где C – произвольная постоянная. С учетом соотношения $c_0=4a_0$, (11), (12) найдем коэффициенты c_0, c_2, c_3, например, при $\varepsilon=-1$ для соответствующего уравнения (3).

$$c_0 = -\frac{\exp(-2\sigma x)}{9\alpha}, \quad c_2 = \frac{1}{C-\alpha I_1}[3\alpha\sigma\exp(\frac{3\alpha\beta^2\exp(2\sigma x)}{\sigma}) + C\gamma - \alpha\sigma I_1 -$$

$$-6\alpha\beta\sqrt{\sigma}\ i\ \exp(\frac{3\alpha\beta^2\exp(2\sigma x)}{2\sigma} + \sigma x)\sqrt{C-\alpha I_1}\,],$$

$$c_3 = \frac{3\alpha\beta\ \exp(2\sigma x)}{(C-\alpha I_1)^{3/2}}[3\alpha\beta\sqrt{\sigma}\ i\ \exp(\frac{3\alpha\beta^2\exp(2\sigma x)}{2\sigma} + \sigma x)(\alpha I_1 - C) + \sqrt{C-\alpha I_1}\times$$

$$\times(3\alpha\sigma\ \exp(\frac{3\alpha\beta^2\exp(2\sigma x)}{\sigma}) + (\sigma - 2\alpha\beta^2\exp(2\sigma x))(\alpha I_1 - C))]. \qquad (23)$$

Согласно теореме 2 уравнения (3), (22), (23) интегрируются в квадратурах.

1. Лукашевич Н.А., Чичурин А.В. Дифференциальные уравнения первого порядка. Мн., 1999.

2. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2001.

Поступила в редакцию 17.10.2002.

Александр Вячеславович Чичурин – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений БрГУ им. А.С. Пушкина.

УДК 519.10

В.М. КРАВЦОВ

О НОВЫХ ТИПАХ МАКСИМАЛЬНО НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

$\left(n - \left[\frac{n}{2}\right] - 3\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 2\right) + n + 2\left[\frac{n}{2}\right] - 9$ new types non-equivalent maximal non-integer vertices of the polytope of three-axial assignment problem, i. e. the vertices with the number of fractional components being equal $3n-2$, is researched.

Известно [1], что трехиндексная аксиальная задача о назначениях, имеющая многочисленные приложения [2, 3], является NP-полной.

Целочисленные вершины многогранника

$$M(3,n) = \{x = \|x_{ijt}\|_n : x_{ijt} \ge 0\ \forall (i,j,t) \in N_n^3, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijt} = 1\ \forall t \in N_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{ijt} = 1\ \forall j \in N_n, \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{ijt} = 1\ \forall i \in N_n\},$$

где $n\ge 2$, $N_n=\{1, 2, \ldots, n\}$, $N_n^3=N_n\times N_n\times N_n$, порожденного условиями этой задачи, просто устроены и их общее количество равно $(n!)^2$ [4]. Сложное строение нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, естественно, создает принципиальные трудности на пути его исследования.

Изучению комбинаторных свойств многогранника $M(3, n)$ посвящено большое количество работ (см., например, [1, 4–8]). Так, в работах [1, 5] изучается граневая структура и описываются фасеты (грани максимальной размерности), а в [6–8] исследуются его нецелочисленные вершины. В частности, показано [6], что для любого числа $s \in \{4, 6, 7, \ldots, 3n-2\}$ и только для него у многогранника $M(3, n)$ существуют s-нецелочисленные вершины, т. е. вершины, число дробных компонент у которых равно s.

Так как всякая вершина многогранника $M(3, n)$ содержит не более чем $3n-2$ положительных компонент (см. [4]), то $(3n-2)$-нецелочисленные вершины этого многогранника будем называть максимально нецелочисленными.

В [9] указаны три типа неэквивалентных максимально нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, $n \geq 4$. Идентификация типов вершин проводится по количеству дробных компонент, содержащихся в двумерных сечениях трехиндексных матриц, представляющих собой вершины. Две вершины многогранника $M(3, n)$ называются неэквивалентными, если одна из них не может быть переведена в другую путем перестановки ее двумерных сечений.

В настоящей работе приведено $\left(n-\left[\dfrac{n}{2}\right]-3\right)\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]-2\right)+n+2\left[\dfrac{n}{2}\right]-9$ новых типов неэквивалентных максимально нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, $n \geq 7$, и исследованы их комбинаторные свойства.

