

Поступила в редакцию 08.06.2002.

Дмитрий Евгеньевич Рингель – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа Я. В. Радыно.

УДК 517.977

Ж.М. КРАВЧЕНКО

МЕТОД КОРРЕКЦИИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГАРАНТИРОВАННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Method to correcting an approximate solution is offered. Optimal positional solution is considered.

В [1] описан метод построения приближенного решения задачи гарантированной оптимизации, точность которого повышается с увеличением точности построения внешних аппроксимаций множеств замыкания. Однако в этом случае растут требования к объему оперативной памяти. В данной работе предлагается метод, в котором требуемая точность достигается использованием небольшого числа вспомогательных векторов.

1. В классе дискретных управлений $u=u(t)$, $t \in T=[t_*, t^*]$, рассмотрим задачу

$$c'x(t^*) \rightarrow \max,$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + d(t)w; \quad x(t_*) = x_0; \quad x(t^*) \in X^* = \{x \in \mathbb{R}^n: Hx \leq g\}; \quad (1)$$

$$w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R}: |w| \leq w^*\}; \quad u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}: |u| \leq 1\}, \quad t \in T,$$

где $x=x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u=u(t) \in \mathbb{R}$, $w=w(t) \in \mathbb{R}$; $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(t)$, $d(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in T$, – кусочно-непрерывные функции; $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $g \in \mathbb{R}^m$.

Как и в [1], предположим, что 1) в процессе управления могут реализовываться любые кусочно-непрерывные функции $w(t) \in W$, $t \in T$; 2) в каждый момент замыкания t^i из

$$T^p = \{t^i \in T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^* - h\}, i = \overline{0, p}\}, \quad t_* = t^0 < t^1 < \dots < t^p < t^*, \quad (2)$$

сообщается возмущение $w_i^*(\cdot) = (w^*(t) \in W, t \in T^{(i)} = [t^i, t^{i+1}])$.

Будем строить управления, которые с гарантией переводят систему (1) на терминальное множество и обеспечивают максимум гарантированному значению критерия качества.

2. Для упрощения изложения предлагаемого метода коррекции приближенного решения [1] ограничимся случаем одного момента замыкания. Следуя [1], по небольшому набору $Q_i = \{q_j \in \mathbb{R}^n: \|q_j\|=1, j = \overline{1, l}\}$, найдем $h_i(q)$, $\bar{y}^{i, \alpha^i}(q)$, $i = \overline{0, 1}$; $\bar{\alpha}^0$ – значение критерия качества; активный вектор q_{j^*} ; порождаемую им цепочку активных векторов q_{k^*} , $k = \overline{1, n}$; экстремальные точки x_0 , x_1^* ; активные точки по активным векторам $\bar{x}_{j^*}^0$; $\bar{x}_{k^*}^1$, $k = \overline{1, n}$; априорно-экстремальное управление $\bar{u}^0(\cdot) = (\bar{u}_i^0(\cdot), i = \overline{0, 1})$ и априорно-наихудшее возмущение $\bar{w}^0(\cdot) = (\bar{w}_i^0(\cdot), i = \overline{0, 1})$. Точность приближенного решения

$\bar{u}^0(\cdot)$ тем выше, чем меньше расстояние между экстремальными и активными точками.

Идея метода коррекции состоит в том, чтобы скорректировать значения активных векторов таким образом, чтобы экстремальные точки x_0, x_1^* совпали с заданной точностью с активными $\bar{x}_{j_0}^0; \bar{x}_{j_k}^1, k = \overline{1, n}$.

