-avoid property.

Acknowledgements. The author would like to express sincere gratitude to professor N. T. Vorob'ev for the formulation of the problem and productive discussion of the results of work. Research is supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (grant No. Ф17М-064).

Образец цитирования:
Караулова ТБ. Локальные множества Фиттинга и инъекторы конечной группы. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;3:29–38.

For citation:
Karaulova TB. Local Fitting sets and the injectors of a finite group. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;3:29–38. Russian.

Автор:
Татьяна Борисовна Караулова – аспирант кафедры алгебры и методики преподавания математики факультета математики и информационных технологий. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Н. Т. Воробьев.

Author:
Tatyana B. Karaulova, postgraduate student at the department of algebra and methods of teaching mathematics, faculty of mathematics and information technology.
tatyana.vasilevich.1992@mail.ru

Введение

Все рассматриваемые в настоящей работе группы конечны. *Секцией* группы G называется фактор-группа ее некоторой подгруппы. Подгруппа V *покрывает* (*изолирует*) секцию H/K группы G, если $H \subseteq VK$ ($V \cap H \subseteq K$) [1, с. 4].

В теории классов Фиттинга Б. Хартли установлено [2, лемма 1], что $\mathfrak{F}$-инъектор V разрешимой группы G либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор G, т. е. $\mathfrak{F}$-инъекторы G обладают свойством покрытия-изолирования. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называют *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Из определения класса Фиттинга следует, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то G имеет единственную максимальную нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу, которую называют $\mathfrak{F}$-*радикалом* G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Подгруппа V группы G называется:

• $\mathfrak{F}$-*максимальной* в G, если $V \in \mathfrak{F}$ и $U = V$ при условии, что $V \leq U \leq G$ и $U \in \mathfrak{F}$;

• $\mathfrak{F}$-*инъектором* G, если $V \cap K$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой K для любой субнормальной подгруппы K группы G.

Б. Хартли в работе [2] была сформулирована проблема описания главных факторов разрешимой группы, покрываемых ее $\mathfrak{F}$-инъекторами [2, с. 204]. Решение было получено для локальных классов Фиттинга вида $\bigcap_p h(p)\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_p$ [2, с. 204, следствие], где h – некоторое отображение множества всех простых чисел во множество классов Фиттинга.

Локализуя понятие класса Фиттинга, Л. А. Шеметков [3] и в разрешимом случае В. Андерсон [4] определили понятие множества Фиттинга группы. Напомним, что непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называют *множеством Фиттинга* G, когда выполняются следующие условия:

• если $T \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$;

• если $S, T \in \mathcal{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$;

• если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Понятия $\mathcal{F}$-инъектора и $\mathcal{F}$-радикала группы G для множества Фиттинга G определяются аналогично, как и понятия $\mathfrak{F}$-инъектора и $\mathfrak{F}$-радикала для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Заметим, что каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ соответствует множество подгрупп $\{H \leq G : H \in \mathfrak{F}\}$ группы G, которое, очевидно, является множеством Фиттинга G, хотя обратное в общем случае неверно [1, пример VIII, 2.2 (с)]. Такое множество Фиттинга обозначают $Tr_{\mathfrak{F}}(G)$ и называют *следом класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *в группе* G. В случае $\mathcal{F} = Tr_{\mathfrak{F}}(G)$ множества $\mathfrak{F}$-инъекторов и $\mathcal{F}$-инъекторов группы G совпадают, а также $G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathcal{F}}$.

Произведением $\mathcal{F} \lozenge \mathfrak{X}$ *множества Фиттинга* $\mathcal{F}$ группы G и *класса Фиттинга* $\mathfrak{X}$ [5, с. 218] называют множество подгрупп $\{H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$. Установлено, что множество $\mathcal{F} \lozenge \mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга группы G [5, свойство 3.1].

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. В частности, если $\pi = \{p\}$, то символом p' обозначим $\{p\}'$. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G называют π-*насыщенным*, если $\mathcal{F} = \mathcal{F} \lozenge \mathfrak{E}_{\pi'}$, где $\mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс всех π'-групп.

Отображение $f : \mathbb{P} \to \{$множества Фиттинга группы $G\}$ называют *функцией Хартли* или коротко – *H-функцией* G [5, с. 218].

Пусть $\mathfrak{N}_p$ – класс всех p-групп и $LFS_\pi(f) = \bigcap_{p \in \pi} f(p) \lozenge \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right)$. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G называется π-*локальным* [5, определение 1.3], если $\mathcal{F} = LFS_\pi(f)$ для некоторой H-функции f группы G. В частности, если $\pi = \mathbb{P}$ ($\pi = \{p\}$), то π-локальное множество Фиттинга называется *локальным* (*p-локальным*) соответственно.

Пусть $HS(h) = \bigcap_{p \in \pi} h(p) \lozenge \left(\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p\right)$, где h – H-функция группы G. Следуя [2], множество Фиттинга $\mathcal{H}$ группы G назовем *множеством Хартли* G, если $\mathcal{H} = HS(h)$ для некоторой H-функции h группы G. При этом h называют H-функцией G, определяющей локально множество Хартли $\mathcal{H}$ группы G. Нами установлено, что каждое множество Хартли группы G является π-локальным множеством Фиттинга группы G, и показано, что обратное в общем случае неверно (см. предложение 1).

Пусть h – H-функция группы G, которая определяет локально множество Хартли $\mathcal{H}$ группы G. Тогда h назовем:

• *приведенной*, если $h(p) \subseteq \mathcal{H}$ для всех $p \in \pi$;

• *устойчивой*, если $h(p) \subseteq h(q) \lozenge \mathfrak{E}_{q'}$ для всех различных p, $q \in \pi$;

• *устойчивой приведенной*, если h является одновременно устойчивой и приведенной.

Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G. Символом $\sigma(\mathcal{F})$ будем обозначать множество всех простых делителей всех $\mathcal{F}$-подгрупп G, символом $\mathfrak{S}^{\pi}$ – класс всех π-разрешимых групп. В частности, если $\pi = \mathbb{P}$, то символом $\mathfrak{S}$ будем обозначать класс всех разрешимых групп.

В работе [5] было получено обобщение известных теорем Гашюца – Фишера – Хартли [6] и Шеметкова – Андерсона [3; 4] о существовании и сопряженности инъекторов группы.

Доказано [5, теорема A, (1), (2)], что если $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G, то G обладает единственным классом сопряженных $\mathcal{F}$-инъекторов в каждом из следующих случаев:

а) $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F} \lozenge \mathfrak{E}_{\pi'}$;

б) $\pi = \sigma(\mathcal{F})$ и $G \in \mathcal{F} \lozenge \mathfrak{S}^{\pi}$.