Совокупность элементов матрицы $x=\|x_{ijt}\|_n$ с фиксированным значением одного индекса, например t, будем называть двумерным сечением ориентации (i, j) матрицы x. Двумерное сечение представляет собой обычную двухиндексную матрицу. Таким образом, у матрицы x имеются двумерные сечения ориентаций (i, j), (i, t) и (j, t). Произвольную ориентацию двумерного сечения матрицы x будем обозначать (g, h), а фиксированное двумерное сечение этой ориентации – s. Двумерное сечение ориентации (g, h) матрицы x с фиксированным индексом s будем обозначать x^s_{gh}, а число дробных компонент матрицы x^s_{gh} – $z\left(x^s_{gh}\right)$.

Согласно лемме 4 [7] имеет место утверждение: для того чтобы матрица x была максимально нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$, необходимо, чтобы для ее двумерных сечений ориентации (g, h) выполнялись два условия:

$$\sum_{s=1}^{n} z\left(x^s_{gh}\right)=3n-2; \quad z\left(x^s_{gh}\right)\geq 2 \quad \forall s\in N_n, \tag{1}$$

причем среди этих неравенств имеются хотя бы два равенства. Пусть $y^s_{gh}=z\left(x^s_{gh}\right)-1$ $\forall s\in N_n$. Тогда система (1) принимает вид

$$\sum_{s=1}^{n} y^s_{gh}=2n-2, \tag{2}$$

и количество решений $\left(y^1_{gh}, y^2_{gh}, \ldots, y^n_{gh}\right)$ уравнения (2) в положительных целых числах y^s_{gh} совпадает с числом решений системы (1). Как показано в [10], количество таких решений равно $\begin{pmatrix}2n-3\\ n-1\end{pmatrix}$. Однако до сих пор пока неизвестно, существует ли матрица x для каждого такого решения, являющаяся максимально нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$. Решение системы (1) будем записывать в виде вектора $\left(z_1, z_2, \ldots, z_n\right)_{gh}$, каждая компонента которого обозначает количество дробных компонент соответствующего двумерного сечения ориентации (g, h).

Наряду с многогранником $M(3, n)$ рассмотрим ε-возмущенный (ε>0) многогранник $M_\varepsilon(3, n)$, заданный условиями

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijt}(\varepsilon)=1 \quad \forall t\in N_{n-1},\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijn}(\varepsilon)=1+n^2\varepsilon,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{ijt}(\varepsilon)=1+n\varepsilon \quad \forall j\in N_n,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{ijt}(\varepsilon)=1+\varepsilon \quad \forall i\in N_{n-1},\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{njt}(\varepsilon)=1+\left(n^2-n+1\right)\varepsilon,$$

$$x_{ijt}(\varepsilon)\ge 0 \ \forall (i,j,t)\in N_n^3.$$

Лемма [11]. Существует такое число $\varepsilon_1>0$, что при $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ многогранник $M_\varepsilon(3, n)$ является невырожденным. При этом всякая вершина $x(\varepsilon)=\|x_{ijt}(\varepsilon)\|_n$ многогранника $M_\varepsilon(3, n)$ может быть представлена в виде $\|x_{ijt}(\varepsilon)\|_n=\|x_{ijt}\|_n+\varepsilon\|\alpha_{ijt}\|_n$, где $x=\|x_{ijt}\|_n$ – вершина (возможно, вырожденная) многогранника $M(3, n)$, а ненулевые компоненты (не обязательно положительные) матрицы $\|\alpha_{ijt}\|_n$ соответствуют ненулевым компонентам вершины $x(\varepsilon)$, т. е. справедливо включение

$$R(x)=\{(i, j, t)\in N_n^3 : x_{ijt}>0\}\subseteq R(x(\varepsilon))=\{(i, j, t)\in N_n^3 : x_{ijt}(\varepsilon)>0\}.$$

Множества $R(x)$ и $R(x(\varepsilon))$ совпадают, если вершина x многогранника $M(3, n)$ является невырожденной.

Теорема 1. Для любого числа $r\in\{0, 1, 2, \ldots, n-3\}$, $n\ge 3$, матрица $x^r=\|x^r_{ijt}\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^r_{kk1}=\frac{1}{n-r},\ k=1,\ \ldots,\ n-r,$$

$$x^r_{122}=\frac{n-r-1}{n-r},\ x^r_{n1n}=\frac{n-r-1}{n-r},\ x^r_{k,k+1,k+1}=\frac{n-r-2}{n-r},\ k=2,\ \ldots,\ r+1\left(r\ge 1\right),$$

$$x^r_{n+k-r-1,n+k-r-1,k+1}=\frac{1}{n-r},\ k=2,\ \ldots,\ r+1\left(r\ge 1\right),\ x^r_{k,k+1,k}=\frac{1}{n-r},\ k=2,\ \ldots,\ r+2,$$

$$x^r_{k-1,k,k}=\frac{n-k+1}{n-r},\ k=r+3,\ \ldots,\ n,$$

$$x^r_{k,k+1,k}=\frac{k-r-1}{n-r},\ k=r+3,\ \ldots,\ n-1\left(r\le n-4\right),$$

является максимально нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$.

Ранее это утверждение было известно лишь для $r=0$, $n=3$ [9].

Схема доказательства теоремы 1. Зафиксируем некоторое число $r\in\{0, 1, 2, \ldots, n-3\}$, $n\ge 3$. Легко проверить, что $x^r\in M(3, n)$. Нетрудно убедиться, что матрица $x^r(\varepsilon)=\left\|x^r_{ijt}(\varepsilon)\right\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^r_{kk1}(\varepsilon)=\frac{1}{n-r}-\frac{(n-1)(n-r+1-2k)}{2}\varepsilon,\ k=1,\ \ldots,\ n-r,$$

$$x^r_{122}(\varepsilon)=\frac{n-r-1}{n-r}+\left[\frac{(n-1)(n-r-1)}{2}+1\right]\varepsilon,$$

$$x^r_{n1n}(\varepsilon)=\frac{n-r-1}{n-r}+\frac{\left(n^2-nr+r+1\right)}{2}\varepsilon,$$

$$x^r_{k,k+1,k+1}(\varepsilon)=\frac{n-r-2}{n-r}+\left[(k-1)(n-1)(n-r-2)+k\right]\varepsilon,\ k=2,\ \ldots,\ r+1\left(r\ge 1\right),$$

$$x^r_{n+k-r-1,n+k-r-1,k+1}(\varepsilon)=\frac{1}{n-r}+\frac{(n-1)(n-r+2k-3)}{2}\varepsilon,\ k=2,\ \ldots,\ r+1\left(r\ge 1\right),$$

$$x^r_{k,k+1,k}(\varepsilon)=\frac{1}{n-r}-\left[\frac{(2k-3)(n-1)(n-r-1)}{2}+k-1\right]\varepsilon,\ k=2,\ \ldots,\ r+2,$$

$$x^r_{k-1,k,k}(\varepsilon)=\frac{n-k+1}{n-r}+$$

$$+\left\{\frac{(n-1)}{2}\left[(k+r-1)n-2r^2-(k-r-1)(2r+k-1)\right]+k-1\right\}\varepsilon,$$

$$k=r+3,\ \ldots,\ n,$$

$$x^r_{k,k+1,k}(\varepsilon)=\frac{k-r-1}{n-r}-$$

$$-\left\{\frac{(n-1)}{2}\left[(k+r-1)n-2r^2-(k-r-1)(2r+k-1)\right]+k-1\right\}\varepsilon,$$

$$k=r+3,\ \ldots,\ n-1\,(r\le n-4),$$

принадлежит многограннику $M_\varepsilon(3,\ n)$. Так как число ненулевых элементов матрицы $x'(\varepsilon)$ равно $3n-2$, а многогранник $M_\varepsilon(3,\ n)$ невырожден (см. лемму), то матрица $x'(\varepsilon)$ является его вершиной. Отсюда, учитывая равенство $R(x^r)=R(x'(\varepsilon))$, заключаем, что матрица x^r является максимально нецелочисленной вершиной многогранника $M(3,\ n)$.

Для вершины $x=\|x_{ijt}\|_n$ многогранника $M(3,\ n)$ введем множество

$$S(x)=\{k\in(0,\ 1):\exists(i,\ j,\ t)\in:N_n^3\, x_{ijt}=k\}.$$

Следствие 1. Для любого числа $r\in\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-3\}$, $n\ge3$, максимально нецелочисленная вершина x^r многогранника $M(3,\ n)$, указанная в теореме 1, обладает свойствами:

1) $S(x^r)=\left\{\frac{1}{n-r},\ \frac{2}{n-r},\ \ldots,\ \frac{n-r-1}{n-r}\right\};$

2) количество дробных компонент, содержащихся в ее двумерных сечениях, задается векторами

$$\Big(n-r,\ 2,\ \underbrace{3,\ \ldots,3}_{r\ раз},\ \underbrace{2,\ \ldots,\ 2}_{n-r-2\ раз}\Big)_{ij},\quad \Big(2,\ 2,\ \underbrace{3,\ \ldots,\ 3}_{n-2\ раз}\Big)_{it},\quad \Big(2,\ \underbrace{3,\ \ldots,\ 3}_{n-2\ раз},\ 2\Big)_{jt}.$$

Справедливы следующие три теоремы, доказательство которых проводится по той же схеме, что и теоремы 1.