Таким образом, до тех пор, пока $|x_0 - \bar{x}_{j_0}^0| > \varepsilon^0$ или $|\bar{x}_{j_k}^1 - x_1^*| > \varepsilon^{1,k}, k = \overline{1, n}$ ($\varepsilon^0, \varepsilon^{1,k}$ – заданная точность), выполняем следующие действия. Обозначим $\Delta x = (x_0 - \bar{x}_{j_0}^0)' F(t^0) F^{-1}(t^1), \Delta x_k = (x_1^* - \bar{x}_{j_k}^1)' F(t^1) F^{-1}(t^2), k = \overline{1, n}$; изменим активные векторы:

$$q'_{j_0} = \frac{(q'_{j_0} + \omega \Delta x)}{|q'_{j_0} + \omega \Delta x|}; \quad q'_{j_k} = \frac{(q'_{j_k} + \omega_k \Delta x_k)}{|q'_{j_k} + \omega_k \Delta x_k|},$$

где $\omega, \omega_k, k = \overline{1, n}$, – шаги коррекции, которые можно менять на каждой итерации. Следуя В.Г. Болтянскому [2], можно показать, что для скорректированных значений активных векторов величины $|x_0 - \bar{x}_{j_0}^0|, |x_1^* - \bar{x}_{j_k}^1|, k = \overline{1, n}$, становятся меньше. По измененному множеству Q_i пересчитываем значения $h_i(q), \bar{y}^{i,\alpha}(q), i = \overline{0, 1}$, до тех пор, пока не найдется $\bar{\alpha}^0 \geq \alpha: h'_0(q_{j_0})x_0 = \bar{y}^{0,\alpha^0}(q_{j_0})$, затем вычислим x_1^* ; активные точки $\bar{x}_{j_0}^0; \bar{x}_{j_k}^1, k = \overline{1, n}; \bar{u}^0(\cdot) = (\bar{u}_i^0(\cdot), i = \overline{0, 1}); \bar{w}^0(\cdot) = (\bar{w}_i^0(\cdot), i = \overline{0, 1})$. Если активные векторы изменили свой порядковый номер, необходимо уменьшить шаг $\omega, \omega_k, k = \overline{1, n}$. Управление $\bar{u}^0(\cdot)$, соответствующее условию $|x_0 - \bar{x}_{j_0}^0| \leq \varepsilon^0$ и $|x_1^* - \bar{x}_{j_k}^1| \leq \varepsilon^{1,k}, k = \overline{1, n}$, является приближенным решением задачи (1).

3. Проиллюстрируем метод коррекции на примере из [1].

Математическая модель задачи имеет вид:

$$|x_2(2.2\pi)| \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u + w,$$

$$x_1(0) = -4, \quad x_2(0) = 2.5, \quad x_1(2.2\pi) = 0,$$

$$w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R}: |w| \leq 0.5\}; \quad u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}: |u| \leq 1\}, \quad t \in T = [0, 2.2\pi].$$

Для нахождения априорно-экстремального управления и априорно-наихудшего возмущения в классе дискретных функций были выбраны период квантования $h=2.2\pi/120$ и точка замыкания $t^1=1.1\pi$.

Векторы из Q строились по формулам:

$$q_1 = (0, 1), \quad q_j = (q_{1j-1} \cos(2\pi/l) + q_{2j-1} \sin(2\pi/l), -q_{1j-1} \sin(2\pi/l) + q_{2j-1} \cos(2\pi/l)), \\ j = \overline{2, l}.$$

На рис. 1 показаны множества замыкания и траектория движения на различных этапах коррекции при $l=8, p=1$, отрезком AB – терминальное множество, внутренний восьмигранник – множество \bar{X}^1 , внешний – \bar{X}^0 . На множествах замыкания отмечены активные и экстремальные точки.