В связи с этим естественной является постановка следующих вопросов:

1. Верно ли, что $\mathcal{F}$-инъекторы группы G обладают свойством покрытия-изолирования в каждом из указанных выше случаев а) и б)?

2. Если $\mathcal{F}$-инъекторы G обладают свойством покрытия-изолирования, то каковы главные факторы G, покрываемые $\mathcal{F}$-инъекторами?

Основные результаты работы представлены двумя теоремами. Первая из них дает ответ на вопрос 1.

Теорема 1. *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathcal{F}$ *– множество Фиттинга группы G. Тогда $\mathcal{F}$-инъекторы группы G обладают свойством покрытия-изолирования в каждом из следующих случаев:*

(1) $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ *и* $\mathcal{F} \lozenge \mathfrak{E}_{\pi'} = \mathcal{F}$*;*

(2) $\pi = \sigma(\mathcal{F})$ *и* $G \in \mathcal{F} \lozenge \mathfrak{S}^{\pi}$.

Решение вопроса 2 и проблемы Хартли о факторах, покрываемых инъекторами, для случая π-локальных множеств Фиттинга частично разрешимых групп представляет вторая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ *и* $\mathcal{F}$ *–* π*-локальное множество Фиттинга группы G, определяемое H-функцией f. Тогда $\mathcal{F}$-инъектор G покрывает все такие главные p-факторы (p* $\in \pi$*), которые покрывает ее* $f(p)$*-радикал в каждом из следующих случаев:*

(1) $G \in \mathcal{F} \lozenge \mathfrak{S}$ *и* $\mathcal{F}$ *– множество Хартли G;*

(2) $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$, $\mathcal{F}$ π*-насыщенно и f – приведенная H-функция.*

Предварительные сведения

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то их произведением называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что произведение двух любых классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [1, IX, (1.12) (a)]. Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Подгруппа H группы G называется *холловой* π*-подгруппой* группы G, если $|H|$ является π-числом, а индекс $|G : H|$ – π'-числом. Группа G называется *p-нильпотентной*, если G имеет нормальную холлову p'-подгруппу, и π*-нильпотентной*, если G p-нильпотентна для всех $p \in \pi$.

В качестве лемм приведем ряд известных утверждений, которые будем использовать для доказательства теорем 1 и 2.

Лемма 1 [5, теорема A, (1), (2)]. *Пусть* $\mathcal{F}$ *– множество Фиттинга группы G* и $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. *Тогда в группе G существуют $\mathcal{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в каждом из следующих случаев:*

(1) $\pi = \sigma(\mathcal{F})$ *и* $G \in \mathcal{F} \lozenge \mathfrak{S}^{\pi}$*;*

(2) $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$, $\mathcal{F} \lozenge \mathfrak{E}_{\pi'} = \mathcal{F}$ *и индекс каждого $\mathcal{F}$-инъектора G в группе G является* π*-числом.*

Лемма 2 [1, VIII, (2.4) (d)]. *Пусть* $\mathcal{F}$ *– множество Фиттинга группы G. Если N – субнормальная подгруппа G, то* $N_{\mathcal{F}} = N \cap G_{\mathcal{F}}$.

Лемма 3. *Пусть* $\mathcal{F}$ *– множество Фиттинга группы G:*

(1) если V – $\mathcal{F}$-инъектор G, то $G_{\mathcal{F}} \leq V$*;*

(2) если V – $\mathcal{F}$-инъектор G, то V является $\mathcal{F}$-максимальной подгруппой G;

(3) если V – $\mathcal{F}$-максимальная подгруппа G и $V \cap N$ *– $\mathcal{F}$-инъектор N для любой максимальной нормальной подгруппы N группы G, то V – $\mathcal{F}$-инъектор G;*

(4) если $N \trianglelefteq G$ *и V – $\mathcal{F}$-инъектор N, то* V^g *– $\mathcal{F}$-инъектор N для всех* $g \in G$*;*

(5) если K – субнормальная подгруппа G и V – $\mathcal{F}$-инъектор группы G, то $V \cap K$ *является $\mathcal{F}$-инъектором K.*

Лемма 3 следует непосредственно из определений множества Фиттинга и $\mathcal{F}$-инъектора группы G.

Лемма 4 [5, свойства 3.1, 3.2 (1), (2), 3.3]. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G, $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга и $H \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \Diamond \mathfrak{X}$;

(2) произведение $\mathcal{F} \Diamond \mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга группы G;

(3) $\left(H/H_{\mathcal{F}}\right)_{\mathfrak{X}} = H_{\mathcal{F} \Diamond \mathfrak{X}}/H_{\mathcal{F}}$;

(4) если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ – непустые классы Фиттинга, то $\left(\mathcal{F} \Diamond \mathfrak{X}_1\right) \Diamond \mathfrak{X}_2 = \mathcal{F} \Diamond \left(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2\right)$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называют *гомоморфом*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ следует $G/N \in \mathfrak{F}$. Гомоморф $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если из $H/A \in \mathfrak{F}$ и $H/B \in \mathfrak{F}$ следует $H/A \bigcap B \in \mathfrak{F}$.

Лемма 5 [5, свойство 3.4]. *Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ – множества Фиттинга группы G. Тогда:*

(1) если $\mathfrak{X}$ является одновременно непустым классом Фиттинга и гомоморфом, то из $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ следует $\mathcal{F}_1 \Diamond \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}_2 \Diamond \mathfrak{X}$;

(2) если $\mathfrak{X}$ – непустая формация Фиттинга, то $\left(\mathcal{F}_1 \bigcap \mathcal{F}_2\right) \Diamond \mathfrak{X} = \left(\mathcal{F}_1 \Diamond \mathfrak{X}\right) \bigcap \left(\mathcal{F}_2 \Diamond \mathfrak{X}\right)$;

(3) если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ – непустые классы Фиттинга, то $\mathcal{F} \Diamond \left(\mathfrak{X}_1 \bigcap \mathfrak{X}_2\right) = \left(\mathcal{F} \Diamond \mathfrak{X}_1\right) \bigcap \left(\mathcal{F} \Diamond \mathfrak{X}_2\right)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Наименьшую нормальную подгруппу $G^{\mathfrak{F}}$ группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, называют *$\mathfrak{F}$-корадикалом G*.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, $\mathfrak{H}$ – класс групп. *Корадикальным произведением $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ формации $\mathfrak{F}$ и класса групп $\mathfrak{H}$* [1, определение IV, (1.7)] называют класс $\left\{G \in \mathfrak{E} : G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\right\}$.

Лемма 6 [1, теорема IV, (1.8) (a), (b)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые формации. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ для каждой группы G;

(2) $G^{\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}} = \left(G^{\mathfrak{F}}\right)^{\mathfrak{H}}$.

