УДК 519.214

А.Г. ФЕДОСЕНКО

О СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ *m*-ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

There are conditions of convergence of sums distributions of m-dependent random vectors to the normal low derived from a canonic represent of logarithm of a characteristic function of sums.

Центральной предельной теореме теории вероятностей для сумм зависимых случайных величин посвящено много работ (см., например, [1, 2] и др.), при этом все доказательства теоремы проведены в этих работах непосредственно. В данной работе, исходя из найденного в [3] канонического представления логарифма характеристической функции (х. ф.) для сумм m_n-зависимых случайных векторов (определение m_n-зависимости см., например, [4]), находятся условия сходимости распределений сумм m_n-зависимых случайных векторов к нормальному закону. Для зависимых случайных величин этот вопрос освещен в [4].

Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, – m_n-зависимая система серий d-мерных случайных векторов, определенных при каждом n на одном и том же вероятностном пространстве и принимающих значения в R^d, $\xi_{ns}=(\xi_{ns}^{(1)}, \ldots, \xi_{ns}^{(d)})$, $M\xi_{ns}^{(i)}=0$, $x=(x_1, \ldots, x_d)$, $t=(t_1, \ldots, t_d)$, запись $\xi_{ns}\le x$ означает $\xi_{ns}^{(i)}\le x_i$ $\forall i=\overline{1, d}$ (см., например, [5]). Выражения типа (x, y) представляют собой скалярное произведение, $h(n)$ – медленно меняющаяся функция при $n\to\infty$ (см. [1]). Матрица $B_n=\left\|b_{n(i,\,j)}\right\|$, $i,\ j=\overline{1,\ d}$, $b_{n(i,j)}=\sum\limits_{0\le|s-p|\le m_n} M\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)};\ \left|\xi_{ns}^{(i)}\right|\le\varepsilon,\ \left|\xi_{np}^{(j)}\right|\le\varepsilon\right)$, $\varepsilon>0$. Очевидно, что матрица B_n является симметричной.

В [3] доказана

Теорема 1. *Пусть система серий векторов* $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$ $m_n=m_0n^{1/8-\rho}$*-зависимая, где* m_0 *– любое постоянное число,* $0<\rho\le 1/8$, *кроме того, найдутся постоянные* H_1, H_2 *и* n_0 *такие, что* $\forall n\ge n_0$

$$\max_{s,j} M\xi_{ns}^{(j)^2}\le\frac{H_1h(n)}{n},\tag{1}$$

$$\max_{s,p,q,i,j,k} M\left|\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)}\xi_{nq}^{(k)}\right|\le\frac{H_2h(n)}{n^{3/2}},\tag{2}$$

где $0\le|r-q|\le m_0n^{1/4-\rho}$, $0<|s-q|\le m_0n^{1/4-\rho}$. *Тогда, если при* $n\to\infty$

$$K_n(x)=\sum_{s=1}^{n}M(\xi_{ns}^{\ 2};\xi_{ns}\le x)\xrightarrow{сл.}K(x)<\infty,\tag{3}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}B_n=B,\tag{4}$$

то суммы S_n *будут иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм х. ф. которого*

$$\psi(t)=\int\limits_{R^d/0}\left(e^{i(t,x)}-1-i(t,\ x)\right)\frac{1}{|x|^2}dK(x)-\frac{(t,\ Bt^*)}{2},\tag{5}$$

где t^* *– вектор-столбец, а из области интегрирования исключен нуль-вектор.*

Отметим, что важным следствием теоремы 1 является то, что симметричная предельная матрица B в формуле (5) является неотрицательно определенной, так как $\psi(t)$ – логарифм х. ф.

Теорема 2. *Пусть система серий векторов* $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$ $m_n = m_0 n^{1/8-\rho}$ *-зависимая, где* m_0 *– любое постоянное число,* $0<\rho\le 1/8$. *Если, кроме условий* (1), (2) *и* (4) *теоремы* 1, *выполняется условие Линдеберга* (см. [4, 6, 7]): $\forall\varepsilon>0$

$$\sum_{s=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon} x^2 dP(\xi_{ns}\le x)\to 0, \qquad \text{(L)}$$

то суммы S_n *будут иметь нормальное предельное распределение с х. ф.* $\varphi(t)=e^{-(tB,t^*)/2}$.