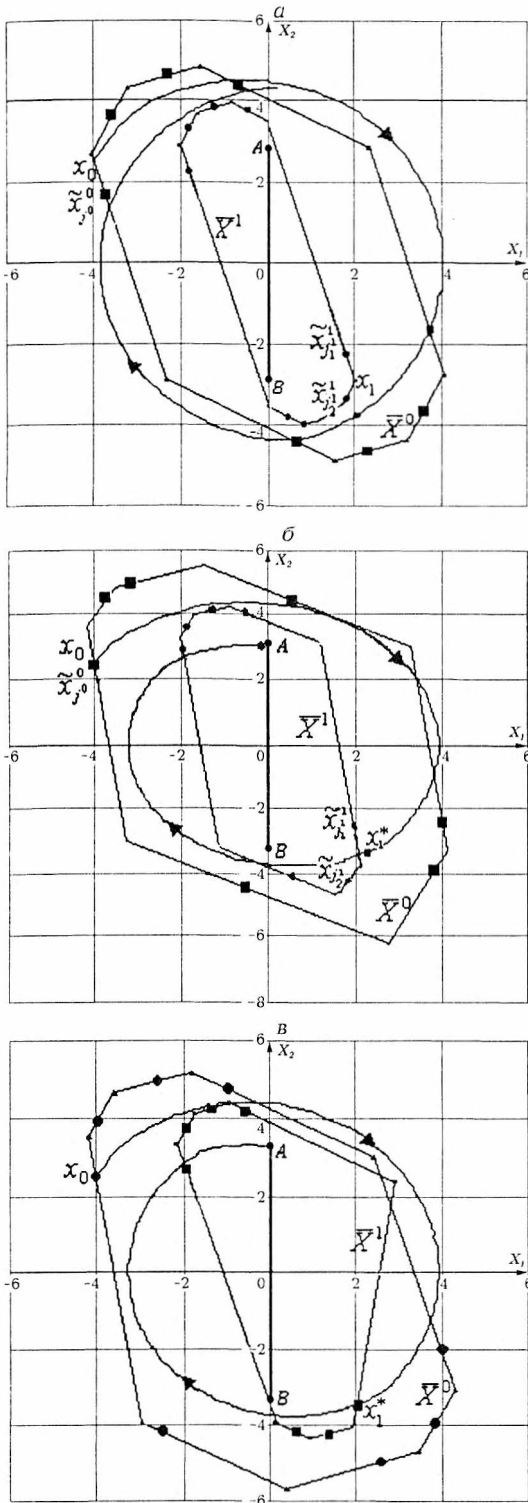


Рис. 1. Множества замыкания и траектория движения:
 а – исходное положение, б – промежуточное, в – окончательное

На рис. 1 а изображена ситуация до начала коррекции:
 $|x_0 - \bar{x}_{j_0}^0| = 0.85, \quad |x_1^* - \bar{x}_{j_1}^1| = 0.472,$
 $|x_1^* - \bar{x}_{j_2}^1| = 0.625.$ q_3 – активный вектор на множестве \bar{X}^0 ; q_7, q_8 – на \bar{X}^1 .

Коррекция вектора q_3 с шагом $\omega = 0.64$, вектора q_7 – с $\omega_1 = 0.53$ и вектора q_8 – с $\omega_2 = -0.47$ даст
 $|x_0 - \bar{x}_{j_0}^0| = 0.03, \quad |x_1^* - \bar{x}_{j_1}^1| = 0.253,$
 $|x_1^* - \bar{x}_{j_2}^1| = 0.224.$ Новая ситуация показана на рис. 1 б.

После нескольких дополнительных коррекций получаем ситуацию, изображенную на рис. 1 в, где
 $|x_0 - \bar{x}_{j_0}^0| = 0.017,$
 $|x_1^* - \bar{x}_{j_1}^1| = 0.0203, \quad |x_1^* - \bar{x}_{j_2}^1| = 0.0142,$
 $\bar{\alpha}^0 = 3.302364.$

4. Опишем процесс управления системой в реальном времени. Опять ограничимся одним моментом замыкания. До начала процесса управления вычисляются $\bar{\alpha}^0, h_i(q), \bar{y}^{i, \bar{\alpha}^0}(q), i = 0, 1;$
 $\bar{u}^0(\cdot).$ В начальный момент $t = t_*$, согласно принятому соглашению, становится известным возмущение $w_0^*(\cdot) = (w(t) \in W, t \in T^{(0)}).$

Теперь вместо множества $\bar{X}^{0, \bar{\alpha}^0}$ рассматриваем множество

$$\bar{X}_{w_0^*(\cdot)}^{0, \alpha} = \{ h'_i(q) z \leq \bar{y}^{i, \alpha}(q, w_0^*(\cdot)), q \in Q_i \},$$

где

$$h'_i(q) = q' F(t^1) F^{-1}(t^0), \quad \bar{y}^{0, \alpha}(q, w_0^*(\cdot)) =$$

$$= \max_{y \in \bar{X}^{1, \alpha}} q' y + \int_{t^0}^{t^1} |q' F(t^1) F^{-1}(\tau) b(\tau)| d\tau -$$

$$- \int_{t^0}^{t^1} q' F(t^1) F^{-1}(\tau) d(\tau) w_0^*(\tau) d\tau, \quad q \in Q_i.$$