Теорема 2. Для любого числа $r\in\left\{1,\ 2,\ \ldots,\left[\frac{n}{2}\right]-1\right\}$, $n\ge4$, матрица $x^r=\left\|x^r_{ijt}\right\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^r_{kk1}=\frac{1}{n-r},\ k=1,\ \ldots,\ n-r,\ x^r_{122}=\frac{n-r-1}{n-r},\ x^r_{n1n}=\frac{n-r-1}{n-r},$$

$$x^r_{k,\,k+1,\,k}=\frac{k-1}{n-r},\ x^r_{k,\,k+1,\,k+1}=\frac{n-r-k}{n-r},$$

$$x^r_{n+k-r-1,\,n+k-r-1,\,r+2}=\frac{1}{n-r},\ k=2,\ \ldots,\ r+1,$$

$$x^r_{t,\,t+1,\,t}=\frac{k-r-1}{n-r},\ k=r+2,\ \ldots,\ n-1,\ x^r_{k-1,\,k,\,k}=\frac{n-k+1}{n-r},\ k=r+3,\ldots,\ n,$$

является максимально нецелочисленной вершиной многогранника $M(3,\ n)$.

Теорема 3. Для любых чисел $l \in \left\{4, ..., n-\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$ и $r \in \{l-1, \ldots, n-l\}$, где $n \geq 2l-1$, матрица $x^{r,l} = \left\| x_{ijt}^{r,l} \right\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x_{kk1}^{r,l} = \frac{1}{n-r},\ k=1, \ldots, n-r, \quad x_{k-1,k,k}^{r,l} = \frac{n-r-k+1}{n-r},\ k=2, \ldots, l,$$

$$x_{k,k+1,k}^{r,l} = \frac{k-1}{n-r},\ k=2, \ldots, l-1, \quad x_{n-r+k,n-r+k,l}^{r,l} = \frac{1}{n-r},\ k=1, \ldots, l-2,$$

$$x_{k,k+1,k}^{r,l} = \frac{1}{n-r},\ k=l, \ldots, r+2, \quad x_{k,k+1,k+1}^{r,l} = \frac{n-r-2}{n-r},\ k=l, \ldots, r+1 (r+1 \geq l),$$

$$x_{n-r+k-1,n-r+k-1,k+1}^{r,l} = \frac{1}{n-r},\ k=l, \ldots, r+1 (r+1 \geq l), \quad x_{k-1,k,k}^{r,l} = \frac{n-k+1}{n-r},\ k=r+3, \ldots, n,$$

$$x_{k-1,k,k-1}^{r,l} = \frac{k-r-2}{n-r},\ k=r+4, \ldots, n, \quad x_{n1n}^{r} = \frac{n-r-1}{n-r}$$

является максимально нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$.

Теорема 4. Для любого числа $r \in \left\{4, ..., \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$, $n \geq 8$, матрица $x^r = \left\| x_{ijt}^r \right\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x_{kk1}^{r} = \frac{1}{n-r}, k=1, \ldots, n-r, \quad x_{k-1,k,k}^{r} = \frac{n-k+1}{n-r}, k=r+3, \ldots, n,$$

$$x_{122}^{r} = \frac{n-r-1}{n-r}, \quad x_{232}^{r} = \frac{1}{n-r}, \quad x_{233}^{r} = \frac{n-r-2}{n-r}, \quad x_{343}^{r} = \frac{2}{n-r},$$

$$x_{344}^{r} = \frac{n-r-3}{n-r}, \quad x_{n-r+1,n-r+1,4}^{r} = \frac{1}{n-r}, \quad x_{n-r+2,n-r+2,4}^{r} = \frac{1}{n-r}, \quad x_{n1n}^{r} = \frac{n-r-1}{n-r},$$

$$x_{k,k+1,k+1}^{r} = \frac{n-r-k+2}{n-r},\ k = 4, ..., r+1, \quad x_{k,k+1,k}^{r} = \frac{k-3}{n-r},\ k = 4, ..., r+1,$$

$$x_{n+k-r,n+k-r,r+2}^{r} = \frac{1}{n-r},\ k = 3, ..., r, \quad x_{k,k+1,k}^{r} = \frac{k-r-1}{n-r},\ k = r+2, ..., n-1,$$

является максимально нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$.

Замечание. При $r=1$ вершины многогранника $M(3, n)$, указанные в теоремах 1 и 2, совпадают.

Из теорем 2–4 вытекают следующие три утверждения.

Следствие 2. Для любого числа $r \in \left\{1, 2, ..., \left[\frac{n}{2}\right]-1\right\}$, $n \geq 4$, максимально нецелочисленная вершина x^r многогранника $M(3, n)$, указанная в теореме 2, обладает свойствами:

1) $S\left(x^r\right) = \left\{\frac{1}{n-r}, \frac{2}{n-r}, ..., \frac{n-r-1}{n-r}\right\}$;

2) количество дробных компонент, содержащихся в ее двумерных сечениях, задается векторами

$$\left(n-r, \underbrace{2, ..., 2}_{r\ раз}, r+2, \underbrace{2, ..., 2}_{n-r-2\ раз}\right)_{ij}, \quad \left(2, 2, \underbrace{3, ..., 3}_{n-2\ раз}\right)_{it}, \quad \left(2, \underbrace{3, ..., 3}_{n-2\ раз}, 2\right)_{jt}.$$

Следствие 3. Для любых чисел $l \in \left\{4, \ldots, n-\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$ и $r \in \{l-1, \ldots, n-l\}$, где $n \geq 2l-1$, максимально нецелочисленная вершина $x^{r,l}$ многогранника $M(3, n)$, указанная в теореме 3, обладает следующими свойствами:

1) $S\left(x^{r,l}\right)=\left\{\frac{1}{n-r}, \frac{2}{n-r}, \ldots, \frac{n-r-1}{n-r}\right\}$;

2) количество дробных компонент, содержащихся в ее двумерных сечениях, задается векторами

$$\Big(n-r, \underbrace{2, \ldots, 2}_{l-2\ раз}, l, \underbrace{3, \ldots, 3}_{r-l+2\ раз}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n-r-2\ раз}\Big)_{ij}, \quad \Big(2, 2, \underbrace{3, \ldots, 3}_{n-2\ раз}\Big)_{it}, \quad \Big(2, \underbrace{3, \ldots, 3}_{n-2\ раз}, 2\Big)_{jt}.$$

Следствие 4. Для любого числа $r \in \left\{4, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$, $n \geq 8$, максимально нецелочисленная вершина x^r многогранника $M(3, n)$, указанная в теореме 4, обладает свойствами:

1) $S\left(x^{r}\right)=\left\{\frac{1}{n-r}, \frac{2}{n-r}, \ldots, \frac{n-r-1}{n-r}\right\}$;

2) количество дробных компонент, содержащихся в ее двумерных сечениях, задается векторами

$$\Big(n-r, 2, 2, 4, \underbrace{2, \ldots, 2}_{r-3\ раз}, r, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n-r-2\ раз}\Big)_{ij}, \quad \Big(2, 2, \underbrace{3, \ldots, 3}_{n-2\ раз}\Big)_{it}, \quad \Big(2, \underbrace{3, \ldots, 3}_{n-2\ раз}, 2\Big)_{jt}.$$

Из теорем 1–4 с учетом замечания получаем

Следствие 5. Количество типов неэквивалентных максимально нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, указанных в теоремах 1–4, выражается формулой

$$\sigma(n)=\begin{cases} n+\left[\frac{n}{2}\right]-4, & если\ n=4,\ 5,\ 6, \\ \left(n-\left[\frac{n}{2}\right]-3\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right]-2\right)+n+2\left[\frac{n}{2}\right]-7, & если\ n \geq 7. \end{cases}$$

1. Balas E., Saltzman M. J. // Discrete Appl. Math. 1989. Vol. 23. № 3. P. 201.
2. Poore A. B. // Computation Optimization and Applications. 1994. Vol. 3. P. 27.
3. Arbib C., Pacciarelli D., Smriglio S. // Discrete Appl. Math. 1999. Vol. 22. P. 1.
4. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.
5. Gwan G., Qi L. // Australasian J. Combinatorics. 1992. Vol. 6. P. 67.
6. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2000. № 4. С. 59.
7. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Дискрет. математика. 2001. Т. 13. Вып. 2. С. 120.
8. Кравцов В.М. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3. С. 87.
9. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Изв. вузов. Математика. 2002. № 12. С. 84.
10. Холл М. Комбинаторика. М., 1970.
11. Раскин Л.Г., Кириченко И.О. Многоиндексные задачи линейного программирования. М., 1982.

Поступила в редакцию 21.11.2002.

Виктор Михайлович Кравцов – ведущий специалист Проматомнадзора МЧС Республики Беларусь.