Напомним, что максимальная нормальная π-подгруппа (максимальная нормальная π'-подгруппа) G называется *π-радикалом G* (*π'-радикалом G*) и обозначается $G_{\mathfrak{E}_\pi}$ ($G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$). Группа G называется *π-замкнутой*, если она содержит нормальную холлову π-подгруппу. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс всех π-замкнутых групп, т. е. $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$. Тогда $\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$-радикал группы G называют π-замкнутым радикалом G, а $\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$-инъектор G – π-замкнутым инъектором G. Следующее утверждение вытекает непосредственно из теоремы B (1) [5].

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимый класс Фиттинга p-замкнутых групп. Тогда $\mathfrak{F}$-инъекторы разрешимой группы G характеризуются следующим образом: подгруппа V – $\mathfrak{F}$-инъектор G, если $V/G_{\mathfrak{N}_p}$ – p'-холлова подгруппа G.*

Лемма 8 [7, теорема 2.4.27]. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $G \in \mathcal{F} \Diamond \mathfrak{S}$. Тогда в G существуют $\mathcal{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

О свойстве покрытия-изолирования инъекторов

Лемма 9. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Если $K \trianglelefteq G$ и V – $\mathcal{F}$-инъектор G, то $N_G\left(V \bigcap K\right)K = G$ в каждом из следующих случаев:*

(1) $G \in \mathfrak{S}^\pi$ и $\mathcal{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга группы G;

(2) $G \in \mathcal{F} \Diamond \mathfrak{S}^\pi$, где $\pi = \sigma\left(\mathcal{F}\right)$.

Доказательство. (1) Ввиду утверждения (5) леммы 3 $V \bigcap K$ – $\mathcal{F}$-инъектор K. Поскольку $K \in \mathfrak{S}^\pi$ и $\mathcal{F} \Diamond \mathfrak{E}_{\pi'} = \mathcal{F}$, по утверждению (2) леммы 1 любые два $\mathcal{F}$-инъектора сопряжены в K. Тогда если $x \in G$, то $V \bigcap K$ и $\left(V \bigcap K\right)^x$ сопряжены в K. Следовательно, существует такой элемент $k \in K$, что $xk \in N_G\left(V \bigcap K\right)$. Отсюда $x \in N_G\left(V \bigcap K\right)K$ и $N_G\left(V \bigcap K\right)K = G$.

Доказательство леммы в случае (2) аналогично доказательству в случае (1). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. (1) Пусть V – $\mathcal{F}$-инъектор группы G. Так как G – π-разрешимая группа, то главный фактор H/K есть либо элементарная абелева p-группа для некоторого $p \in \pi$, либо π'-группа. Пусть H/K – элементарная абелева p-группа. Тогда $K\left(V \bigcap H\right) \trianglelefteq H$ и по утверждению (1) леммы 9 $K\left(V \bigcap H\right) \trianglelefteq G$. Значит, $K\left(V \bigcap H\right) = H$ или $\left(V \bigcap H\right)K = K$ и V либо покрывает, либо изолирует H/K.

Так как группа G π-разрешима и $\mathcal{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга G, то по утверждению (2) леммы 1 индекс $\mathcal{F}$-инъекторов G в группе G является π-числом. Следовательно, если V – $\mathcal{F}$-инъектор G, то существует холлова π'-подгруппа G такая, что $G_{\pi'} \leq V$. Пусть $H/K \in \mathfrak{E}_{\pi'}$. Тогда $H = G_{\pi'}K$ и $H \leq VK$, т. е. V покрывает H/K.

(2) Пусть $G \in \mathscr{F} \lozenge \mathfrak{S}^{\pi}$ и $\pi = \sigma(\mathscr{F})$. Рассмотрим главный ряд группы G на участке от $G_{\mathscr{F}}$ до G, т. е. ряд $G_1 = G_{\mathscr{F}} \le \ldots \le G_{t-1} \le G_t = G$, где G_i/G_{i-1} – либо нильпотентная π-группа, либо π'-группа для $i \in \{1, \ldots, t\}$. По утверждению (1) леммы 1 в группе G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы. Поэтому если V – $\mathscr{F}$-инъектор G, то по утверждению (5) леммы 3 $V^x \cap G_{i-1}$ – $\mathscr{F}$-инъектор G_{i-1}. Так как по утверждению (1) леммы 1 $\mathscr{F}$-инъекторы группы G_{i-1} сопряжены, то $V^x \cap G_{i-1} = V^k \cap G_{i-1}$, $k \in G_{i-1}$. Тогда $xk^{-1} \in N_G(V \cap G_{i-1})$ и $(V \cap G_{i-1})^{xk^{-1}} = V \cap G_{i-1}$. Отсюда по утверждению (2) леммы 9 $G = N_G(V \cap G_{i-1})G_{i-1}$ и подгруппа $(V \cap G_{i-1})G_i$ нормальна в G. Поэтому $(V \cap G_{i-1})G_i = VG_i \cap G_{i-1}$ совпадает либо с G_i, либо с G_{i-1} и $\mathscr{F}$-инъектор V либо изолирует, либо покрывает главный фактор G_i/G_{i-1}.

Рассмотрим теперь участок главного ряда группы G от 1 до $G_{\mathscr{F}}$. Ввиду утверждения (1) леммы 3 для каждого главного фактора R/S такого ряда справедливо: $VS \ge V \ge G_{\mathscr{F}} \ge R$. Следовательно, V покрывает R/S.

Следствие 1 [3, теорема 2.3.2]. *Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга группы G и G π-разрешима, где $\pi = \sigma(\mathscr{F})$. Если H – $\mathscr{F}$-инъектор группы G, то H либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G.*

Множества Хартли и множества Фиттинга

Пусть h – H-функция группы G и $HS(h) = \bigcap_{p \in \pi} h(p) \lozenge (\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p)$. Напомним, что множество Фиттинга $\mathscr{H}$ – множество Хартли G, если $\mathscr{H} = HS(h)$.

Лемма 10. *Каждое множество Хартли группы G определяется приведенной H-функцией.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{H} = HS(h_1)$. Тогда $\mathscr{H} = \bigcap_{p \in \pi} h_1(p) \lozenge (\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p)$ для H-функции h_1 группы G. Определим H-функцию h группы G следующим образом: $h(p) = h_1(p) \cap \mathscr{H}$ для всех $p \in \pi$. Покажем, что $\mathscr{H} = HS(h)$.

Так как $\mathscr{H} = HS(h_1)$, то

$$HS(h) = \left(\bigcap_{p \in \pi} h_1(p) \lozenge (\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p)\right) \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} \mathscr{H} \lozenge (\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p)\right) = \mathscr{H} \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} \mathscr{H} \lozenge (\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p)\right).$$

Следовательно, ввиду утверждений (2) и (3) леммы 5 $HS(h) = \mathscr{H} \cap \mathscr{H} \lozenge \left(\bigcap_{p \in \pi} \mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p\right) = \mathscr{H}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathscr{H}$ – непустое множество подгрупп группы G. Следуя [1, определение II, (1.3)], для $\mathscr{H}$ и непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ определим множество подгрупп $\mathscr{H}\mathfrak{F} = \{H \le G : L \trianglelefteq H,\ L \in \mathscr{H} \text{ и } H/L \in \mathfrak{F}\}$ и назовем его *произведением множества $\mathscr{H}$ и класса Фиттинга $\mathfrak{F}$*.

Замечание 1. Если $\mathscr{H}$ – множество Фиттинга группы G и $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то, очевидно, $\mathscr{H} \lozenge \mathfrak{F} \subseteq \mathscr{H}\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}$ – гомоморф. Тогда если $H \le G$ и $H \in \mathscr{H}\mathfrak{F}$, то $H/L \in \mathfrak{F}$ для некоторой нормальной $\mathscr{H}$-подгруппы L группы H. Так как $L \le H_{\mathscr{H}}$ и $H/L/H_{\mathscr{H}}/L \cong H/H_{\mathscr{H}} \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathscr{H} \lozenge \mathfrak{F}$ и $\mathscr{H} \lozenge \mathfrak{F} = \mathscr{H}\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathscr{X}$ – непустое множество подгрупп группы G. Через $Fitset\,\mathscr{X}$ будем обозначать наименьшее множество Фиттинга группы G, содержащее $\mathscr{X}$ [1, определение VIII, 3.1 (b)].

Лемма 11. *Каждое множество Хартли определяется устойчивой приведенной H-функцией.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{H}$ – множество Хартли группы G. По лемме 10 $\mathscr{H} = HS(h_1)$ для некоторой приведенной H-функции h_1.

Определим для каждого $p \in \pi$ множество подгрупп группы G следующим образом:

$$\overline{h_1}(p) = \left\{H \le G : H \text{ сопряжена с } R^{\mathfrak{E}_{p'}} \text{ в } G \text{ для некоторой подгруппы } R \in h_1(p)\right\}.$$

Заметим, что если $H \in \overline{h_1}(p)$, то $H \in h_1(p)$, и поэтому $\overline{h_1}(p) \subseteq h_1(p)$ для всех $p \in \pi$.

Предположим, что $X \in \overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Тогда X имеет нормальную подгруппу $K \in \overline{h_1}(p)$ такую, что $X/K \in \mathfrak{E}_{p'}$. Поскольку $\overline{h_1}(p) \subseteq h_1(p)$, то $K \le X_{h_1(p)}$. Следовательно, $X/X_{h_1(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}$ и $X \in h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}$ ввиду изоморфизма $X/K/X_{h_1(p)}/K \cong X/X_{h_1(p)}$. Значит, $\overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'} \subseteq h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}$.

С другой стороны, пусть $Y \in h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Тогда $Y/Y_{h_1(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}$ и $Y^{\mathfrak{E}_{p'}} \leq Y_{h_1(p)}$. Следовательно, $Y^{\mathfrak{E}_{p'}} \in h_1(p)$. Поскольку $\left(Y^{\mathfrak{E}_{p'}}\right)^{\mathfrak{E}_{p'}} = Y^{\mathfrak{E}_{p'}}$ и подгруппа $Y^{\mathfrak{E}_{p'}}$ сопряжена $Y^{\mathfrak{E}_{p'}}$ в группе G, то $Y^{\mathfrak{E}_{p'}} \in \overline{h_1}(p)$. Значит, $Y \in \overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Таким образом, справедливо равенство

$$\overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'} = h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}. \tag{1}$$

Пусть h – H-функция такая, что $h(p) = Fitset\left(\overline{h_1}(p)\right)$ для всех $p \in \pi$. Докажем, что $HS(h) = \mathscr{H}$. Так как $\overline{h_1}(p) \subseteq h_1(p)$, то $h(p) = Fitset\left(\overline{h_1}(p)\right) \subseteq Fitset\left(h_1(p)\right) = h_1(p)$ и $h(p) \subseteq h_1(p)$. Следовательно, ввиду утверждения (1) леммы 5 $h(p)\mathfrak{E}_{p'} \subseteq h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Заметим, что в силу утверждения (4) леммы 4 $\left(h(p)\mathfrak{E}_{p'}\right)\mathfrak{N}_p = h(p)\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\right)$ и $\left(h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}\right)\mathfrak{N}_p = h_1(p)\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\right)$. Таким образом, $h(p)\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\right) \subseteq h_1(p)\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\right)$ для всех $p \in \pi$ и $HS(h) \subseteq \mathscr{H}$. В силу (1) получаем $h_1(p)\mathfrak{E}_{p'} = Fitset\left(\overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'}\right)$. Поскольку $\overline{h_1}(p) \subseteq Fitset\left(\overline{h_1}(p)\right)$, то по утверждению (1) леммы 5 $\overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'} \subseteq Fitset\left(\overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'}\right)$. Поэтому $Fitset\left(\overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'}\right) \subseteq Fitset\left(\overline{h_1}(p)\right)\mathfrak{E}_{p'}$ и для каждого $p \in \pi$ справедливо включение

$$\overline{h_1}(p)\mathfrak{E}_{p'} \subseteq h(p)\mathfrak{E}_{p'}. \tag{2}$$

Далее с учетом утверждения (4) леммы 4 и утверждения (1) леммы 5 получаем включение $h_1(p)\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\right) \subseteq h(p)\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\right)$. Следовательно, $\mathscr{H} \subseteq HS(h)$ и $\mathscr{H} = HS(h)$.

Так как H-функция h_1 является приведенной H-функцией $\mathscr{H}$ и $\overline{h_1}(p) \subseteq h_1(p)$ для каждого $p \in \pi$, то $h(p) \subseteq \mathscr{H}$ для всех $p \in \pi$. Следовательно, h – приведенная H-функция $\mathscr{H}$.

Остается показать, что $h(p) \subseteq h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для всех различных p, $q \in \pi$. Пусть X_1 – произвольная подгруппа в $h_1(p)$ и $p \neq q$. Так как h_1 – приведенная H-функция, то $X_1 \in \mathscr{H}$, и поэтому $X_1 \in h_1(q)\left(\mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{N}_q\right)$. Ввиду утверждения (4) леммы 4 справедливо равенство $h_1(q)\left(\mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{N}_q\right) = \left(h_1(q)\mathfrak{E}_{q'}\right)\mathfrak{N}_q$. Следовательно, $X_1^{\mathfrak{N}_q} \in h_1(q)\mathfrak{E}_{q'}$. Поскольку $p \neq q$, по утверждению (1) леммы 6 $X_1^{\mathfrak{E}_{p'}} \leq X_1^{\mathfrak{N}_q}$. Следовательно, $X_1^{\mathfrak{E}_{p'}} \in h_1(q)\mathfrak{E}_{q'}$. Тогда, ввиду включения (2), $X_1^{\mathfrak{E}_{p'}} \in h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для каждой подгруппы X_1 из $h_1(p)$ и различных простых p и q из π.

Пусть $R \in \overline{h_1}(p)$. Тогда, по определению множества $\overline{h_1}(p)$, подгруппа R сопряжена с $S^{\mathfrak{E}_{p'}}$ для некоторой подгруппы $S \in h_1(p)$. Поэтому $R \in h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ и $h_1(p) \subseteq h(q)\mathfrak{E}_{q'}$. Таким образом, $h(p) = Fitset\left(\overline{h_1}(p)\right) \subseteq Fitset\left(h(q)\mathfrak{E}_{q'}\right) = h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для всех различных простых p и q из π. Лемма доказана.

Напомним, что ввиду [5], если $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и G – группа, то множество Фиттинга $\mathscr{F}$ называется π-локальным, если $\mathscr{F} = LFS_\pi(f)$ для некоторой H-функции f группы G, т. е. $\mathscr{F} = \bigcap_{p \in \pi} f(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right)$. При этом локальную H-функцию f группы G π-локального множества Фиттинга $\mathscr{F}$ называют *полной*, если $f(p) \Diamond \mathfrak{N}_p = f(p)$ для каждого $p \in \pi$.

Лемма 12. *Каждое π-локальное множество Фиттинга группы G определяется полной приведенной H-функцией.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F} = \bigcap_{p \in \pi} f(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right)$ для некоторой H-функции f. Определим H-функцию φ следующим образом: $\varphi(p) = f(p) \cap \mathscr{F}$. Ввиду леммы 5 имеем

$$\bigcap_{p \in \pi} \varphi(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right) = \bigcap_{p \in \pi} \left(f(p) \cap \mathscr{F}\right) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right) = \bigcap_{p \in \pi} \left(f(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right)\right) \cap \left(\mathscr{F} \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right)\right) =$$

$$= \left(\bigcap_{p \in \pi} f(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right)\right) \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} \mathscr{F} \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right)\right) = \mathscr{F} \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} \mathscr{F} \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right)\right) = \mathscr{F}.$$

Теперь пусть $\psi(p) = \varphi(p) \Diamond \mathfrak{N}_p$. Очевидно, что ψ – полная H-функция, которая определяет множество Фиттинга $\mathscr{F}$. Покажем, что ψ – приведенная H-функция. Пусть $L \leq G$ и $L \in \psi(p) = \varphi(p) \Diamond \mathfrak{N}_p$.

Тогда $L \in \varphi(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right)$. Если q – любое простое число из π и $q \neq p$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{E}_{q'}$, и, следовательно, $L^{\mathfrak{E}_{q'}} \subseteq L^{\mathfrak{N}_p} \in \varphi(p) \subseteq \mathcal{F}$. Значит, $\left(L^{\mathfrak{E}_{q'}}\right)^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} \in \varphi(q)$. Используя утверждение (2) леммы 6, получаем $\left(L^{\mathfrak{E}_{q'}}\right)^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} = L^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'} \mathfrak{E}_{q'}} = L^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} \in \varphi(q)$. Тогда, ввиду изоморфизма $L/L_{\varphi(q)} \cong L/L^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}}/L_{\varphi(q)}/L^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}}$, $L/L_{\varphi(q)} \in \mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}$.

Следовательно, $L \in \varphi(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right)$ для всех простых p из π и $L \in \mathcal{F}$. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathcal{X}$ *– множество Фиттинга группы* G. *Тогда* $\mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}\right)$ *является* π*-локальным множеством Фиттинга группы* G.

Доказательство. Так как $\mathcal{X}$ – множество Фиттинга группы G, то по утверждению (2) леммы 4 произведение $\mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}\right)$ является также множеством Фиттинга группы G.

Покажем, что множество $\mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}\right)$ π-локально, т. е. $\mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}\right) = LFS_\pi(f)$ для некоторой H-функции f группы G. Для этого определим функцию f следующим образом: $f(p) = \mathcal{X} \Diamond \mathfrak{E}_\pi$ для всех $p \in \pi$.

Пусть $\pi = \mathbb{P}$. Тогда $\mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}\right) = \mathcal{X} \Diamond \mathfrak{E}$.

В силу утверждения (4) леммы 4 имеем $LFS_\pi(f) = \bigcap_{p \in \pi} f(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right) = \bigcap_{p \in \pi} (\mathcal{X} \Diamond \mathfrak{E}) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right) = \bigcap_{p \in \pi} \mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E} \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right) = \bigcap_{p \in \pi} \mathcal{X} \Diamond \mathfrak{E} = \mathcal{X} \Diamond \mathfrak{E}$ и множество $\mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}\right)$ в этом случае π-локально.

Пусть $\varnothing \neq \pi \subset \mathbb{P}$. Тогда по утверждению (4) леммы 4 получаем $LFS_\pi(f) = \bigcap_{p \in \pi} f(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right) = \bigcap_{p \in \pi} (\mathcal{X} \Diamond \mathfrak{E}_\pi) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right) = \bigcap_{p \in \pi} \mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right) = \bigcap_{p \in \pi} \mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{p'}\right) = \bigcap_{p \in \pi} (\mathcal{X} \Diamond \mathfrak{E}_\pi) \Diamond \mathfrak{E}_{p'} = (\mathcal{X} \Diamond \mathfrak{E}_\pi) \Diamond \bigcap_{p \in \pi} \mathfrak{E}_{p'} = (\mathcal{X} \Diamond \mathfrak{E}_\pi) \Diamond \mathfrak{E}_{\pi'} = \mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E}_\pi \Diamond \mathfrak{E}_{\pi'}\right)$. Следовательно, множество $\mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}\right)$ является π-локальным для любого непустого множества простых чисел π. Лемма доказана.

Следствие 2. *Пусть* $\mathcal{X}$ *– множество Фиттинга группы* G. *Тогда* $\mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p\right)$ *является* p*-локальным множеством Фиттинга группы* G *для каждого* $p \in \pi$.

Доказательство. Если $\pi = \mathbb{P} \backslash \{p\}$, то $\pi' = \{p\}$ для $p \in \pi$ и $\mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}\right) = \mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p\right)$. Следовательно, множество Фиттинга $\mathcal{X} \Diamond \left(\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p\right)$ группы G является p-локальным.

Лемма 14. *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. *Тогда пересечение любого множества* π*-локальных множеств Фиттинга группы* G *является* π*-локальным множеством Фиттинга группы* G.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$, где $\mathcal{F}_i$ – π-локальное множество Фиттинга группы G. Тогда для каждого $i \in I$ множество $\mathcal{F}_i = LFS_\pi(f_i)$ для некоторой H-функции f_i группы G. Построим H-функцию f группы G следующим образом: $f(p) = \bigcap_{i \in I} f_i(p)$ для каждого $p \in \pi$.

Покажем, что $\mathcal{F} = LFS_\pi(f)$. Так как $f(p) \subseteq f_i(p)$ для всех простых $p \in \pi$, то по утверждению (1) леммы 5 $f(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right) \subseteq f_i(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right)$ для всех $i \in I$ и $p \in \pi$. Следовательно, $\bigcap_{p \in \pi} f(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{p \in \pi} f_i(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right)\right) = \mathcal{F}$ и $LFS_\pi(f) \subseteq \mathcal{F}$.

Докажем обратное включение: $\mathcal{F} \subseteq LFS_\pi(f)$. Пусть $L \leq G$ и $L \in \mathcal{F}$. Тогда $L \in \bigcap_{p \in \pi} f_i(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right)$ и $L^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}} \in f_i(p)$ для всех $i \in I$ и $p \in \pi$. Следовательно, $L^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}} \in \bigcap_{i \in I} f_i(p) = f(p)$ и $L \in \bigcap_{p \in \pi} f(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}\right) = LFS_\pi(f)$. Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ *и* $\mathcal{H}$ *– множество Хартли группы* G, *где* $G \in \mathcal{H} \Diamond \mathfrak{S}$. *Если* V *–* $\mathcal{H}$*-инъектор группы* G, *то* $V_{h(p)} = G_{h(p)}$ *для всех* $p \in \pi$.

Доказательство. По лемме 11 $G_\mathcal{H} \subseteq V$ и $h(p) \subseteq \mathcal{H}$. Поскольку $V_{h(p)} \cap G_\mathcal{H} = \left(G_\mathcal{H}\right)_{h(p)} = G_{h(p) \cap \mathcal{H}} = G_{h(p)}$, то $\left[V_{h(p)}, G_\mathcal{H}\right] \leq V_{h(p)} \cap G_\mathcal{H} = G_{h(p)}$ и $V_{h(p)} \leq C_G\left(G_\mathcal{H}/G_{h(p)}\right)$ для всех $p \in \pi$. Пусть $C = C_G\left(G_\mathcal{H}/G_{h(p)}\right)$. Для доказательства равенства $V_{h(p)} = G_{h(p)}$ достаточно показать, что $C \subseteq G_\mathcal{H}$.

Предположим, что включение неверно. Тогда $C/C \cap G_{\mathscr{H}}$ – нетривиальная группа. Так как $C \cap G_{\mathscr{H}} \trianglelefteq G$, то можно рассмотреть нормальный ряд $1 \trianglelefteq C \cap G_{\mathscr{H}} \trianglelefteq K \trianglelefteq C \trianglelefteq G$. Тогда существует нормальная подгруппа K группы G, содержащаяся в C, такая, что $K/C \cap G_{\mathscr{H}}$ – нетривиальный главный фактор группы G. Очевидно, что $K \cap G_{\mathscr{H}} = C \cap G_{\mathscr{H}}$ и $K/C \cap G_{\mathscr{H}} = K/K \cap G_{\mathscr{H}}$. Так как группа $G/G_{\mathscr{H}}$ разрешима, то ввиду изоморфизма $KG_{\mathscr{H}}/G_{\mathscr{H}} \cong K/K \cap G_{\mathscr{H}}$ главный фактор $K/K \cap G_{\mathscr{H}}$ является элементарной абелевой p-группой для $p \in \pi$. Значит, $\left(K/K \cap G_{\mathscr{H}}\right)' = 1$ и $\left(K/K \cap G_{\mathscr{H}}\right)' = K'\left(K \cap G_{\mathscr{H}}\right)/\left(K \cap G_{\mathscr{H}}\right) = 1$. Поэтому $K'\left(K \cap G_{\mathscr{H}}\right) = K \cap G_{\mathscr{H}}$ и $K' \subseteq K \cap G_{\mathscr{H}}$. Поскольку $K \subseteq C_G\left(G_{\mathscr{H}}/G_{h(p)}\right)$, получаем $K \subseteq C_G\left(K \cap G_{\mathscr{H}}/G_{h(p)}\right)$ и $\left[K', K\right] \subseteq \left[K \cap G_{\mathscr{H}}, K\right] \subseteq G_{h(p)}$. Следовательно, $\left[\left(K \cap G_{h(p)}\right)', K/G_{h(p)}\right] = 1$ и $K/G_{h(p)}$ – группа нильпотентной длины 2. Значит, $K/G_{h(p)}$ имеет нетривиальную нормальную силовскую p-подгруппу $P/G_{h(p)}$. Очевидно, что $P \trianglelefteq G$ и P покрывает p-главный фактор $K/K \cap G_{\mathscr{H}}$, т. е. $P\left(K \cap G_{\mathscr{H}}\right) \supseteq K$. Следовательно, $PG_{\mathscr{H}} = KG_{\mathscr{H}}$.

Так как $P/G_{h(p)} \in \mathfrak{N}_p$, то $P \in h(p) \Diamond \mathfrak{N}_p \subseteq \mathscr{H}$ для всех $p \in \pi$ и $P \in \mathscr{H}$. Поскольку $P \in \mathscr{H}$, то $PG_{\mathscr{H}} = KG_{\mathscr{H}} \in \mathscr{H}$, и, следовательно, $KG_{\mathscr{H}} \subseteq G_{\mathscr{H}}$. Отсюда $KG_{\mathscr{H}}/G_{\mathscr{H}} \cong K/K \cap G_{\mathscr{H}} = 1$. Последнее противоречит тому, что фактор $KG_{\mathscr{H}}/G_{\mathscr{H}}$ нетривиален, и, значит, $C \subseteq G_{\mathscr{H}}$. Лемма доказана.

Предложение 1. *Пусть $\mathscr{H}$ – множество Хартли группы G. Справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathscr{H}$ является π-локальным множеством Фиттинга G;

(2) существуют π-локальные множества Фиттинга G, которые не являются множествами Хартли G.

Доказательство. (1) Пусть $\mathscr{H} = \bigcap_{p \in \pi} h(p) \Diamond \left(\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p\right)$. Ввиду следствия 1 множество $h(p) \Diamond \left(\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p\right)$ является π-локальным множеством Фиттинга группы G для любого $p \in \pi$. Тогда по лемме 14 $\mathscr{H}$ – π-локальное множество Фиттинга группы G.

(2) Пусть множество Фиттинга $\mathscr{H} = Tr_{\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}}(G)$, где $G \in \mathfrak{S}$. Покажем вначале, что множество Фиттинга $\mathscr{H}$ локально. Пусть $LFS(h) = \bigcap_p h(p) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}\right)$ для H-функции h такой, что $h(p) = Tr_{\mathfrak{N}_p}(G)$ и $h(q) = \mathscr{H}$ для всех простых $q \neq p$. Тогда $LFS(h) = Tr_{\mathfrak{N}_p}(G) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}\right) \cap \left(\bigcap_{q \neq p} \mathscr{H} \Diamond \left(\mathfrak{N}_q \mathfrak{S}_{q'}\right)\right)$. Заметим, что подгруппа $R \in Tr_{\mathfrak{N}_p}(G) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}\right)$ тогда и только тогда, когда $R/R_{Tr_{\mathfrak{N}_p}(G)} = R/R_{\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}$, т. е. $R \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}$. Следовательно, $Tr_{\mathfrak{N}_p}(G) \Diamond \left(\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}\right) = Tr_{\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}}(G)$. Значит, ввиду утверждения (3) леммы 5 и утверждения (1) леммы 3 $LFS(h) = \mathscr{H} \cap \mathscr{H} \Diamond \left(\bigcap_{q \neq p} \mathfrak{N}_q \mathfrak{S}_{q'}\right) = \mathscr{H}$ и множество Фиттинга $\mathscr{H}$ локально.

Предположим, что $\mathscr{H}$ – множество Хартли группы G. Тогда по лемме 10 $\mathscr{H} = \bigcap_p h_1(p) \Diamond \left(\mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{N}_p\right)$ для некоторой приведенной H-функции h_1. Так как $G \in \mathfrak{S}$, то по лемме 8 в G существуют $\mathscr{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Пусть V – $\mathscr{H}$-инъектор группы G. Поскольку $V \in \mathscr{H}$, то $V/V_{h_1(p)} \in \mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{N}_p$ для каждого простого p. Ввиду леммы 15 $V_{h_1(p)} = G_{h_1(p)}$ для всех простых p. Следовательно, $V/G_{h_1(p)} \in \mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{N}_p$ для всех простых p. Так как $h_1(p) \subseteq \mathscr{H}$ для всех $p \in \mathbb{P}$, то, используя изоморфизм $V/G_{h_1(p)}/G_{\mathscr{H}}/G_{h_1(p)} \cong V/G_{\mathscr{H}}$, получаем, что $V/G_{\mathscr{H}}$ – p-нильпотентная группа для каждого простого p. Следовательно, группа $V/G_{\mathscr{H}}$ нильпотентна.

С другой стороны, так как $\mathscr{H}$ – локальное множество Фиттинга, $\mathscr{H}$-инъектор группы G по лемме 7 характеризуется следующим образом: V – $\mathscr{H}$-инъектор G тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{N}_p}$ – холлова p'-подгруппа G. Ввиду $G_{\mathfrak{N}_p} \leq G_{\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}}$ имеем $V/G_{\mathfrak{N}_p}/G_{\mathscr{H}}/G_{\mathfrak{N}_p} \cong V/G_{\mathscr{H}}$ и $V/G_{\mathscr{H}}$ является p'-группой, которая ненильпотентна. Полученное противоречие следует из неверного предположения о том, что $\mathscr{H}$ является множеством Хартли группы G. Предложение доказано.

Предложение 2. *Каждое множество Хартли $\mathscr{H}$ группы G можно определить полной приведенной H-функцией F такой, что $F(p) = h(p) \Diamond \left(\mathfrak{E}_{p'} \mathfrak{N}_p\right) \cap \left(\bigcap_{q \neq p} h(q) \Diamond \mathfrak{S}_{q'}\right)$ для всех $p \in \pi$.*

Доказательство. По утверждению (1) предложения 1 множество $\mathscr{H}$ является π-локальным. Покажем, что $\mathscr{H} = LFS_{\pi}(F)$.

Так как $LFS_{\pi}(F) = \bigcap_{p\in\pi}\Big(h(p)\lozenge(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)\cap\Big(\bigcap_{q\neq p}h(q)\lozenge\mathfrak{E}_{q'}\Big)\Big)\lozenge(\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$, по утверждению (1) леммы 5 $\bigcap_{p\in\pi}\Big(h(p)\lozenge(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)\cap\Big(\bigcap_{q\neq p}h(q)\lozenge\mathfrak{E}_{q'}\Big)\Big)\lozenge(\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}) = \bigcap_{p\in\pi}\Big(h(p)\lozenge(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)\Big)\lozenge(\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})\cap\Big(\bigcap_{q\neq p}\Big(h(q)\lozenge\mathfrak{E}_{q'}\Big)\lozenge(\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})\Big)$. Ввиду утверждения (4) леммы 4

$$\bigcap_{p\in\pi}\Big(h(p)\lozenge(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)\Big)\lozenge(\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})\cap\Big(\bigcap_{q\neq p}\Big(h(q)\lozenge\mathfrak{E}_{q'}\Big)\lozenge(\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})\Big) = \bigcap_{p\in\pi}h(p)\lozenge$$

$$\lozenge(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})\cap\Big(\bigcap_{q\neq p}h(q)\lozenge(\mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})\Big) = \bigcap_{p\in\pi}h(p)\lozenge(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})\cap\Big(\bigcap_{q\neq p}h(q)\lozenge(\mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{E}_{p'})\Big) =$$

$$= \bigcap_{p\in\pi}\Big(h(p)\lozenge(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)\Big)\cap\Big(\bigcap_{q\neq p}h(q)\lozenge\mathfrak{E}_{q'}\Big)\lozenge\mathfrak{E}_{p'}.$$

Так как h – устойчивая, приведенная H-функция $\mathscr{H}$ и $\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{S}_{q'}$, то $LFS_{\pi}(F) = \bigcap_{p\in\pi}\Big(h(p)\lozenge(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)\cap\Big(\bigcap_{q\neq p}h(q)\lozenge\mathfrak{E}_{q'}\Big)\Big)\lozenge\mathfrak{E}_{p'} = \bigcap_{q\in\pi}h(q)\lozenge(\mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{N}_q) = \mathscr{H}$. Предложение доказано.