По данным $h_i(q)$, $i = \overline{0, 1}$, $\bar{\gamma}^{1,\alpha}(q)$, $\bar{\gamma}^{0,\alpha}(q, w_0^*(\cdot))$ найдем $\bar{\alpha}^0(t^0) \geq \bar{\alpha}^0$: $h'_0(q_{j^0})x_0 = \bar{\gamma}^{0,\bar{\alpha}^0(t^0)}(q_{j^0}, w_0^*(\cdot))$; где $q_{j^0} \in Q_l$ – активный вектор; одновременно вычислим $u^0(t | w_0^*(\cdot))$; $\bar{u}_1^0(\cdot)$; $\bar{w}_1^0(\cdot)$; x_1^* ; $x_{2,k}^*$, $k = \overline{1, n}$; \bar{x}_1^1 , $k = \overline{1, n}$; и $\bar{x}_{j^0}^0(w_0^*(\cdot)) = F(t^0)F^{-1}(t^1) x_1^* - \int_{t^0}^{t^1} F(t^0)F^{-1}(\tau)b(\tau)u^0(\tau | w_0^*(\tau))d\tau - \int_{t^0}^{t^1} F(t^0)F^{-1}(\tau)d(\tau)w_0^*(\tau)d\tau$.

Если $|x_0 - \bar{x}_{j^0}^0(w_0^*(\cdot))| \leq \varepsilon$ и $|x_1^* - \bar{x}_1^1| \leq \varepsilon^{2,k}$, $k = \overline{1, n}$, то управление $u_0^*(\cdot) = (u^0(t | w_0^*(\cdot)), t \in T^{(0)})$ оптимально на промежутке $T^{(0)}$. Иначе для исходных данных проведем коррекцию.

В момент t^1 , когда система оказывается в точке x_1^* , становится известным возмущение $w_1^*(\cdot)$. По данным

$$h_i(q), \bar{\gamma}^{1,\bar{\alpha}^0(t^1)}(q, w_1^*(\cdot)) = \max_{y \in \bar{X}^{*\bar{\alpha}^0(t^1)}} q'y + \int_{t^1}^{t^2} |q' F(t^2)F^{-1}(\tau)b(\tau)|d\tau - \int_{t^1}^{t^2} q' F(t^2)F^{-1}(\tau)d(\tau)w_1^*(\tau)d\tau, q \in Q_l,$$

вычислим $\bar{\alpha}^0(t^1) \geq \bar{\alpha}^0(t^0)$: $h'_1(q_{j^1})x_1^* = \bar{\gamma}^{1,\bar{\alpha}^0(t^1)}(q_{j^1}, w_1^*(\cdot))$; $u^0(t | w_1^*(\cdot))$, x_2^* , $\bar{x}_{j^1}^1(w_1^*(\cdot))$.

Если $|x_1^* - \bar{x}_{j^1}^1(w_1^*(\cdot))| \leq \varepsilon^1$, то управление $u_1^*(\cdot) = (u^0(t | w_1^*(\cdot)), t \in T^{(1)})$ оптимально на промежутке $T^{(1)}$, иначе корректируем вектор q_{j^1} .

Число $\bar{\alpha}^0(t^1)$ равно оптимальному значению критерия качества задачи (1) в рассматриваемом процессе управления.

5. Проиллюстрируем процесс управления в реальном времени на примере из п. 3. На рис. 2 приведены траектории системы управления, реализовавшиеся при разных возмущениях.