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 (см. [3]) было показано, что $\forall\varepsilon>0$

$$\int_{|x|\ge\varepsilon}\left(e^{i(t,x)}-1-i(t,x)\right)\frac{1}{|x|^2}dK_n(x)=\sum_{s=1}^{n}\int_{|x|\ge\varepsilon}\left(e^{i(t,x)}-1-i(t,x)\right)\; dP(\xi_{ns}\le x).$$

Так как $\left|e^{i(t,x)}-1-i(t,\ x)\right|\le (t,\ x)^2\le t^2x^2$, то из свойств интеграла Лебега – Стильтеса (см., например, [9]) следует, что

$$\sum_{s=1}^{n}\int_{|x|\ge\varepsilon}\left(e^{i(t,x)}-1-i(t,x)\right)\; dP(\xi_{ns}\le x)\le t^2\sum_{s=1}^{n}\int_{|x|\ge\varepsilon} x^2dP(\xi_{ns}\le x).$$

Следовательно, согласно (L) интеграл в формуле (5) равен нулю, т. е. сумма S_n имеет нормальное предельное распределение с х. ф. $\varphi(t)=e^{-(tB,\ t^*)/2}$, что доказывает теорему 2.

Замечание. Если в теореме 2 вместо (L) выполняется условие Ляпунова (см., например, [4, 7]): $\exists\delta>0$ такое, что при $n\to\infty$

$$\sum_{s=1}^{n} M\left|\xi_{ns}\right|^{2+\delta}\to 0, \qquad \text{(Л)}$$

то суммы S_n будут иметь нормальное предельное распределение с х. ф. $\varphi(t)=e^{-(tB,\ t^*)/2}$.

Действительно, из условия Ляпунова сразу следует (L):

$$\sum_{s=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon} x^2dP(\xi_{ns}\le x)=\sum_{s=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{|x|^{2+\delta}}{|x|^{\delta}}dP(\xi_{ns}\le x)\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon^{\delta}}\sum_{s=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon}|x|^{2+\delta}\,dP(\xi_{ns}\le x)\le\frac{1}{\varepsilon^{\delta}}\sum_{s=1}^{n}M\left|\xi_{ns}\right|^{2+\delta}\to 0.$$

Теорема 3. *Для сходимости распределений сумм* S_n $m_n=m_0n^{1/8-\rho}$ *-зависимых случайных векторов к нормальному закону с х. ф.* $\varphi(t)=e^{-(tB,t^*)/2}$ *достаточно, чтобы нашлись постоянные* H *и* n_0 *такие, что* $\forall n\ge n_0$

$$\max_{s,j} M\left|\xi_{ns}\right|^3\le\frac{Hh(n)}{n^{3/2}} \qquad (6)$$

и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$.

Доказательство. Действительно, из неравенства Гёльдера (см. [4, 7–9]) следует:

$$M\left|\xi_{ns}^{(j)}\right|^2 \le \left(M\left|\xi_{ns}^{(j)}\right|^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(M\left|\xi_{ns}^{(j)}\right|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Так как $0<\frac{3}{2}<3$, то из неравенства для моментов (см., например, [4, 6, 8, 9]) вытекает:

$$\left(M\left|\xi_{ns}^{(j)}\right|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \le \left(M\left|\xi_{ns}^{(j)}\right|^3\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Следовательно,

$$M\left|\xi_{ns}^{(j)}\right|^2 \le \left(M\left|\xi_{ns}^{(j)}\right|^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(M\left|\xi_{ns}^{(j)}\right|^3\right)^{\frac{1}{3}} \le \left(\frac{Hh(n)}{n^{3/2}}\right)^{\frac{2}{3}} \le \frac{H_1 h(n)}{n},$$

где $H_1 = H^{\frac{2}{3}}$.

Аналогично, используя неравенство Гёльдера, имеем:

$$M\left|\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)}\xi_{nq}^{(k)}\right| \le \left(M\left|\xi_{ns}^{(i)}\right|^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(M\left|\xi_{np}^{(j)}\xi_{nq}^{(k)}\right|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \le$$

$$\le \left(M\left|\xi_{ns}^{(i)}\right|^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(M\left|\xi_{np}^{(j)}\right|^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(M\left|\xi_{nq}^{(k)}\right|^3\right)^{\frac{1}{3}} \le \left(\frac{Hh(n)}{n^{3/2}}\right)^{\frac{3}{3}} \le \frac{H_2 h(n)}{n^{3/2}},$$

где $H_2 = H$.

Таким образом, выполняются условия (1) и (2) теоремы 1. В этом случае выполняется и условие (Л) при δ=1. Следовательно, по теореме 1 и замечанию к теореме 2 суммы S_n имеют нормальное предельное распределение с х. ф. $\varphi(t) = e^{-(tB,\, t^*)/2}$, что доказывает теорему 3.

Примером использования теоремы 3 является

Теорема 4. *Пусть* $\{X_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, *–* m_n*-зависимая система серий d-мерных векторов, центрированных своими математическими ожиданиями, существуют моменты третьего порядка, причем* $\max\limits_{s} M\ |X_{ns}|^3 \le H$*, где H – некоторая постоянная. Тогда для сходимости распределения сумм* $S_n = \frac{1}{\alpha_n}\sum\limits_{s=1}^{n} X_{ns}$ *нормированных случайных векторов* $\xi_{ns} = \frac{X_{ns}}{\alpha_n}$*, где* $\alpha_n = \frac{h(n)}{n^{1/2}}$*, к нормальному закону с х. ф.* $\varphi(t) = e^{-(tB,\, t^*)/2}$ *достаточно, чтобы* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$.

Доказательство. Действительно,

$$M\left|\xi_{ns}\right|^3 = M\left|\frac{X_{ns}h(n)}{n^{1/2}}\right|^3 = \frac{h^3(n)}{n^{3/2}} M\left|X_{ns}\right|^3 \le \frac{Hh^3(n)}{n^{3/2}},$$

т. е. выполняется условие (6). Следовательно, по теореме 2 сумма S_n имеет нормальное предельное распределение с х. ф. $\varphi(t) = e^{-(tB,\, t^*)/2}$, что доказывает теорему 4.

Заметим, что в случае независимости случайных величин нормировка $\alpha_n = \dfrac{h(n)}{n^{1/2}}$ необходима для сходимости распределений сумм к нормальному закону (см., например, [6, 7]).

1. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М., 1965.
2. Ибрагимов И.А. // Теория вероятностей и ее применения. 1975. Т. 20. № 1. С. 134.
3. Юдин М.Д. // Изв. вузов. Математика. 1999. № 4 С. 61.
4. Юдин М.Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. Мн., 1990.
5. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М., 1977.
6. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М., 1949.
7. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М., 1987.
8. Ширяев А.Н. Вероятность. М., 1980.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М., 1989.

Поступила в редакцию 03.10.2002.

Андрей Григорьевич Федосенко – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Г.А. Медведев.

УДК 517.925.6

В.И. МАТАТОВ, О.Н. ТИШКЕВИЧ

К ВОПРОСУ О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

The non-autonomous system of two differential equations with quadratic non-linearity concerning the polarity of sliding singularities is studied. The corresponding systems of *P*-type are integrated of elementary or elliptic functions and also in terms of function-solutions of the first of Penleve equation.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2, \\ \dfrac{dy}{dz} = b_0 + b_1 x + b_2 y + a_3 xy + a_4 y^2, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_0=a_0(z)$, …, $a_4=a_4(z)$, $a_5=a_5(z)\neq 0$, $b_0=b_0(z)$, $b_1=b_1(z)$, $b_2=b_2(z)$ – голоморфные функции, $z\in C$, $(x, y)\in \bar{C}^2$, $\bar{C}=C\cup\{\infty\}$. В статье [1] изучена система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = P_2(z,x,y), \\ y' = Q_2(z,x,y) \end{cases} \tag{2}$$

с квадратичными по x, y нелинейностями на предмет полярности подвижных особых точек. С помощью линейного преобразования $x=X+\mu Y$, $y=Y$, где μ – корень алгебраического уравнения

$$b_3\mu^3+(b_4-a_3)\mu^2+(b_5-a_4)\mu-a_5=0, \tag{3}$$

система (2) упрощалась. Случай, когда алгебраическое уравнение (3) не имеет корней, т. е. когда $b_3=0$, $b_4=a_3$, $b_5=a_4$, $a_5\neq 0$, в [1] не рассматривался. Этому случаю и соответствует система дифференциальных уравнений (1). Найдем условия того, что система (1) принадлежит классу P, т. е. что ее