О факторах, покрываемых инъекторами

Лемма 16. *Пусть* $\varnothing\neq\pi\subseteq\mathbb{P}$, $G\in\mathfrak{S}^{\pi}$ *и* $\mathscr{F} = LFS_{\pi}(f)$ *для приведенной H-функции f группы G. Если* $\mathscr{F} = \mathscr{F}\lozenge\mathfrak{E}_{\pi'}$ *и* V – $\mathscr{F}$*-инъектор группы G, то* $V_{f(p)} = G_{f(p)}$ *для всех* $p\in\pi$.

Доказательство. По лемме 13 $G_{\mathscr{F}}\subseteq V$. Так как $f(p)\subseteq\mathscr{F}$, то

$$V_{f(p)}\cap G_{\mathscr{F}} = (G_{\mathscr{F}})_{f(p)} = G_{f(p)\cap\mathscr{F}} = G_{f(p)}.$$

Поэтому $[V_{f(p)}, G_{\mathscr{F}}]\leq V_{f(p)}\cap G_{\mathscr{F}} = G_{f(p)}$ и $V_{f(p)}\leq C_G(G_{\mathscr{F}}/G_{f(p)})$ для каждого $p\in\pi$. Пусть $C = C_G(G_{\mathscr{F}}/G_{f(p)})$. Для доказательства равенства $V_{f(p)} = G_{f(p)}$ достаточно убедиться, что $C\subseteq G_{\mathscr{F}}$.

Предположим, что включение неверно. Следовательно, $C/C\cap G_{\mathscr{F}}$ – нетривиальная группа. Поскольку $C\cap G_{\mathscr{F}}\trianglelefteq G$, существует нормальный ряд $1\trianglelefteq C\cap G_{\mathscr{F}}\trianglelefteq K\trianglelefteq C\trianglelefteq G$. Тогда найдется нормальная подгруппа K группы G, содержащаяся в C такая, что $K/C\cap G_{\mathscr{F}}$ – нетривиальный главный фактор группы G. Следовательно, $K\cap G_{\mathscr{F}} = C\cap G_{\mathscr{F}}$ и $K/C\cap G_{\mathscr{F}} = K/K\cap G_{\mathscr{F}}$. Так как G – π-разрешимая группа, ввиду изоморфизма $KG_{\mathscr{F}}/G_{\mathscr{F}}\cong K/K\cap G_{\mathscr{F}}$, главный фактор является либо π'-группой, либо элементарной абелевой p-группой для любого $p\in\pi$.

Пусть $K/K\cap G_{\mathscr{F}}\in\mathfrak{E}_{\pi'}$. По лемме 2 $K/K_{\mathscr{F}}\in\mathfrak{E}_{\pi'}$ и $K\in\mathscr{F}\lozenge\mathfrak{E}_{\pi'}$. Так как $\mathscr{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга группы G, то $K\in\mathscr{F}$. Следовательно, $K\subseteq G_{\mathscr{F}}$ и фактор $K/K\cap G_{\mathscr{F}}$ тривиален. Получили противоречие.

Предположим, что $K/K\cap G_{\mathscr{F}}$ – элементарная абелева p-группа для некоторого $p\in\pi$. В этом случае, следуя доказательству утверждения (1) предложения 1, снова получаем противоречие с тем, что фактор $K/K\cap G_{\mathscr{F}}$ тривиален. Это завершает доказательство того, что $C\subseteq G_{\mathscr{F}}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. (1) Пусть V – $\mathscr{F}$-инъектор группы G. Поскольку $G\in\mathscr{F}\lozenge\mathfrak{S}$, по лемме 8 группа G обладает $\mathscr{F}$-инъектором и любые два из них сопряжены. Следовательно, свойство покрытия-изолирования $\mathscr{F}$-инъектором главных факторов группы G не зависит от выбора $\mathscr{F}$-инъекторов. Поскольку $V_{f(p)}\leq V$, то V покрывает все такие главные p-факторы группы G, которые покрывает $V_{f(p)}$ для любого $p\in\pi$. Так как по лемме 15 $V_{f(p)} = G_{f(p)}$ для любого $p\in\pi$, то V покрывает все те главные p-факторы, которые покрывает $f(p)$-радикал группы G. Таким образом, утверждение (1) теоремы доказано.

(2) Ввиду утверждения (2) леммы 1 и леммы 16 доказательство теоремы в случае (2) аналогично ее доказательству в случае (1). Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Doerk K, Hawkes T. *Finite Soluble Groups*. Berlin, New York: Walter de Gruyter; 1992.
2. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory. *Proceedings of the London Mathematical Society.* 1969;3(2):193–207. DOI: 10.1112/plms/s3-19.2.193.
3. Шеметков ЛА. О подгруппах π-разрешимых групп. В: *Конечные группы*. Минск: Наука и техника; 1975. с. 207–212.
4. Anderson W. Injectors in finite soluble groups. *Journal of Algebra*. 1975;36(3):333–338. DOI: 10.1016/0021-8693(75)90136-2.
5. Yang N, Guo W, Vorob'ev NT. On $\mathcal{F}$-injectors of Fitting set of a finite group. *Communications in Algebra*. 2018;46(1):217–229. DOI: 10.1080/00927872.2017.1319475.
6. Fischer B, Gaschütz W, Hartley B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*. 1967;102(5):337–339. DOI: 10.1007/BF01111070.
7. Ballester-Bolinches A, Ezquerro LM. *Classes of Finite Groups*. Dordrecht: Springer; 2006.

References

1. Doerk K, Hawkes T. *Finite Soluble Groups*. Berlin, New York: Walter de Gruyter; 1992.
2. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory. *Proceedings of the London Mathematical Society.* 1969;3(2):193–207. DOI: 10.1112/plms/s3-19.2.193.
3. Shemetkov LA. [On subgroups of π-soluble groups]. In: *Konechnye gruppy* [Finite Groups]. Minsk: Nauka i tekhnika; 1975. p. 207–212. Russian.
4. Anderson W. Injectors in finite soluble groups. *Journal of Algebra*. 1975;36(3):333–338. DOI: 10.1016/0021-8693(75)90136-2.
5. Yang N, Guo W, Vorob'ev NT. On $\mathcal{F}$-injectors of Fitting set of a finite group. *Communications in Algebra*. 2018;46(1):217–229. DOI: 10.1080/00927872.2017.1319475.
6. Fischer B, Gaschütz W, Hartley B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*. 1967;102(5):337–339. DOI: 10.1007/BF01111070.
7. Ballester-Bolinches A, Ezquerro LM. *Classes of Finite Groups*. Dordrecht: Springer; 2006.

Статья поступила в редколлегию 25.06.2018.
Received by editorial board 25.06.2018.