Пусть на систему действует неизвестное регулятору возмущение $w^*(t) = -0.5$, $t \in T = [0, 2.2\pi]$. В начальный момент $t = t_*$ становится известным возмущение $w_0^*(\cdot) = -0.5$. Используя вспомогательные множества $\bar{X}^{0,\bar{\alpha}}(w_0^*(\cdot))$, $\bar{X}^{1,\bar{\alpha}}$, $X^{*,\bar{\alpha}}$, построенные с помощью множества Q_{128} , регулятор вычислил $\bar{\alpha}^0(t^0) = 0.68298$, $x_1^* = (0.859523, -1.5854)$, $u^0(t | w_0^*(\cdot))$, $t \in T^{(0)} = [0, 1.1\pi]$. В момент $t^1 = 1.1\pi$ поступает информация $w_1^*(\cdot) = -0.5$, по которой регулятор вычислил $\bar{\alpha}^0(t^1) = 0.14126$, $u^0(t | w_1^*(\cdot))$, $t \in T^{(1)} = [1.1\pi, 2.2\pi]$, $x(t^*) = (-0.00135, 0.14388)$. Реализующаяся траектория движения помечена на рис. 2 буквой *a*.

Траектория *b* соответствует случаю, когда на систему действовало неизвестное регулятору возмущение $w_0^*(t) = 0.2$, $t \in T^{(0)}$, $w_1^*(t) = -0.2$, $t \in T^{(1)}$. В мо-

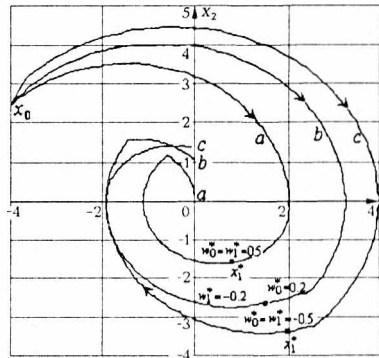


Рис. 2. Траектория движения при разных возмущениях

мент $t=t_*$ становится известной первая часть этого возмущения, в момент t^1 – вторая часть. Критерий качества $\bar{\alpha}^0(t^1)$ оказался равным 1.101589.

В случае c на систему действовало возмущение $w^*(t)=0.5, t \in T$. В начальный момент $t=t_*$ поступает информация $w_0^*(t)$, в момент $t^1 - w_1^*(t)$. Критерий качества $\bar{\alpha}^0(t^1)$ оказался равным 1.389117.

1. Кравченко Ж. М. Гарантированная оптимизация систем управления с использованием краткосрочных прогнозов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.

2. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Минценко. М., 1976.

Поступила в редакцию 26.02.2001.

Жанна Михайловна Кравченко – аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Р. Габасов.

УДК 539.3

В.А. САВЕНКОВ

РАСТЯЖЕНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРУГОВЫМ ИЗОТРОПНЫМ ЯДРОМ С РАЗРЕЗОМ НА ЛИНИИ КОНТАКТА

This paper considers the stress fields around a circular isotropic inclusion in anisotropic infinite plate with crack at the interface. The problem is reduced into a pair of integral equations for the unknown interfacial tractions and some results are presented in graphical form.

Рассмотрим кусочно-однородную упругую среду, занимающую плоскость комплексного переменного $z=x+iy$, состоящую из бесконечной анизотропной пластинки единичной толщины с круговым отверстием радиуса $r=1$ и круглого изотропного диска, которые на участке $S_1: [-\alpha, \alpha] (\alpha < \pi)$ спаяны между собой. Пластинка находится под действием приложенных на бесконечности растягивающих усилий интенсивностью P и Q . Берега разреза $S_2: (\alpha, 2\pi - \alpha)$ свободны от внешней нагрузки. Требуется определить контактные напряжения на линии раздела материалов.

Математическая постановка задачи заключается в решении двух взаимосвязанных краевых задач: одной – о напряженно-деформированном состоянии изотропного круглого диска и другой – о напряженном состоянии анизотропной пластинки с круговым отверстием.

Рассмотрим первую основную задачу для круга. Введем полярные координаты r, θ соотношением $z=x+iy=re^{i\theta}$ и обозначим через $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ компоненты напряжений в этих координатах. Пусть на границе круга заданы нормальные $N(t)$ и касательные $T(t)$ напряжения, т. е.

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = N(t) + iT(t), \quad t = e^{i\theta}.$$

Напряженное состояние круга определяется с помощью аналитической функции $\Phi(z)$ [1]:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1} [N(t) + iT(t)] \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{2t} \right) dt.$$

Для определения перемещений на границе круга воспользуемся формулой [1]: